線性代數第11章

特徵值eigenvalues

特徵方程式，特徵空間

特徵向量eigenvectors，

特徵結構

矩陣對角化

計算 A^{1000}

陳擎文老師

線性代數的學習重點與探討主題

觀念

- 數學符號的意義

基礎

- 向量
- 行列式
- 聯立方程式
- 矩陣

主題

- 線性映射
- 坐標轉換
- 特徵向量

線性代數的最後所要探討的主題

線性轉換
Linear transform

基底座標轉換
Basis vector transform

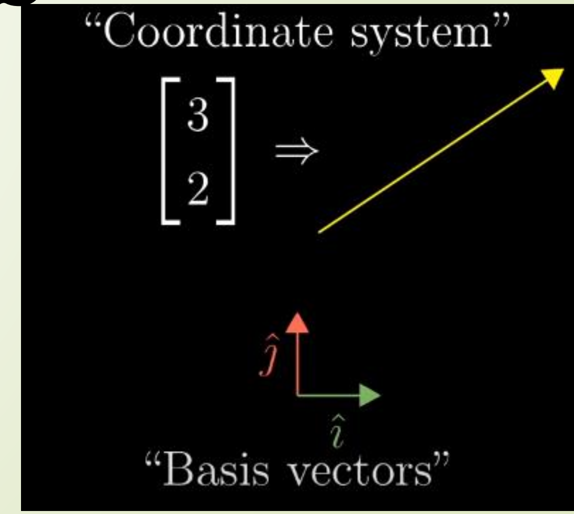
線性映射

特徵向量
Eigen vector

特徵值
Eigen value

本章探討主題

- 特徵向量：Eigenvectors(德國語)
- 特徵值：Eigenvalues
- 特徵基底：EigenBasis
- 對角線矩陣：Diagonal Matrices
- $A^{-1}MA$：視角轉換＋動作轉換



1. 典型範例

碩士班考題

Let **A** be the matrix $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(a)Find the eigenvalu es and the corresponding eigenvect ors of **A**

(b)Find a nonsin gular matrix **P** such that $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{D}$ where **D** is a diagonal （81 清大統計）

碩士班考題

試將 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 對角化 （83 台大工工）

碩士班考題

例 22： Let the $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(a)Find the eigenvalues and corresponding eigenvectors of **A**.

(b)Form the matrix **A** into a product $\mathbf{SDS}^{-1}$, where **D** is diagonal

(c)Using (b) to calculate the $\mathbf{A}^5$. （95 中央通訊所）

碩士班考題

已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，試問 $\mathbf{A}^{43}=$?　　（83 中央機械）

碩士班考題

Find an upper triangular matrix **A** that satisfies $\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 30 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$

（95 清華電機所）

1. 特徵值，特徵向量的重要性

特徵值，特徵向量的重要性(page. 263)

- 最早應用於：旋轉運動，表面分類，電腦圖學
- 現在廣泛應用於：
  - 電腦圖學
  - 機械振動
  - 熱傳，流體力學，燃燒等學科
  - 量子力學
  - 經濟學
- 特徵空間，在很多領域都有應用，所以是個重要的章節

2. 定義

特徵值eigenvalues

特徵向量eigenvectors

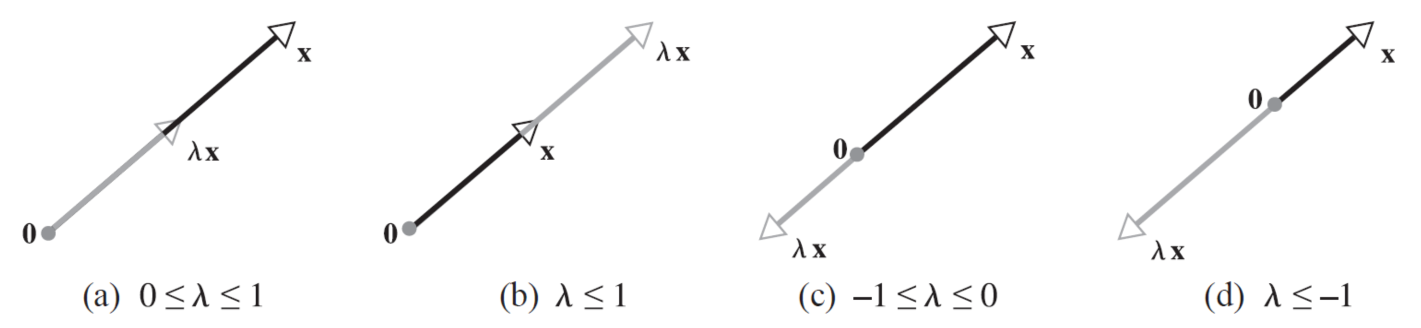
特徵方程式

特徵空間

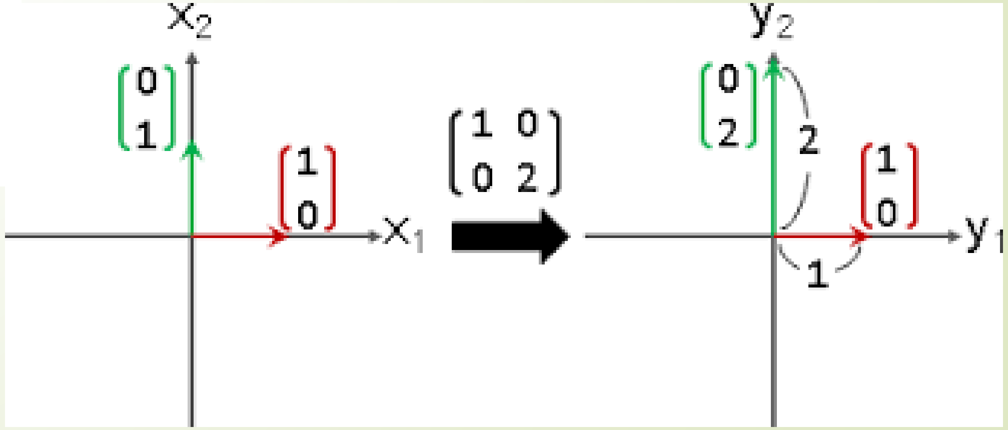
Ax的結果為x的純量倍數：$Ax = \lambda x$

特徵值和特徵向量(page. 264)

- 若A 為nxn矩陣，若Ax的結果為x的純量倍數：$A\mathrm{x} = \lambda \mathrm{x}$
  - 純量 λ 稱為A**的特徵值eigenvalues**，或固有值
  - 向量**x**稱為A**的特徵向量eigenvectors**或固有向量



➲ 圖 6.1.1



$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

重要

範例1：求2×2矩陣的特徵向量

- 若A 為$n\times n$矩陣，若$A\mathbf{x}$的結果為x的純量倍數：$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

(page. 264)

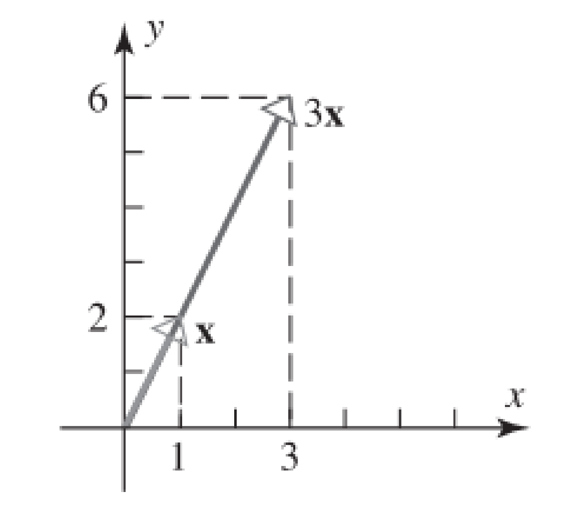
- 向量 $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 為以下矩陣的特徵向量

