線性代數第10章
秩rank，核數nullity
行空間基底，列空間基底

陳擎文老師

1. 定義

列空間(row space)
行空間(column space)
核空間(null space)

列空間、行空間、核空間

- 若 A 為 $m \times n$ 矩陣　　(Page. 195)
- 1. 列空間
  - 則 A 之列向量所生成的空間為 R^n 的子空間，稱作 A 的列空間 (row space of A) ，記作 $RS(A)$。
- 2. 行空間
  - 而 A 之行向量所生成的空間為 R^m 的子空間，稱作 A 的行空間 (column space of A) ，記作 $CS(A)$。
- 3. 核空間
  - 齊次系統 $Ax = 0$ 的解空間為 R^n 的子空間，稱作 A 的核空間 (null space of A) ，記作 $NS(A)$。

列空間、行空間、核空間的符號

- 若 A 為 $m \times n$ 矩陣 (Page. 195)
- 1. 列空間：(row space of A) = RS(A)。
- 2. 行空間：(column space of A) = CS(A)。
- 3. 核空間：(null space of A) = NS(A)。

如何計算矩陣A所形成的列空間？

- 以列簡化方式求列空間之基底 (Page. 200)

- $$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{V1} \\ \leftarrow \text{V2} \\ \leftarrow \text{V3} \\ \end{array} \end{array}$$

- 所以簡化後的列空間基底(有前導壹)，就是矩陣
的列空間基底

- 列基底S={v1, v2, v3}所形成的空間，就是列空間

如何計算矩陣A所形成的行空間？

- 以列簡化方式求列空間之基底 (Page. 200)

$$
\begin{array}{cccccc} v1 & & v2 & & v3 & \\ \end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} w1 & & w2 & & w3 & \end{array} \end{array}
$$

- 所以簡化後的列空間基底(有前導壹)，就是矩陣
的列空間基底

- 行基底S={v1, v2, v3}所形成的空間，就是行空間

如何計算矩陣A所形成的核空間？

- 以列簡化方式求列空間之基底 (Page 200)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Ax=0

無限多組解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 28 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 37 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -13 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 定義：矩陣A的核空間

=為齊次線性系統 Ax = 0 的解空間

=核空間的基底B={v1, v2, v3, v4}

2.矩陣的基底向量(1)

=列空間所形成的基底

=行空間所形成的基底

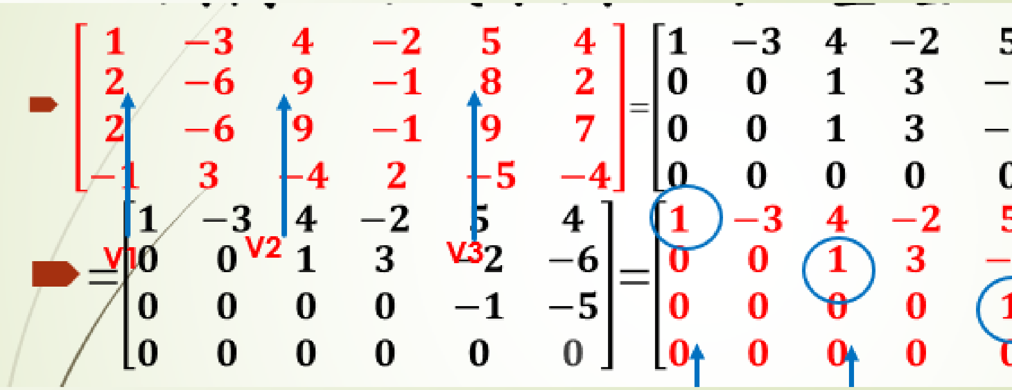
如何求矩陣的基底向量

(Page. 199)

- 方法：
- 若矩陣 R 已經是簡化後的列梯形形式
- 1. 則帶有前導壹的列向量（非零列）可成為 R 的列空間基底向量
- 2. 且帶有前導壹的行向量可成為 R 的行空間基底向量

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow V1 \\ \leftarrow V2 \\ \leftarrow V3 \\ \end{matrix} \end{array}$$



列空間定理

定理 4.7.3 (Page.198)

- 基本列運算不會改變矩陣的核空間。

定理 4.7.4

- 基本列運算不會改變矩陣的列空間。

範例5:梯矩陣的列空間與行空間之基底

- 求以下矩陣列空間與行空間之基底？ (Page. 199)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

重要 範例5:梯矩陣的列空間與行空間之基底

- 求以下矩陣列空間和行空間之基底？ (Page. 199)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 這已經是個簡化過的梯形矩陣

- 列空間基底=找前導壹的列=

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= [1 \quad -2 \quad 5 \quad 0 \quad 3] \\ \mathbf{r}_2 &= [0 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \quad 0] \\ \mathbf{r}_3 &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \end{aligned}$$