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0\\8 & -1\end{bmatrix}$$

其對應的特徵值為 $\lambda=3$，因為

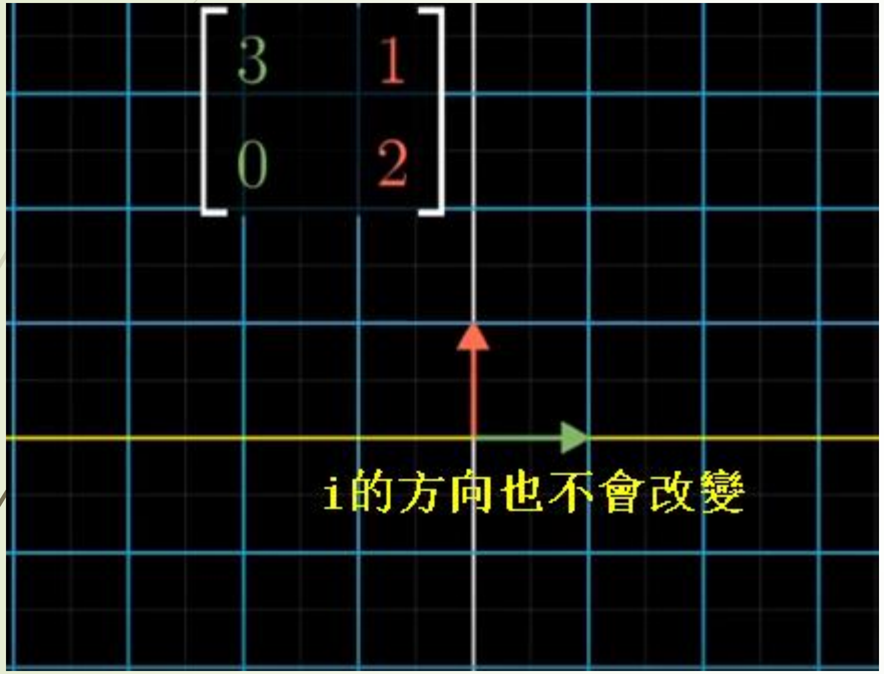
$$A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}3 & 0\\8 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}=3\mathbf{x}$$

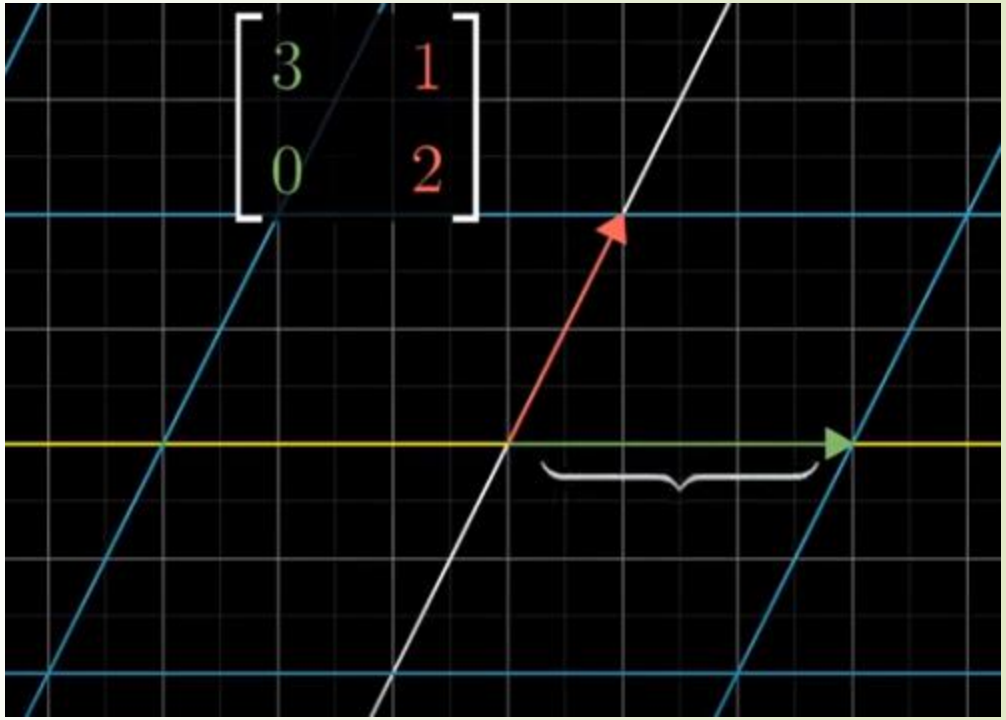
幾何上來說，$\mathbf{x}$ 左乘 A 後的結果會是對 $\mathbf{x}$ 延伸 3 倍長的向量



1. 特徵向量：Eigenvectors

- 座標轉換前後，有些向量所在方向不會被改變
- (1).