- 行空間之基底= =找前導壹的行

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

範例5:Python程式碼

```python
from sympy import *
M = Matrix([
    [1,-2,5,0,3],
    [0,1,3,0,0],
    [0,0,0,1,3],
    [0,0,0,0,0]
    ])
M_simple = M.rref()
print('顯示高斯消去法簡化的梯形矩陣的echelon form =\n', M_simple)
M_rowspace = M.rowspace()
M_columnspace = M.columnspace()
print('輸出列空間的向量之線性組和= row space= \n', M_rowspace)
print('輸出行空間的向量之線性組和= column space= \n', M_columnspace)
```

```
顯示高斯消去法簡化的梯形矩陣的echelon form =
 (Matrix([
[1, 0, 11, 0, 3],
[0, 1,  3, 0, 0],
[0, 0,  0, 1, 3],
[0, 0,  0, 0, 0]]), (0, 1, 3))
輸出列空間的向量之線性組和= row space=
 [Matrix([[1, -2, 5, 0, 3]]), Matrix([[0, 1, 3, 0, 0]]),
Matrix([[0, 0, 0, 1, 3]])]
輸出行空間的向量之線性組和= column space=
 [Matrix([
[1],
[0],
[0],
[0]]), Matrix([
[-2],
[ 1],
[ 0],
[ 0]]), Matrix([
[0],
[0],
[1],
[0]])]
```

範例6：以列簡化方式求列空間之基底

- 以列簡化方式求列空間之基底 （Page. 200）

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

- 應用定理：
- 簡化後的R矩陣的列空間基底=A的列空間基底

範例6：以列簡化方式求列空間之基底

- 以列簡化方式求列空間之基底 (Page. 200)
- $$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
- $$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
- 根據定理：基本列運算不會改變矩陣的列空間
- 所以簡化後的列空間基底(有前導壹)，就是矩陣A的列空間基底

範例6：以列簡化方式求列空間之基底

- 以列簡化方式求列空間之基底 (Page. 200)

- $$=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 所以簡化後的列空間基底(有前導壹)，就是矩陣A的列空間基底

$$\mathbf{r}_1 = [1 \quad -3 \quad 4 \quad -2 \quad 5 \quad 4]$$
$$\mathbf{r}_2 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \quad -2 \quad -6]$$
$$\mathbf{r}_3 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 5]$$

範例6:Python程式碼

```python
from sympy import *
M = Matrix([
    [1,-3,4,-2,5,4],
    [2,-6,9,-1,8,2],
    [2,-6,9,-1,9,7],
    [-1,3,-4,2,-5,-4]
    ])
M_simple = M.rref()
print('顯示高斯消去法簡化的梯形矩陣的echelon form =\n', M_simple)
M_rowspace = M.rowspace()
M_columnspace = M.columnspace()
print('輸出列空間的向量之線性組和= row space= \n', M_rowspace)
print('輸出行空間的向量之線性組和= column space= \n', M_columnspace)
```

```
顯示高斯消去法簡化的梯形矩陣的echelon form =
 (Matrix([
[1, -3, 0, -14, 0, -37],
[0,  0, 1,   3, 0,   4],
[0,  0, 0,   0, 1,   5],
[0,  0, 0,   0, 0,   0]]), (0, 2, 4))
輸出列空間的向量之線性組和= row space=
 [Matrix([[1, -3, 4, -2, 5, 4]]), Matrix([[0, 0, 1, 3, -2, -6]]), Matrix([[0, 0, 0, 0, 1, 5]])]
輸出行空間的向量之線性組和= column space=
 [Matrix([
[ 1],
[ 2],
[ 2],
[-1]]), Matrix([
[ 4],
[ 9],
[ 9],
[-4]]), Matrix([
[ 5],
[ 8],
[ 9],
[-5]])]
```

範例7：使用列簡化求行空間基底

- 以列簡化方式求行空間之基底 （Page. 201）

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

- 應用定理：
- 簡化後的R矩陣的行空間基底≠A的列空間基底
- A矩陣的行空間基底（找R對應行）

範例7：使用列簡化求行空間基底

(Page. 201)

- $$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
- $$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}'_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}'_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 簡化後矩陣有包含前導壹的是：第 1、 3、 5 個行向量
- 行沒有類似列定理，**因為簡化後的行空間基底，與原矩陣的不同**
- 所以A矩陣的行空間基底（找對應行）：

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

範例7:Python程

```python
from sympy import *
M = Matrix([
    [1,-3,4,-2,5,4],
    [2,-6,9,-1,8,2],
    [2,-6,9,-1,9,7],
    [-1,3,-4,2,-5,-4]
    ])
M_simple = M.rref()
print('顯示高斯消去法簡化的梯形矩
echelon form =\n', M_simple)
M_rowspace = M.rowspace()
M_columnspace = M.columnspace()
print('輸出列空間的向量之線性組和=
space= \n', M_rowspace)
print('輸出行空間的向量之線性組和=
column space= \n', M_columnspace)
```

```
顯示高斯消去法簡化的梯形矩陣的echelon form =
 (Matrix([
[1, -3, 0, -14, 0, -37],
[0,  0, 1,   3, 0,   4],
[0,  0, 0,   0, 1,   5],
[0,  0, 0,   0, 0,   0]]), (0, 2, 4))
輸出列空間的向量之線性組和= row space=
 [Matrix([[1, -3, 4, -2, 5, 4]]), Matrix([[0, 0, 1, 3, -2, -6]]), Matrix([[0, 0, 0, 0, 1, 5]])]
輸出行空間的向量之線性組和= column space=
 [Matrix([
[ 1],
[ 2],
[ 2],
[-1]]), Matrix([
[ 4],
[ 9],
[ 9],
[-4]]), Matrix([
[ 5],
[ 8],
[ 9],
[-5]])]
```