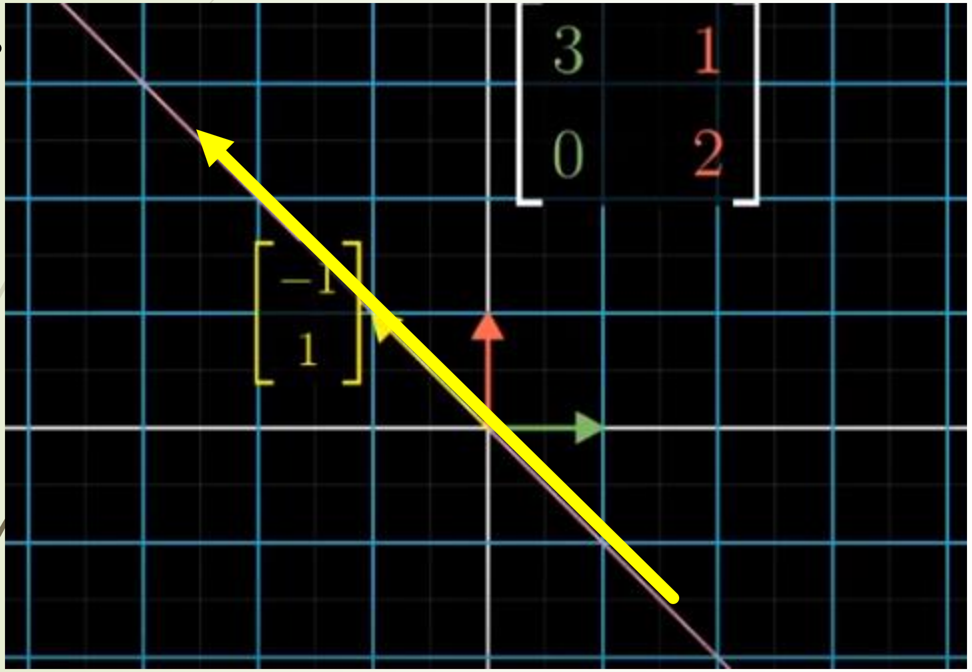


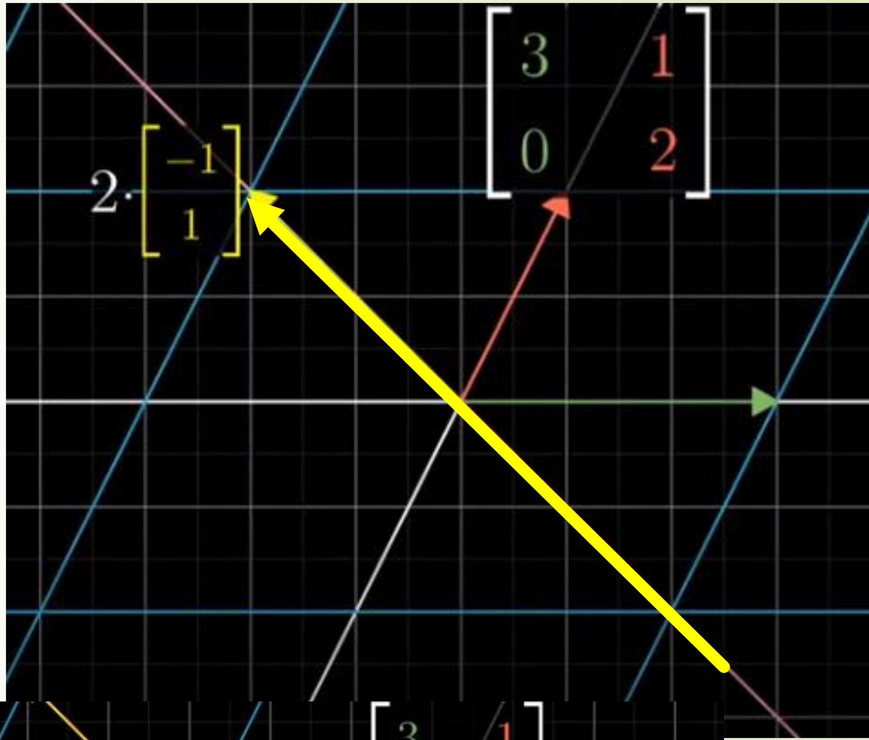


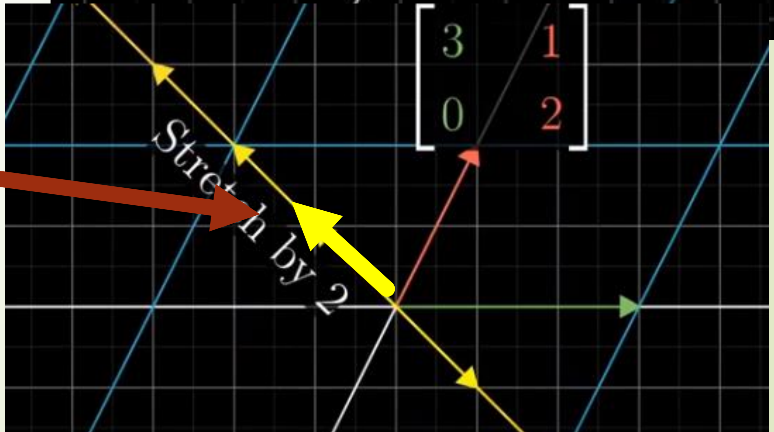
- X軸i方向也沒有被改變，而且i被拉長3倍
- i是特徵向量，特徵值是3

1.特徵向量：Eigenvectors

- 座標轉換前後，有些向量所在方向不會被改變
- (2).



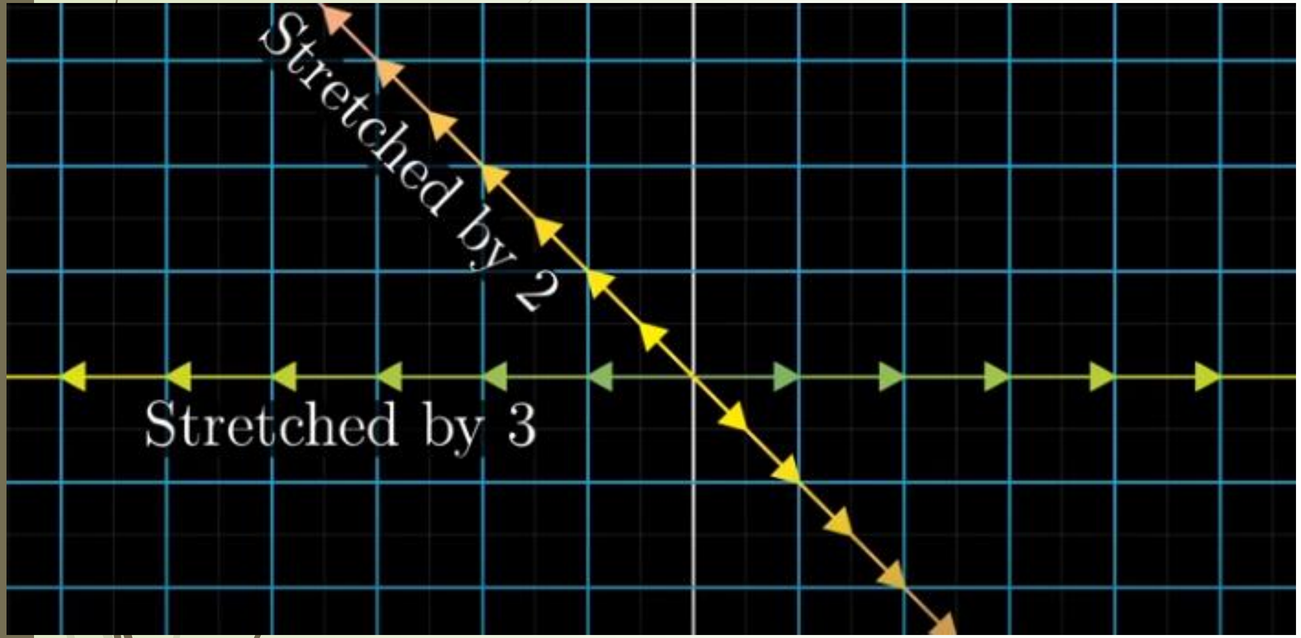


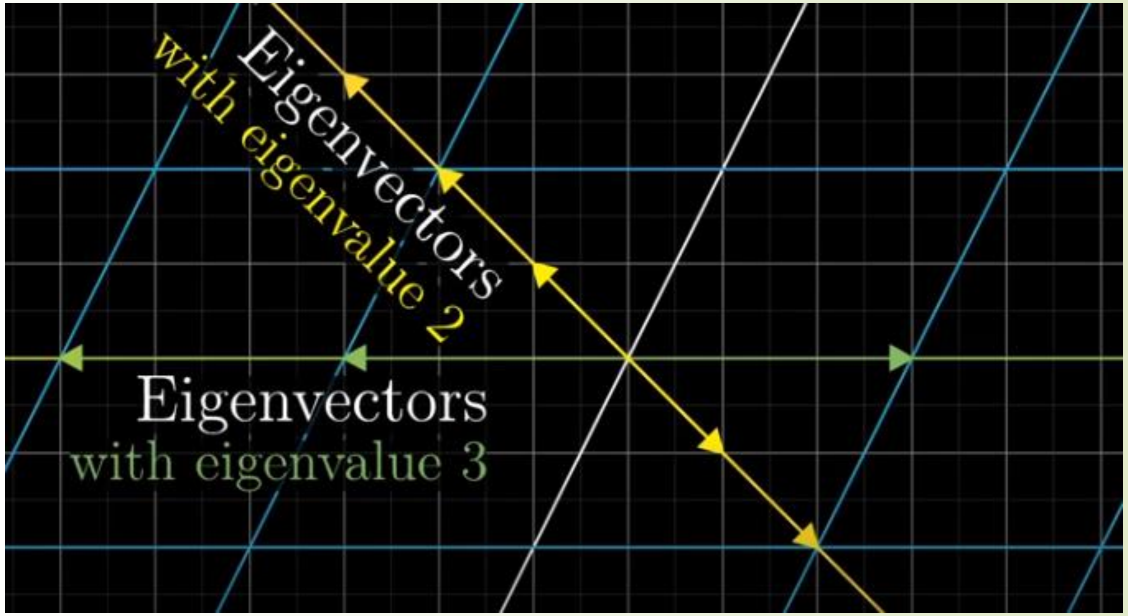


- (-1,1)方向也沒有被改變，而且i被拉長2倍
- (-1,1)是特徵向量，特徵值是2

1. 特徵向量：Eigenvectors

- 座標轉換前後，有些向量所在方向不會被改變

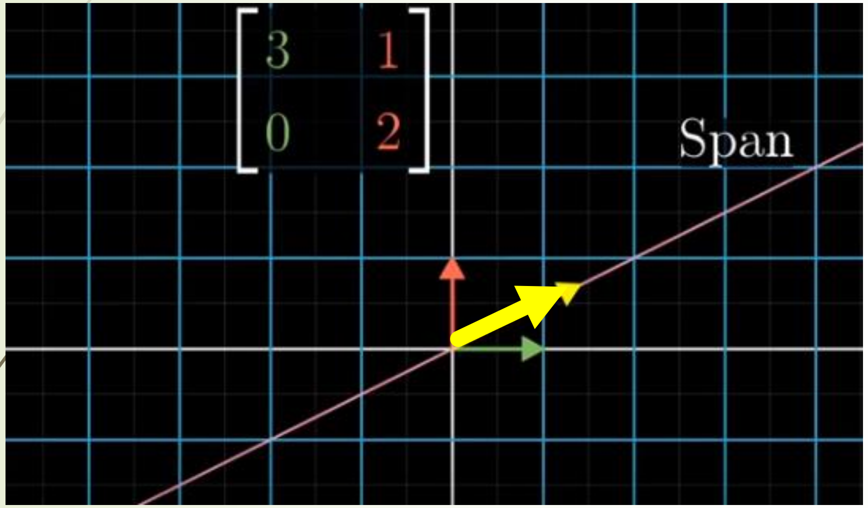


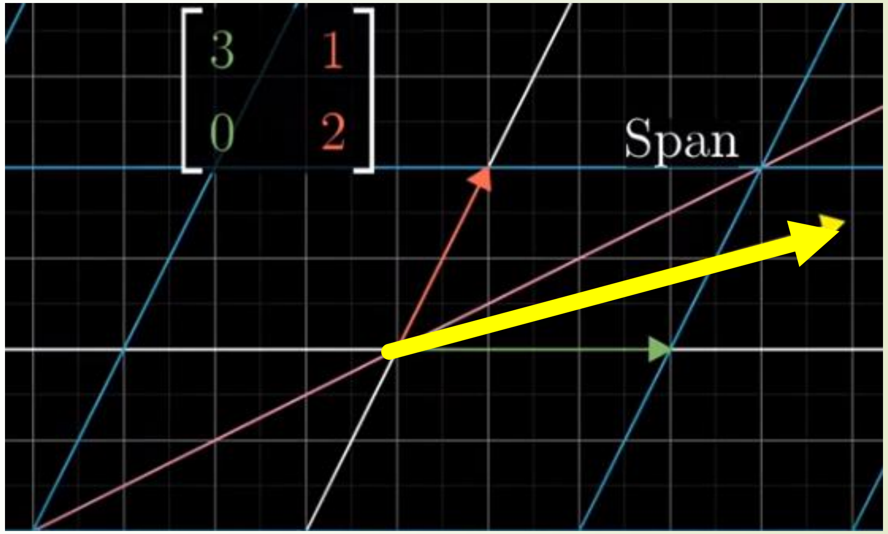


- 這些不會被改變方向的向量=特徵向量
- 特徵向量，被轉換後的變形縮放率=特徵值

1. 特徵向量：Eigenvectors

- 座標轉換前後，大部分的向量所在方向會被改變
- (1).

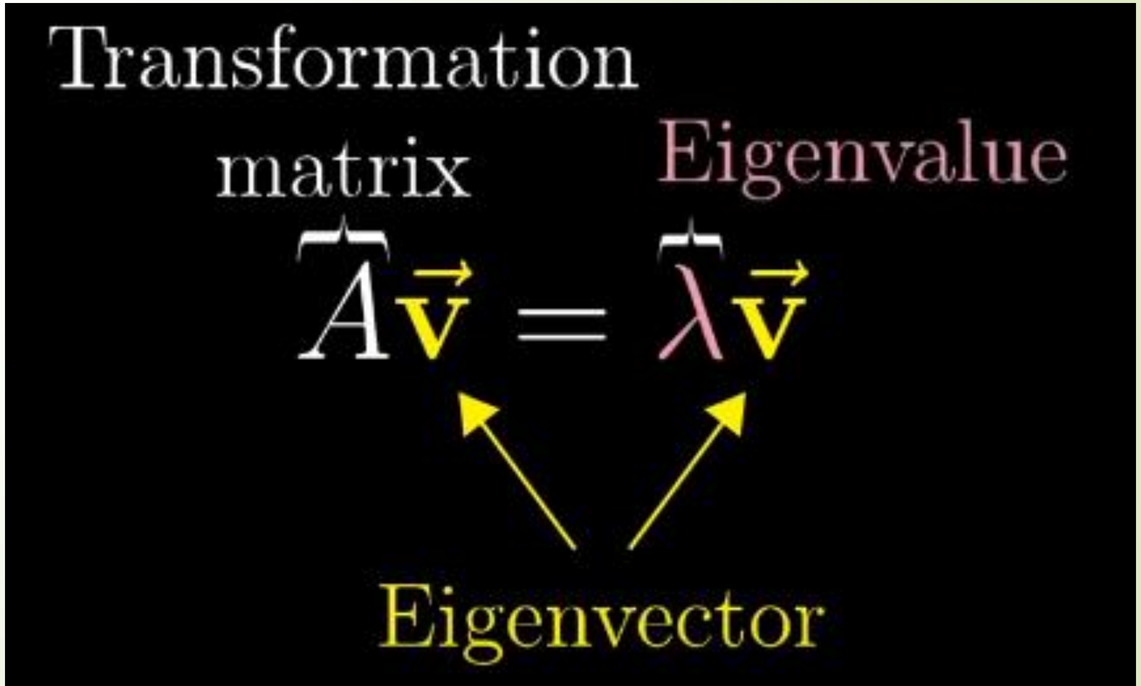




3. 計算
特徵值eigenvalues

特徵向量特徵值公式

- $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
  - $\vec{v}$：特徵向量，Eigenvectors
  - λ：**特徵值，Eigenvalues**
- 求解$\vec{v}\ \lambda = ?$
- 求解特徵向量特徵值



特徵向量特徵值公式

- $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
  - λ特徵值是個係數，會乘到$\vec{v}$的每個分量
  - 實際變成 $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$
- $A\vec{v} = \lambda I\vec{v}$
- $A\vec{v} - \lambda I\vec{v} = 0$
- $(A-\lambda I)\ \vec{v} = 0$
- 所以(A-λI)必須為0
- 也就是det(A-λI)=0
- 轉換矩陣(A-λI)=0，代表網格變形後，被壓縮到面積為0，維度降階(不是full rank)

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 4 \\ 1 & 5-\lambda & 9 \\ 2 & 6 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

結論：特徵向量特徵值公式

- $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
- $A\vec{v} = \lambda I\vec{v}$
- $A\vec{v} - \lambda I\vec{v} = 0$
- $(A-\lambda I)\vec{v} = 0$
- $\det(A-\lambda I)=0$

$$A\vec{\mathbf{v}} = \lambda\vec{\mathbf{v}}$$

$$A\vec{\mathbf{v}} - \lambda I\vec{\mathbf{v}} = 0$$

$$(A - \lambda I)\vec{\mathbf{v}} = 0$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

範例2：求特徵值

重要

- 矩陣：

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

(page. 265)

- 求解特徵值 λ=?