範例8：使用列運算求向量空間的基底

- 試求以下向量所生成之 R^5 子空間的基底 (Page. 202)

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 0, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (2, -5, -3, -2, 6),$$
$$\mathbf{v}_3 = (0, 5, 15, 10, 0), \quad \mathbf{v}_4 = (2, 6, 18, 8, 6)$$

- 意義：四個向量所生成的空間S2，可以用幾個基底向量來組成所有S2的的任何空間向量
  - 可以用列向量的基底組成，也可以用行向量的基底

範例8：使用列運算求向量空間的基底

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 0, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (2, -5, -3, -2, 6),$$
$$\mathbf{v}_3 = (0, 5, 15, 10, 0), \quad \mathbf{v}_4 = (2, 6, 18, 8, 6)$$

- 這些向量所生成的空間，即為以下矩陣的列空間(Page. 202)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

- 化簡為列梯形，可得
- 矩陣的非零列=列基底向量

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_1 = (1, -2, 0, 0, 3), \quad \mathbf{w}_2 = (0, 1, 3, 2, 0), \quad \mathbf{w}_3 = (0, 0, 1, 1, 0)$$

範例8:Python程式碼

```
from sympy import *
M = Matrix([
    [1,-2,0,0,3],
    [2,-5,-3,-2,6],
    [0,5,15,10,0],
    [2,6,18,8,6]
    ])
M_simple = M.rref()
print('顯示高斯消去法簡化的梯形矩陣
echelon form =\n', M_simple)
M_rowspace = M.rowspace()
M_columnspace = M.columnspace()
print('輸出列空間的向量之線性組和=
space= \n', M_rowspace)
print('輸出行空間的向量之線性組和=
column space= \n', M_columnspace)
```

```
顯示高斯消去法簡化的梯形矩陣的echelon form =
 (Matrix([
[1, 0, 0, -2, 3],
[0, 1, 0, -1, 0],
[0, 0, 1,  1, 0],
[0, 0, 0,  0, 0]]), (0, 1, 2))
輸出列空間的向量之線性組和= row space=
 [Matrix([[1, -2, 0, 0, 3]]), Matrix([[0, -1, -3, -2,
0]]), Matrix([[0, 0, 12, 12, 0]])]
輸出行空間的向量之線性組和= column space=
 [Matrix([
[1],
[2],
[0],
[2]]), Matrix([
[-2],
[-5],
[ 5],
[ 6]]), Matrix([
[ 0],
[-3],
[15],
[18]])]
```

範例10：求這些向量生成的空間之基底

- 算這些向量生成的空間之基底　　(Page. 204)

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (2, -5, -3, 6),$$

$$\mathbf{v}_3 = (0, 1, 3, 0), \quad \mathbf{v}_4 = (2, -1, 4, -7), \quad \mathbf{v}_5 = (5, -8, 1, 2)$$

範例10：算這些向量生成的空間之基底

- 將向量 v1, v2, . . . , v5 當做行向量，建構一矩陣(Page. 204)

$$
\begin{array}{ccccc}
\left[\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\
-2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\
0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\
3 & 6 & 0 & -7 & 2
\end{array}\right] \\
\uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow \\
\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2\ \ \mathbf{v}_3\ \ \mathbf{v}_4\ \ \mathbf{v}_5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right] \\
\uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow \\
\mathbf{w}_1\ \ \mathbf{w}_2\ \ \mathbf{w}_3\ \ \mathbf{w}_4\ \ \mathbf{w}_5
\end{array}
$$

- 化為簡化列梯形，並標記各行向量為 w1, w2, w3, w4, w5
- 前導壹發生在第 1、2、4 行： $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4\}$
- 所以A的基底向量發生在： $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 2 \\
-2 & -5 & -1 \\
0 & -3 & 4 \\
3 & 6 & -7
\end{array} \\
\uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow \\
\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2\ \ \mathbf{v}_4
\end{array}
$$

範例10:Python程式碼

```python
from sympy import *
M = Matrix([
    [1,2,0,2,5],
    [-2,-5,1,-1,-8],
    [0,-3,3,4,1],
    [3,6,0,-7,2]
    ])
M_simple = M.rref()
print('顯示高斯消去法簡化的梯形矩陣的echelon form =\n', M_simple)
M_rowspace = M.rowspace()
M_columnspace = M.columnspace()
print('輸出列空間的向量之線性組和= row space= \n', M_rowspace)
print('輸出行空間的向量之線性組和= column space= \n', M_columnspace)
```

```
顯示高斯消去法簡化的梯形矩陣的echelon form =
 (Matrix([
[1, 0,  2, 0, 1],
[0, 1, -1, 0, 1],
[0, 0,  0, 1, 1],
[0, 0,  0, 0, 0]]), (0, 1, 3))
輸出列空間的向量之線性組和= row space=
 [Matrix([[1, 2, 0, 2, 5]]), Matrix([[0, -1, 1, 3, 2]]),
Matrix([[0, 0, 0, 5, 5]])]
輸出行空間的向量之線性組和= column space=
 [Matrix([
[ 1],
[-2],
[ 0],
[ 3]]), Matrix([
[ 2],
[-5],
[-3],
[ 6]]), Matrix([
[ 2],
[-1],
[ 4],
[-7]])]
```

3. 矩陣的基底向量(2)

=核空間所形成的基底

如何計算矩陣A所形成的核空間？

- 以列簡化方式求列空間之基底 (Page 200)

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3\\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4\\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1\\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7\end{bmatrix}$$

Ax=0

無限多組解

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}4\\2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}28\\12\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}37\\16\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}+u\begin{bmatrix}-13\\-5\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

- 定義：矩陣A的核空間

=為齊次線性系統 Ax = 0 的解空間

=核空間的基底B={v1, v2, v3, v4}

範例4：求矩陣核空間(Ax=0)的基底

- 求以下矩陣核空間的基底 (page. 198)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix}$$

範例4：求矩陣核空間(Ax=0)的基底

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix}$$

- A 矩陣的核空間為齊次線性系統 Ax = 0 的解空間，如範例3 所解出，簡化列梯形 (page.198)

使用高斯－喬登消去法解齊次線性系統

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad\qquad + 2x_5 \qquad\qquad &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= 0 \\ 5x_3 + 10x_4 \qquad\qquad + 15x_6 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 \qquad\qquad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 0 \end{aligned}$$

齊次系統之增廣矩陣為

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 0 \end{bmatrix}$$

範例4：求矩陣核空間(Ax=0)的基底

- Ax = 0 的無限多解 (page. 198)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix}$$

齊次系統之增廣矩陣為

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 0 \end{bmatrix}$$

簡化列梯形為

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \quad + 4x_4 + 2x_5 \quad &= \\ x_3 + 2x_4 \quad &= \\ x_6 &= \end{aligned}$$

- 令x2=r, x4=s, x5=t

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = 0$$

範例4：求矩陣核空間(Ax=0)的基底

Ax = 0 的無限多解 (page. 198)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = -3r - 4s - 2t,\quad x_2 = r,\quad x_3 = -2s,\quad x_4 = s,\quad x_5 = t,\quad x_6 = 0$$

- Ax=0無限多組解

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{r\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_h}$$

- 這個解的空間=核空間
- 這個解空間的基底=
- （核空間的基底）

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

範例4:Python程式碼: M.nullspace()

```
#範例14-3：求矩陣核空間的基底
# (1) sympy求解
from sympy import *
M = Matrix([
    [1, 3, -2, 0, 2, 0],
    [2, 6, -5, -2, 4, -3],
    [0, 0, 5, 10, 0, 15],
    [2, 6, 0, 8, 4, 18]
    ])
```

```
M_nullsapce = M.nullspace()
print('核空間向量集合 = null space=\n', M_nullsapce)
```

範例4:Python程式碼

```
#範例14-3：求矩陣核空間的基底
# (1) sympy求解
from sympy import *
M = Matrix([
    [1,3,-2,0,2,0],
    [2,6,-5,-2,4,-3],
    [0,0,5,10,0,15],
    [2,6,0,8,4,18]
    ])
M_simple = M.rref()
print('顯示高斯消去法簡化的梯形矩陣的echelon form =\n', M_simple)
M_rank = M.rank()
M_dim = M.shape[1]
M_nullity = M_dim - M_rank
print('輸入空間維度 = input dimension of M=', M_dim)
print('輸出空間維度 = rank(M)=', M_rank)
print('核空間維度 = 被轉換壓縮的空間維度 = nullity=', M_nullity)
M_nullsapce = M.nullspace()
M_columnspace = M.columnspace()
print('線性轉換後有壓縮空間 = 核空間向量集合 = null space=\n', M_nullsapce)
print('輸出行空間的向量之線性組和= column space= \n', M_columnspace)
```

```
顯示高斯消去法簡化的梯形矩陣的echelon form =
 (Matrix([
[1, 3, 0, 4, 2, 0],
[0, 0, 1, 2, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 1],
[0, 0, 0, 0, 0, 0]]), (0, 2, 5))
輸入空間維度 = input dimension of M= 6
輸出空間維度 = rank(M)= 3
核空間維度 = 被轉換壓縮的空間維度 = nullity= 3
線性轉換後有壓縮空間 = 核空間向量集合 = null space=
 [Matrix([
[-3],
[ 1],
[ 0],
[ 0],
[ 0],
[ 0]]), Matrix([
[-4],
[ 0],
[-2],
[ 1],
[ 0],
[ 0]]), Matrix([
[-2],
[ 0],
[ 0],
[ 0],
[ 0],
[ 1],
```

```
from symp
x1, x2, x3,
symbols('
M = Matri
    [1, 3,
    [2, 6,
    [0, 0,
    [2, 6,
    ])
M_simple
print(' 顯
形矩陣的e
M_simple)
```

```
pace()
umnspace()
縮空間 = 核空
ce=\n',
量之線性組和=
columnspace)
```