範例2：求特徵值

- 求解特徵方程式：$Ax = \lambda x \Rightarrow (\lambda I - A)x = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

- $\det(\lambda I - A) = 0 \longrightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$

- 解出 A矩陣的特徵值為 $\lambda=3$ 和 $\lambda=-1$

(page. 265)

Python程式碼

```python
import numpy as np
A = np.array([
     [3,0],
     [8,-1]
     ])
eigval  = np.linalg.eigvals(A)
eigvec  = np.linalg.eig(A)
print('特徵值=', eigval)
print('特徵向量=', eigvec)
print('特徵值=', eigvec[0])
print('特徵向量=', eigvec[1])
print('第1個特徵值=', eigval[0],'第1個特徵向量=',eigvec[1][:,0])
print('第2個特徵值=', eigval[1],'第2個特徵向量=',eigvec[1][:,1]/eigvec[1][:,1][0])
```

```
特徵值= [-1.  3.]
特徵向量= (array([-1.,  3.]), array([[0.        , 0.4472136 ],
       [1.        , 0.89442719]]))
特徵值= [-1.  3.]
特徵向量= [[0.         0.4472136 ]
 [1.         0.89442719]]
第一個特徵值= -1.0 第一個特徵向量= [0. 1.]
第二個特徵值= 3.0 第一個特徵向量= [1. 2.]
```

重要

範例3：3×3矩陣的特徵值λ

(page. 266)

- 矩陣：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

- 求解特徵值λ=?

範例3：3×3矩陣的特徵值 λ

重要

- A 的特徵多項式為 (page. 266)

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

$$(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda = 4, \quad \lambda = 2 + \sqrt{3}, \quad 和 \quad \lambda = 2 - \sqrt{3}$$

範例3:Python程式碼

```
import numpy as np
A = np.array([
    [0,1,0],
    [0,0,1],
    [4,-17,8]
    ])
eigval = np.linalg.eigvals(A)
eigvec = np.linalg.eig(A)
print('特徵值=', eigval)
print('特徵向量=', eigvec)
print('特徵值=', eigvec[0])
print('特徵向量=', eigvec[1])
print('第1個特徵值=', eigval[0],'\n第1個特徵向量=',eigvec[1][:,0])
print('第2個特徵值=', eigval[1],'\n第2個特徵向量=',eigvec[1][:,1]/eigvec[1][:,1][0])
print('第3個特徵值=', eigval[2],'\n第3個特徵向量=',eigvec[1][:,2]/eigvec[1][:,2][0])
```

```
特徵值= [0.26794919 3.73205081 4.        ]
特徵向量= (array([0.26794919, 3.73205081, 4.        ]), array([[-0.96361137,
-0.06918418, -0.06052275],
       [-0.25819889, -0.25819889, -0.24209101],
       [-0.06918418, -0.96361137, -0.96836405]]))
特徵值= [0.26794919 3.73205081 4.        ]
特徵向量= [[-0.96361137 -0.06918418 -0.06052275]
 [-0.25819889 -0.25819889 -0.24209101]
 [-0.06918418 -0.96361137 -0.96836405]]
第1個特徵值= 0.26794919243112236 第1個特徵向量= [1.         0.26794919 0.07179677]
第2個特徵值= 3.7320508075688448 第2個特徵向量= [ 1.          3.73205081 13.92820323]
第3個特徵值= 4.0000000000000355 第3個特徵向量= [ 1.  4. 16.]
```

4. 算三角矩陣的特徵值

= A 的主對角線元素

重要

三角矩陣的特徵值

定理 6.1.2 (page. 267)

- 若 A 為 $n \times n$ 三角矩陣（上三角、下三角或對角矩陣）
- 則 A 的特徵值 = A 的主對角線元素。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

重要

範例4：上三角矩陣的特徵值

- 矩陣：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

(page. 267)

- 求解特徵值 λ=?

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44}) = 0$$

$$\lambda = a_{11}, \quad \lambda = a_{22}, \quad \lambda = a_{33}, \quad \lambda = a_{44}$$

重要

範例5：下三角矩陣的特徵值

- 矩陣：$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 5 & -8 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

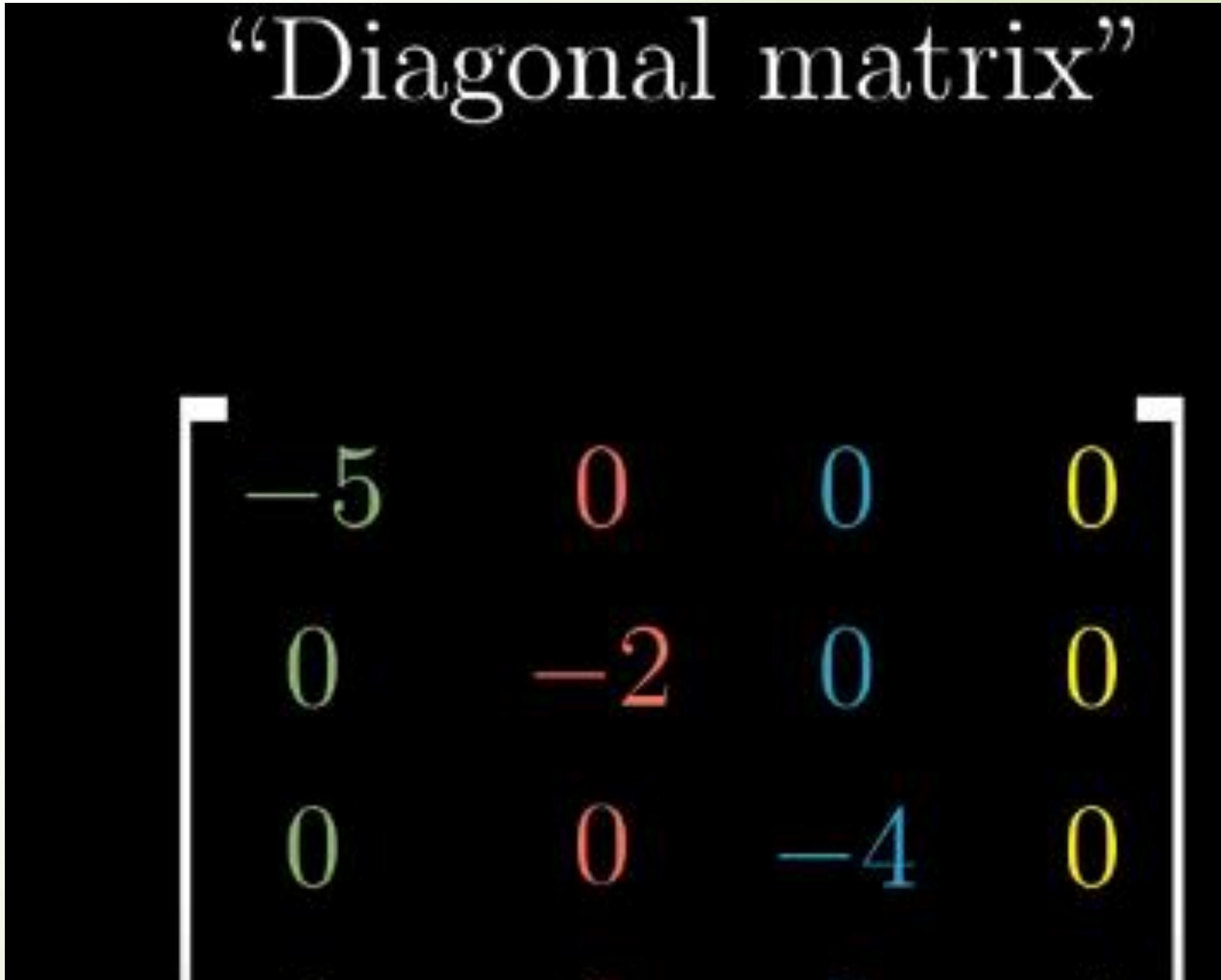
(page. 268)

- 求解特徵值 λ =?

$$\lambda = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{2}{3}, \lambda = -\frac{1}{4}。$$

結論：只要是座標轉換矩陣是對角線矩陣，每個值都是特徵值=縮放率

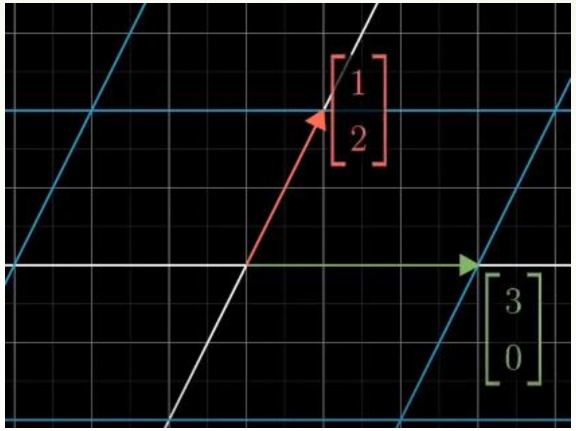
- 對角線矩陣：Diagonal Matri
- 特徵值=對角值=縮放率
- 特徵向量=原本的i,j,k軸.