4. 矩陣的四種空間

矩陣的四種基本空間

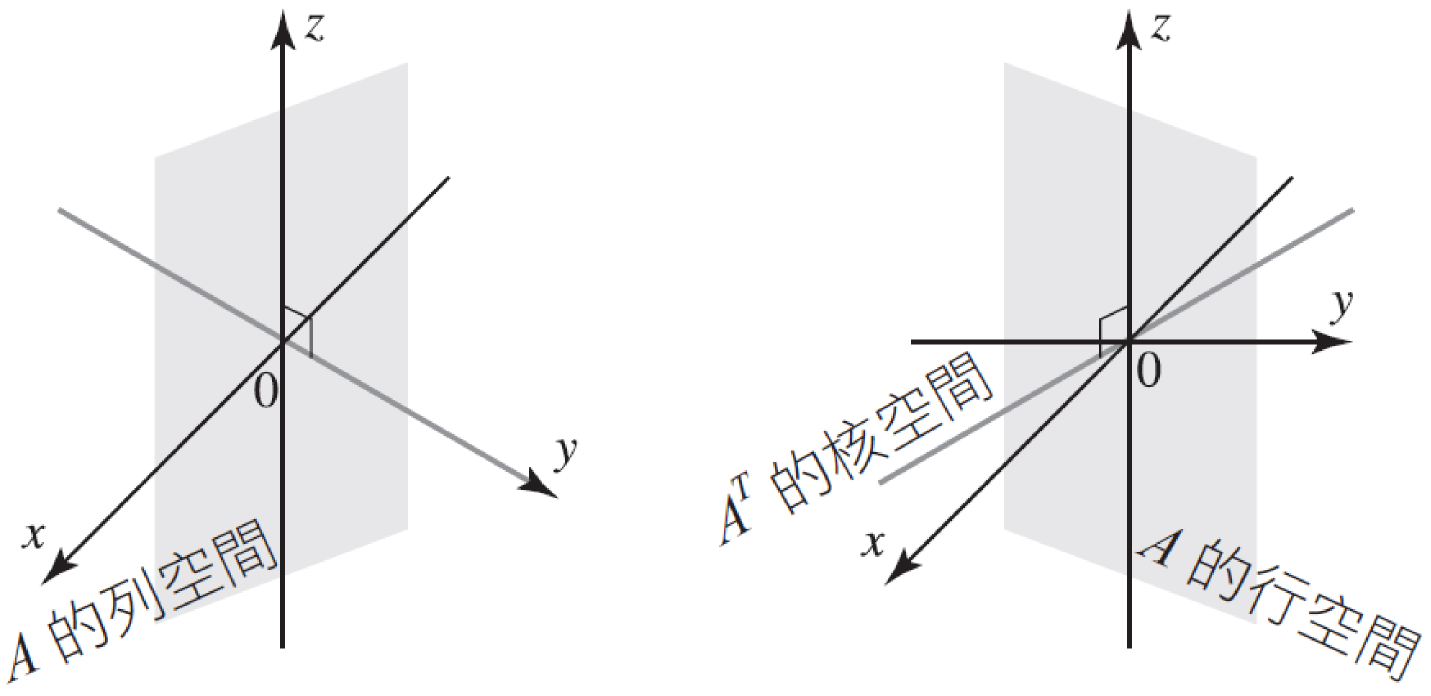
- 矩陣 A 的基本空間（fundamental spaces）

A 的列空間	A 的行空間
A 的核空間	A^T 的核空間

(page. 211)

矩陣的四種基本空間的正交關係

- (a) A 的核空間和 A 的列空間彼此正交(垂直)
- (b) A^T 的核空間和 A 的行空間彼此正交(垂直)



➲ 圖 4.8.2

(page. 213)

證明：核空間和列空間彼此正交(內積=0)

```
from sympy import *
M = Matrix([
    [1, 3, -2, 0, 2, 0],
    [2, 6, -5, -2, 4, -3],
    [0, 0, 5, 10, 0, 15],
    [2, 6, 0, 8, 4, 18]
    ])
M_nullsapce = M.nullspace(
M_rowspace = M.rowspace()
n1, n2, n3 = M.nullspace()
r1, r2, r3 = M.rowspace()
print('n1 = ', n1)
print('r1 = ', r1)
print(n1.dot(r1))
```

```
線性轉換後有壓縮空間 = 核空間向量集合 = null space=
 [Matrix([
[-3],
[ 1],
[ 0],
[ 0],
[ 0],
[ 0]]), Matrix([
[-4],
[ 0],
[-2],
[ 1],
[ 0],
[ 0]]), Matrix([
[-2],
[ 0],
[ 0],
[ 0],
[ 1],
[ 0]])]
輸出列空間的向量之線性組和= column space=
 [Matrix([[1, 3, -2, 0, 2, 0]]), Matrix([[0, 0, -1, -2, 0, -3]]), Matrix([[0, 0, 0,
0, 0, -6]])]
n1 =  Matrix([[-3], [1], [0], [0], [0], [0]])
r1 =  Matrix([[1, 3, -2, 0, 2, 0]])
n1.dot(r1)=核空間和列空間彼此正交(內積=0) =  0
```

矩陣的四種基本空間的維度關係

- 矩陣A基本空間的秩rank (page. 212)

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$$

$$\text{rank}(A) + \text{nullity}(A^T) = m$$

- 列空間RS的維度 = 行空間CS的維度
- 矩陣的輸入向量行維度=n=行空間維度＋核空間維度
- 矩陣的輸出向量行維度=m=行空間維度＋核空間轉置維度

$$\dim[\text{RS}(A)] = r \qquad \dim[\text{CS}(A)] = r$$

$$\dim[\text{NS}(A)] = n - r \qquad \dim[\text{NS}(A^T)] = m - r$$

3.線性系統之通解(general solution)

=特解＋齊次解

特解:particular solution

齊次解:homogeneous solution

線性系統之通解=特解＋齊次解(page. 196)

- (1). 線性系統之 $Ax = b$ 完整解(通解)

= 系統特解＋齊次解

- (2). 特解 x_0：
  - x_0 為線性系統 $Ax = b$ 之特解
- (3). 齊次解xh：($Ax = 0$)
  - W 為滿足齊次系統 $Ax = 0$ 的齊次解集合
- (4). 矩陣A的線性系統的完整解(通解) $= x_0 + W$

範例2：求矩陣A的行空間**特解**

- 求線性系統的解空間 page.196)

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

-1x1+3x2+2x3 = 1

x1+2x2-3x3 = -9

2x1+1x2-2x3 = -3

以高斯－喬登消去法方式解得

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 3$$

由此並依據 (2) 式可知

$$2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

範例2:Python程式

```
用numpy解聯立方程式，X=
[[ 2.]
 [-1.]
 [ 3.]]
```

```python
from sympy import *
x1,x2,x3 = symbols('x1 x2 x3')
M = Matrix([
    [-1,3,2,1],
    [1,2,-3,-9],
    [2,1,-2,-3]
    ])
ans = solve_linear_system(M, x1, x2, x3)
print('用sympy解聯立方程式 =', ans)
```

```python
import numpy as np
A = np.array([
    [-1,3,2],
    [1,2,-3],
    [2,1,-2]
    ])
Y = np.array([
    [1],[-9],[-3]
    ])
X = np.linalg.solve(A, Y)
print('用numpy解聯立方程式，X=\n', X)
```

範例3：算矩陣A的齊次解xh，非齊次特解x0

- 求線性系統的解空間 (page. 17)
- 齊次解xh 非齊次特解x0

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 和 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- 這題x0的解是無限多組解

範例3：算矩陣A的齊次解xh(Ax=0)

- Ax = 0 的無限多解 (page.17)

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15\\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18\end{bmatrix}$$

齊次系統之增廣矩陣為

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 0\\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 0\end{bmatrix}$$

簡化列梯形為

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \quad + 4x_4 + 2x_5 \quad &= \\ x_3 + 2x_4 \quad &= \\ x_6 &= \end{aligned}$$

- 令x2=r, x4=s, x5=t

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = -3r - 4s - 2t,\quad x_2 = r,\quad x_3 = -2s,\quad x_4 = s,\quad x_5 = t,\quad x_6 = 0$$

範例3：算矩陣A的齊次解xh(Ax=0)

Ax = 0 的無限多解 (page. 17)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = 0$$

- Ax=0無限多組解

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{r\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_h}$$

- 這個解的空間=核空間
- 這個解空間的基底=
- (核空間的基底)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

範例3：算矩陣A的特解x0

- Ax = b 的無限多解（page. 15）

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \quad\quad + 2x_5 \quad\quad &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 \quad\quad + 15x_6 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 \quad\quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6 \end{aligned}$$

簡化列梯形為

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \quad + 4x_4 + 2x_5 \quad &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \quad &= 0 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

- 令x2=r, x4=s, x5=t

齊次解xh

特解x0

通解

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \tfrac{1}{3}$$

範例3：算矩陣A的特解x0

- Ax = b 的無限多解 (page. 15)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad\quad + 2x_5 \qquad\quad &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 \qquad\quad + 15x_6 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 \qquad\quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \frac{1}{3}$$