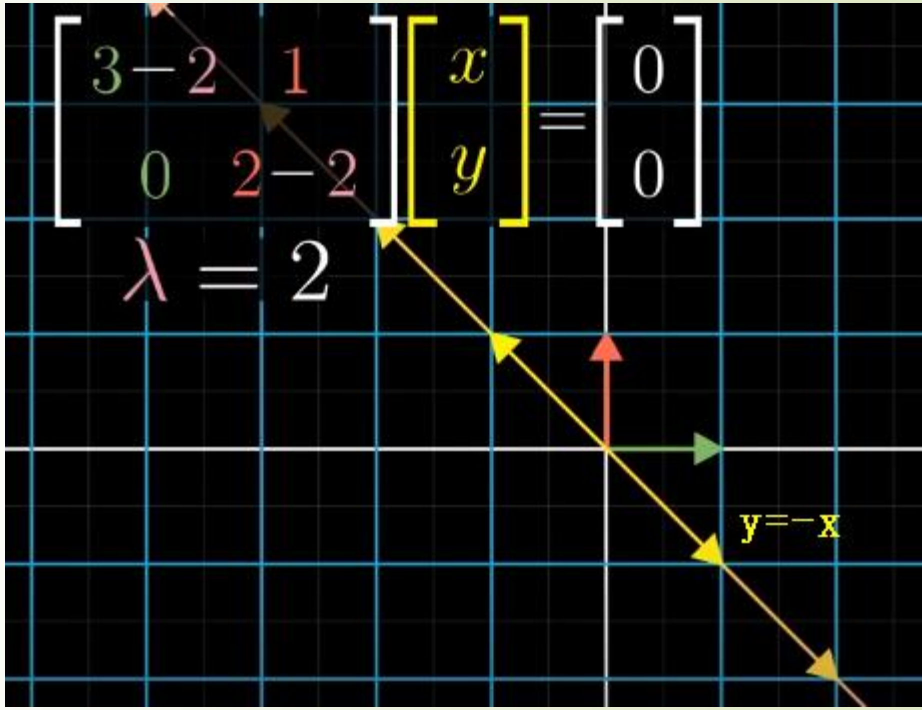


5. 特徵空間之基底（計算特徵向量）

範例1：求座標轉換矩陣$\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$的EigenVector，Eigenvalue

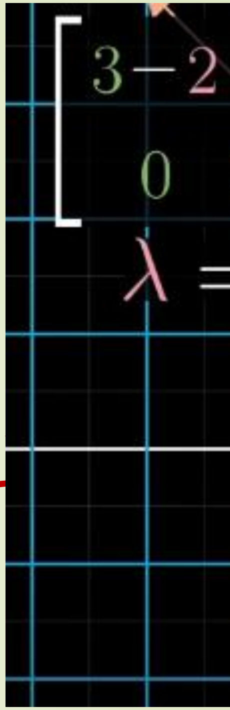
- $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
- 1. det(A−λI)=0
  - $\det\left(\begin{bmatrix}3-\lambda & 1\\0 & 2-\lambda\end{bmatrix}\right)=0$
  - $(2-\lambda)(3-\lambda)=0$
  - 所以 λ=2、或3





- 2. 若 λ=2，求$\vec{v}$ **EigenVector**
  - $\begin{bmatrix}3-\lambda & 1\\0 & 2-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-2 & 1\\0 & 2-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=0$
  - 這個聯立方程式解有無限多個，需滿足y=−x這條線，或是$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$向量上
  - 特徵向量 = $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

範例1：求座標轉換矩陣$\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$的EigenVector，Eigenvalue