- 特解x0

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3r - 4s - 2t \\ r \\ -2s \\ s \\ t \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_0} + \underbrace{r\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_h}$$

重要

比較：齊次解xh，特解x0

- Ax=b特解x0

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \frac{1}{3}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3r - 4s - 2t \\ r \\ -2s \\ s \\ t \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_0} + \underbrace{r\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_h}$$

- Ax=0齊次解xh

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = 0$$

- 結論：Ax=0，Ax=b的解，結構一樣（同樣基底）
- 但是：Ax=b的解，多出一個常數項x0

範例3：算矩陣A的齊次解xh＋非齊次特解x0

- 求線性系統的無限多組解空間 (page. 197)f
- 非齊次特解x0

齊次解xh

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3r-4s-2t \\ r \\ -2s \\ s \\ t \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_0} + \underbrace{r\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_h}$$

範例3：Python程式碼

```
from sympy import *
x1,x2,x3,x4,x5,x6 = symbols('x1 x2 x3 x4 x5 x6')
M = Matrix([
    [1,3,-2,0,2,0,0],
    [2,6,-5,-2,4,-3,-1],
    [0,0,5,10,0,15,5],
    [2,6,0,8,4,18,6]
    ])
M_simple = M.rref()
print('顯示高斯消去法簡化的梯形矩陣的echelon form =\n', M_simple)
ans = solve_linear_system(M, x1,x2,x3,x4,x5,x6)
print('用sympy解聯立方程式 = ', ans)
```

```
M = Matrix([
    [1,3,-2,0,2,0],
    [2,6,-5,-2,4,-3],
    [0,0,5,10,0,15],
    [2,6,0,8,4,18]
    ])
M_rank = M.rank()
M_dim = M.shape[1]
M_nullity = M_dim - M_rank
M_nullsapce = M.nullspace()
print('線性轉換後有壓縮空間 = 核空間向量集合 = null space=\n', M_nullsapce)
```

```
顯示高斯消去法簡化的梯形矩陣的echelon form =
 (Matrix([
[1, 3, 0, 4, 2, 0,   0],
[0, 0, 1, 2, 0, 0,   0],
[0, 0, 0, 0, 0, 1, 1/3],
[0, 0, 0, 0, 0, 0,   0]]), (0, 2, 5))
用sympy解聯立方程式 =  {x6: 1/3, x3: -2*x4, x1: -3*x2 - 4*x4 - 2*x5}
輸入空間維度 = input dimension of M= 6
輸出空間維度 = rank(M)= 3
核空間維度 = 被轉換壓縮的空間維度 = nullity= 3
線性轉換後有壓縮空間 = 核空間向量集合 = null space=
 [Matrix([
[-3],
[ 1],
[ 0],
[ 0],
[ 0],
[ 0]]), Matrix([
[-4],
[ 0],
[-2],
[ 1],
[ 0],
[ 0]]), Matrix([
[-2],
[ 0],
[ 0],
[ 0],
[ 1],
[ 0]])]
用numpy解聯立方程式，X= （無法處理無限多組解）
```

5. 秩rank，核數nullity 的定義

重要

秩(rank of A)

- (a). rank(A)：秩 (page. 206)
  - 行空間維度=矩陣簡化後，行空間前導壹的個數
  - 列空間維度=矩陣簡化後，非零列空間的個數
  - $Ax=0$的通解中前導壹的個數。
- (b). nullity(A)：$Ax=0$的通解中參數(自由變數)的個數
  - $\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = n$
  - A有n個變數 = 具n個行的矩陣

什麼是前導壹變數，自由變數

- 1.矩陣有6行=有6個輸入變數的維度 (Page.208)
- 2.化簡矩陣A
- $$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 12 & 16 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

非零列數=2

無前導1行數=4=nullity

- 前導壹變數個數= 2（有前導壹，v1,v2）= rank
- 自由變數個數=4（無前導壹，w1,w2,w3w4）= nullity
- rank(A)秩數+ nullity(A)核數 =6

2 + 4 =6

範例3:計算秩rank與核數nullity

- 1.矩陣有6行=有6個輸入變數的維度 (Page. 208)

$$A=\begin{bmatrix}-1&2&0&4&5&-3\\3&-7&2&0&1&4\\2&-5&2&4&6&1\\4&-9&2&-4&-4&7\end{bmatrix}$$

- rank(A)秩數+ nullity(A)核數= n
- 2.化簡矩陣A
- $\begin{bmatrix}-1&2&0&4&5&-3\\3&-7&2&0&1&4\\2&-5&2&4&6&1\\4&-9&2&-4&-4&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2&0&4&5&-3\\0&-1&2&12&16&-5\\0&-1&2&12&16&-5\\0&-1&2&12&16&-5\end{bmatrix}$
- $=\begin{bmatrix}-1&2&0&4&5&-3\\0&-1&2&12&16&-5\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

非零列數=2

有前導1行數=2=rank

無前導1行數=4=nullity

rank(A)秩數+ nullity(A)核數 =6

2 + 4 =6

範例3:Python程式碼

```
import numpy as np
A = np.array([
     [-1,2,0,4,5,-3],
     [3,-7,2,0,1,4],
     [2,-5,2,4,6,1],
     [4,-9,2,-4,-4,7]
     ])
rankA = np.linalg.matrix_rank(A)
print(’矩陣A的rank=’,rankA)
print(’矩陣A的維度=’,A.ndim)
print(’矩陣A的維度=’, A.shape)
print(’矩陣A的變數n數目=’, A.shape[0])
```

```
矩陣A的rank= 2
矩陣A的維度= 2
矩陣A的維度= (4, 6)
矩陣A的變數n數目= 4
```

6. 秩rank，核數nullity 的物理意義

重要

秩rank與核數nullity的意義

- 1. 矩陣有6行=有6個輸入變數的維度
- rank(A)秩數+ nullity(A)核數= n

rank(*A*)秩數+ nullity(*A*)核數 =6

2 + 4 =6

- 2. 化簡矩陣A
- $=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 12 & 16 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

非零列數=2

有前導1行數=2=rank

無前導1行數=4=nullity

- 3. 物理意義：
- Rank = 矩陣轉換後的空間維度
- Nullity=矩陣轉換成核空間的維度（<u>被壓縮成0空間的維度</u>）

重要

秩rank與核數nullity的意義

- 如果rank(A)秩數= n
- 表示沒有降階，又稱為full rank
- 表示原矩陣的行向量，彼此之間線性獨立

Rank的應用：判別是否線性獨立

#範例9-1：判別幾個向量之間，是線性獨立，或線性相依？

- #三個向量：v1=(1, －2, 3), v2=(5, 6, －1), v3=(3, 2, 1)
- **#判別向量是否為線性獨立，方法2：**
- **#先計算系統的輸入變數數量n**
- **#再計算系統矩陣的秩rank**
- #若n > rank，則表示系統有降階，表示向量之間有線性相依
- #若n = rank，則表示full rank，表示系統沒有降階，表示向量之間有線性獨立

```
import numpy as np
A = np.array(    [
        [1,  -2 ,3],
        [5,  6 ,-1],
        [3,  2 ,1]
```

```
#full rank就是linear independence 線性獨立
# n =輸入向量數目
n = np.shape(A)[0]
print('A的輸入變數數目m=', n)
A_rank = np.linalg.matrix_rank(A)
print('rank=',A_rank)

if n > A_rank:
    print('有降階，表示向量是線性相依')
else:
    print('沒有降階，full rank，表示向量是線性獨立')
```

```
A的輸入變數數目m= 3
rank= 2
有降階，表示向量是線性相依
```

範例4：秩、核數與線性系統

- 若 5 × 7 矩陣 A 的秩為 3，求 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 通解中參數的個數。 (page. 208)

- 系統輸入變數數量=n=7
- n=7= rank + nullity = 3 +自由變數數量(參數)
- $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 通解自由變數個數=7-3 = 4

範例3：算矩陣A的齊次解xh(Ax=0)

- 若 4× 6矩陣 *A* ，Ax=0解的rank=3, 求nullity?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix}$$

齊次系統之增廣矩陣為

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

簡化列梯形為

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \quad + 4x_4 + 2x_5 \\ x_3 + 2x_4 \\ x_6 \end{aligned}$$

- 令x2=r， x4=s， x5=t

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= 0 \end{aligned} \rightarrow$$

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = 0$$

- 方法1：（上面三個變數）**Ax = 0** 通解自由變數個數=3
- 方法2 ：系統輸入變數數量=n=6， nullity=6-rank=6-3=3

範例3：算矩陣A的齊次解xh(Ax=0)

Ax = 0 的無限多解(page. 17)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $x_1 = -3r - 4s - 2t,\quad x_2 = r,\quad x_3 = -2s,\quad x_4 = s,\quad x_5 = t,\quad x_6 = 0$

- Ax=0無限多組解

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{r\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_h}$$

- 這個解的空間=核空間
- 這個解空間的基底=
- 方法1：（上面三個變數）Ax = 0 通解自由變數個數=3
- 方法2 ：系統輸入變數數量=n=6, nullity=6-rank=6-3=

10. 秩rank的功用

用於資料壓縮，讓檔案變小

重要

秩rank的功用

- 1. 應用：用於**資料壓縮，讓檔案變小**，方便網路傳輸
  - (1). 使用小維度的的資料集，去接近原始資料，減少失真
  - (2). 這種刪除了冗長資料的近似集合，可以縮短傳輸時間
- 2. **方法**：使用**矩陣的秩rank**
  - (1). 秩rank：有評量矩陣『冗長性』的功能
  - (2). 例如：mxn矩陣的秩rank=k，這表示，
    - 有n-k個『行向量』是冗長資料，可以被去除(因為可以被k個向量來線性組合)
    - 有m-k個『列向量』是冗長資料，可以被去除
    - 只需要用k個向量的線性組合，就可以接近原始資料