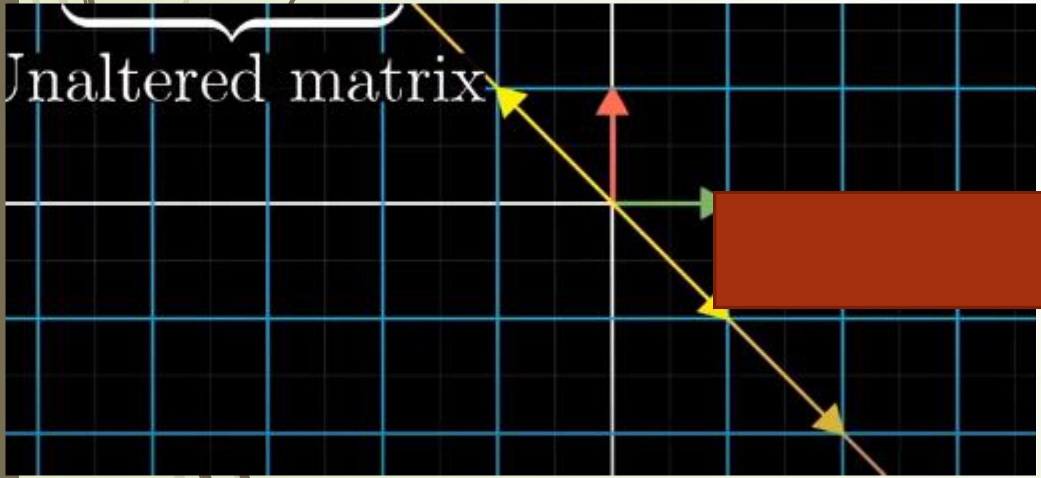


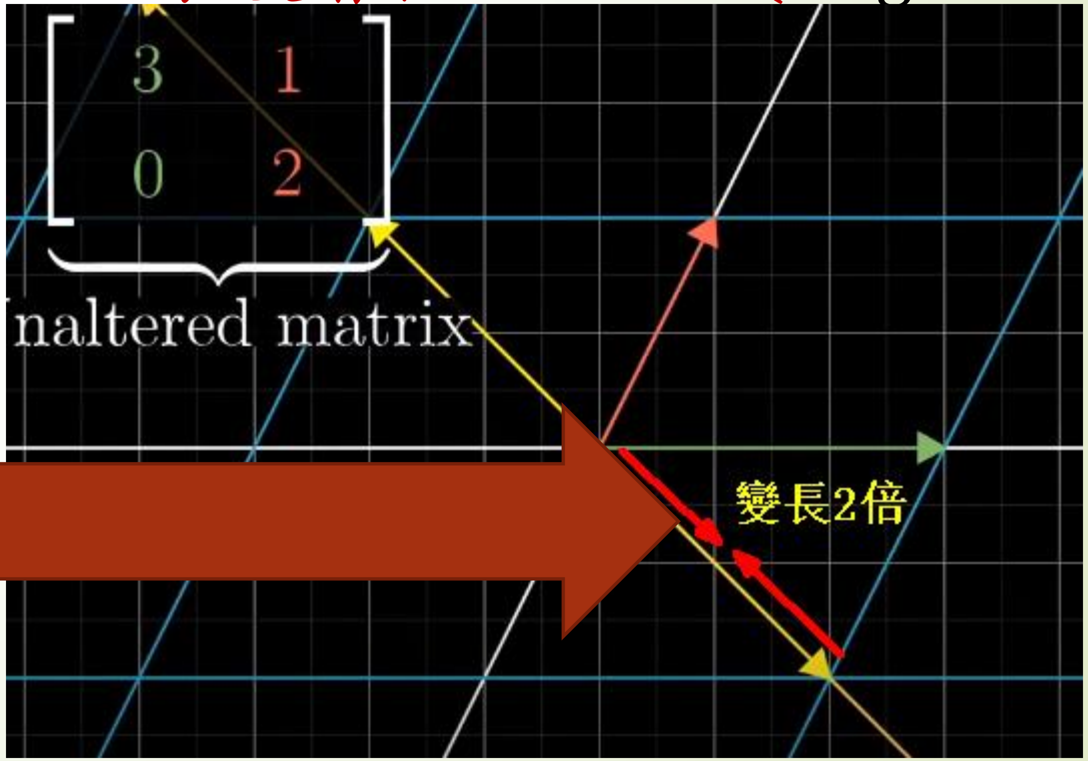
2. 若 λ=2，求$\vec{v}$ EigenVector

- $\begin{bmatrix}3-\lambda & 1\\ 0 & 2-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-2 & 1\\ 0 & 2-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=0$
- 這個聯立方程式解有無限多個，需滿足y=−x這條線，或是$\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$向量上
- 特徵向量 = $\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$，或y=−x
- 原本座標上位於y=−x這條線，或是$\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$向量的任何$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$，座標轉換後，最後都會轉換到$\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$直線上，而且長度會被放大2倍（Eigenvalue=2)
- 例如：原本座標上的$\begin{bmatrix}-3\\ 3\end{bmatrix}$，轉換後=$\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\ 6\end{bmatrix}$，放大2倍
- 例如：原本座標上的$\begin{bmatrix}2\\ \end{bmatrix}$，轉換後=$\begin{bmatrix}3 & 1\\ & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ \end{bmatrix}$，放大2倍

範例1：求座標轉換矩陣$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$的EigenVector，Eigenvalue

- 2. 若 λ=2，求$\vec{v}$ EigenVector
  - 原本座標上位於y=−x這條線，或是$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$向量的任何$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，座標轉換後，最後都會轉換到$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$直線上，而且長度會被放大2倍（Eigenvalue=2)





重要

範例6：特徵空間之基底

求下列矩陣之特徵空間的基底？ (page. 268)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

重要

範例6：特徵空間之基底

- 特徵方程式為 $(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$ （page. 268）
- 特徵值為 λ=3和 λ=-1
- 因此，A有兩個特徵空間
- 假設特徵向量= $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

特徵方程式：**Ax = λx=>** (λ*I*–*A*)x = 0

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

重要

範例6：特徵空間之基底

(page. 268)

- (1). 若 λ=3

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-0.5} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$
  - det(A)=0，無解或無限多解，
  - Rank(A)=1，表示降階，表示無限多組解
- 解出直線： $x_1 = \frac{1}{2}t, \quad x_2 = t$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- λ=3的特徵空間的基底 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

重要

範例6：特徵空間之基底

- (2). 若 λ=-1 (page. 268)

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 解出：$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - Rank(A)=1，表示降階，表示無限多組解
- -4x1+0x2=0，x1=0, x2=t
- $\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- λ=-1的特徵空間的基底

範例6:Python程式碼

```python
import numpy as np
A = np.array([
    [3,0],
    [8,-1]
    ])
eigval = np.linalg.eigvals(A)
eigvec = np.linalg.eig(A)
print('特徵值=', eigval)
print('特徵向量=', eigvec)
print('特徵值=', eigvec[0])
print('特徵向量=', eigvec[1])
print('第1個特徵值=', eigval[0],'第1個特徵向量=',eigvec[1][:,0])
print('第2個特徵值=', eigval[1],'第2個特徵向量=',eigvec[1][:,1]/eigvec[1][:,1][0])
```

```
特徵值= [-1.  3.]
特徵向量= (array([-1.,  3.]), array([[0.        , 0.4472136 ],
       [1.        , 0.89442719]]))
特徵值= [-1.  3.]
特徵向量= [[0.         0.4472136 ]
 [1.         0.89442719]]
第一個特徵值= -1.0 第一個特徵向量= [0. 1.]
第二個特徵值= 3.0 第一個特徵向量= [1. 2.]
```

範例7：特徵空間的特徵向量與基底

求下列矩陣之特徵空間的基底？（page. 269）

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

範例7：特徵空間的特徵向量與基底

- 特徵方程式為 $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$ (page. 269)
- 可因式分解為 $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$
- 特徵值 $\lambda=1$ 和 $\lambda=2$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

重要

範例7：特徵空間的特徵向量與基底

- $\lambda=2$ $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Rank(A)=1，表示降階，表示無限多組解

$x_1 = -s, \quad x_2 = t, \quad x_3 = s$

- 利用高斯－喬登消去法可解得

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

s　t

- 特徵向量：
- 特徵向量：$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(page. 269)

重要

範例7：特徵空間的特徵向量與基底

- $\lambda=1$ $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Rank(A)=2，表示降階，表示無限多組解

- $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ （$x_2=x_3$，$x_1=-2x_3$）
- 利用高斯－喬登消去法可解得 $x_1=-2s,\quad x_2=s,\quad x_3=s$
- 特徵向量： $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} -2s \\ s \\ s \end{bmatrix}=s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- 特徵向量： $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(page. 269)

範例7:Python程式碼

```
import numpy as np
A = np.array([
    [0,0,-2],
    [1,2,1],
    [1,0,3]
    ])
eigval = np.linalg.eigvals(A)
eigvec = np.linalg.eig(A)
print('特徵值=', eigval)
print('特徵向量=', eigvec)
print('特徵值=', eigvec[0])
print('特徵向量=', eigvec[1])
print('第1個特徵值=', eigval[0],'第1個特徵向量=',eigvec[1][:,0])
print('第2個特徵值=', eigval[1],'第2個特徵向量=',eigvec[1][:,1]/eigvec[1][:,1][0])
print('第3個特徵值=', eigval[2],'第3個特徵向量=',eigvec[1][:,2]/eigvec[1][:,2][0])
```

```
特徵值= [2. 1. 2.]
特徵向量= (array([2., 1., 2.]), array([[ 0.        , -0.81649658,  0.70710678],
       [ 1.        ,  0.40824829,  0.        ],
       [ 0.        ,  0.40824829, -0.70710678]]))
特徵值= [2. 1. 2.]
特徵向量= [[ 0.         -0.81649658  0.70710678]
 [ 1.          0.40824829  0.        ]
 [ 0.          0.40824829 -0.70710678]]
第1個特徵值= 2.0 第1個特徵向量= [0. 1. 0.]
第2個特徵值= 1.0 第2個特徵向量= [ 1.  -0.5 -0.5]
第3個特徵值= 2.0 第3個特徵向量= [ 1.  0. -1.]
```

6. 計算特徵結構

eigenstructure

範例8：求特徵結構

- **特徵結構**：將特徵值＋對應的特徵向量全部列出
- eigenstructure (page. 271)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

重要

範例8：求特徵結構

- 特徵方程式

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^3 = 0$$

- 解出，特徵值為λ=2（三重根）
- 將λ=2帶回(A-λI)x = 0，以高斯 喬登消去法化簡後得
- $$A-2I = \begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
- x2=0, x1=t, x3=s
- $$\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

(page. 271)

範例8：求特徵結構

- 於 λ=2的特徵向量可寫為 (page. 271)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

重要

- 特徵結構的數學表達法

$$\left\{ \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ t \end{bmatrix}, s, t \in R \right\} \Rightarrow \text{或} \left\{ s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, s, t \in R \right\}$$

範例8:Python程式碼

```python
import numpy as np
A = np.array([
    [2,1,0],
    [0,2,0],
    [0,0,2]
    ])
eigval = np.linalg.eigvals(A)
eigvec = np.linalg.eig(A)
print('特徵值=', eigval)
print('特徵向量=', eigvec)
print('特徵值=', eigvec[0])
print('特徵向量=', eigvec[1])
print('第1個特徵值=', eigval[0],'第1個特徵向量=',eigvec[1][:,0])
print('第2個特徵值=', eigval[1],'第2個特徵向量=',eigvec[1][:,1]/eigvec[1][:,1][0])
print('第3個特徵值=', eigval[2],'第2個特徵向量=',eigvec[1][:,2]/eigvec[1][:,1][0])
```

```
特徵值= [2. 2. 2.]
特徵向量= (array([2., 2., 2.]), array([[ 1.0000000e+00, -1.0000000e+00,
0.0000000e+00],
       [ 0.0000000e+00,  4.4408921e-16,  0.0000000e+00],
       [ 0.0000000e+00,  0.0000000e+00,  1.0000000e+00]]))
特徵值= [2. 2. 2.]
特徵向量= [[ 1.0000000e+00 -1.0000000e+00  0.0000000e+00]
 [ 0.0000000e+00  4.4408921e-16  0.0000000e+00]
 [ 0.0000000e+00  0.0000000e+00  1.0000000e+00]]
第1個特徵值= 2.0 第1個特徵向量= [1. 0. 0.]
第2個特徵值= 2.0 第2個特徵向量= [ 1.0000000e+00 -4.4408921e-16 -0.0000000e+00]
第3個特徵值= 2.0 第3個特徵向量= [0. 0. 1.]
```

重要

範例9：求特徵結構

- 特徵結構：將特徵值＋對應的特徵向量全部列出
- Eigenstructure (page. 272)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

重要

範例9：求特徵結構(page. 272)

- 特徵方程式 →

$$|A-\lambda I_n| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

- 將第2列×-1＋第1列去，可得 →

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

- 再將第1行加到第2行去

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 9-\lambda & 2 \\ 2 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

- **行列式**=(1-λ）(9-λ）(2-λ)-8(1-λ）=(1-λ)((9-λ）(2-λ)-8)
- =(1-λ)(18-11λ+λ²-8) =(1-λ)(λ²-11λ+10) <u>=(1-λ)(λ-10)(λ-1)</u>

→ $$(1-\lambda)[(9-\lambda)(2-\lambda)-8] = (1-\lambda)(\lambda-10)(\lambda-1) = 0$$

$\lambda = 10$（二重根）或 $\lambda = 1$

範例9：求特徵結構(page. 272)

重要

- 當 $\lambda=10$時，$(A-\lambda I)x=0$的係數矩陣以高斯喬登消去法化簡

$$A-10I=\begin{bmatrix}5-10 & 4 & 2\\ 4 & 5-10 & 2\\ 2 & 2 & 2-10\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-5 & 4 & 2\\ 4 & -5 & 2\\ 2 & 2 & -8\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

- $\begin{bmatrix}-5 & 4 & 2\\ 4 & -5 & 2\\ 2 & 2 & -8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 4 & 2\\ 4 & -5 & 2\\ 1 & 1 & -4\end{bmatrix}=$

$\begin{bmatrix}5 & -4 & -2\\ 4 & -5 & 2\\ 1 & 1 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -4 & -2\\ 0 & -9 & 18\\ 1 & 1 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -4 & -2\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -9 & 18\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -4\end{bmatrix}$

- $=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

- 無限多組解，$x_1=2x_3$, $x_2=2x_3$，

重要

範例9：求特徵結構(page. 272)

- 當 λ=10時，(A- λ I)x=0的係數矩陣以高斯喬登消去法化簡
- $$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & -2\\1 & 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ $$\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

  Rank(A)=2，表示降階，表示無限多組解

- 無限多組解，$x_1=2x_3$, $x_2=2x_3$，
- 特徵向量的數學表達法

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}, r\neq 0, r\in R$$

重要

範例9：求特徵結構(page. 273)

- 當 λ=1時，(A-λI)x=0的係數矩陣以高斯喬登消去法化簡

$$A-1I=\begin{bmatrix}5-1 & 4 & 2\\ 4 & 5-1 & 2\\ 2 & 2 & 2-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}4 & 4 & 2\\ 4 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

- $\begin{bmatrix}4 & 4 & 2\\ 4 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$ Rank(A)=2，表示降階，表示無限多組解
- X1=-x2-x3/2
- 特徵向量 $=\begin{bmatrix}x1\\ x2\\ x3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-t-s/2\\ t\\ s\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-1/2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+2s\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$

範例9：求特徵結構(page. 273)

- 當 λ=1
- 特徵向量$=\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -t-s/2 \\ t \\ s \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+s\begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $=t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+2s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ 2t \end{bmatrix}=s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},\ (s^2+t^2)\neq 0,\ s,t\in R$$

範例9：求特徵結構(page. 273)

- 當 λ=1　，X3=-2x1-2x2
- 特徵向量$=\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t \\ s \\ -2t-2s \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}+s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t \\ s \\ -2s-2t \end{bmatrix}=s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix},\ (s^2+t^2)\neq 0,\ s,t\in R$$

範例9:Python程式碼

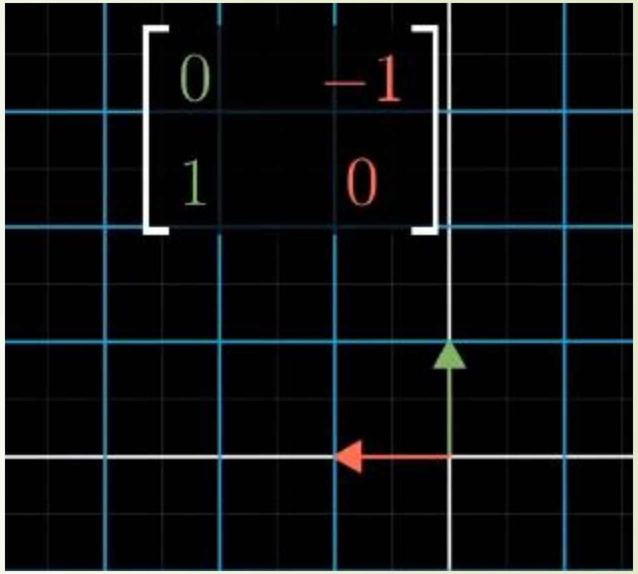
```python
import numpy as np
A = np.array([
      [5,4,2],
      [4,5,2],
      [2,2,2]
    ])
eigval = np.linalg.eigvals(A)
eigvec = np.linalg.eig(A)
print('特徵值=', eigval)
print('特徵向量=', eigvec)
print('特徵值=', eigvec[0])
print('特徵向量=', eigvec[1])
print('第1個特徵值=', eigval[0],'第1個特徵向量=',eigvec[1][:,0])
print('第2個特徵值=', eigval[1],'第2個特徵向量=',eigvec[1][:,1]/eigvec[1][:,1][0])
print('第3個特徵值=', eigval[2],'第3個特徵向量=',eigvec[1][:,2]/eigvec[1][:,1][0])
```

```
特徵值= [ 1. 10.  1.]
特徵向量= [[-0.74535599  0.66666667  0.        ]
 [ 0.59628479  0.66666667 -0.4472136 ]
 [ 0.2981424   0.33333333  0.89442719]]
第1個特徵值= 1.0 第1個特徵向量= [ 1.  -0.8 -0.4]
第2個特徵值= 10.0 第2個特徵向量= [1.  1.  0.5]
第3個特徵值= 0.9999999999999999 第3個特徵向量= [-0.  1. -2.]
```

7. 有些轉換矩陣沒有特徵向量

7.有些轉換矩陣沒有特徵向量

- 1.例如：座標逆時針旋轉90度，$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

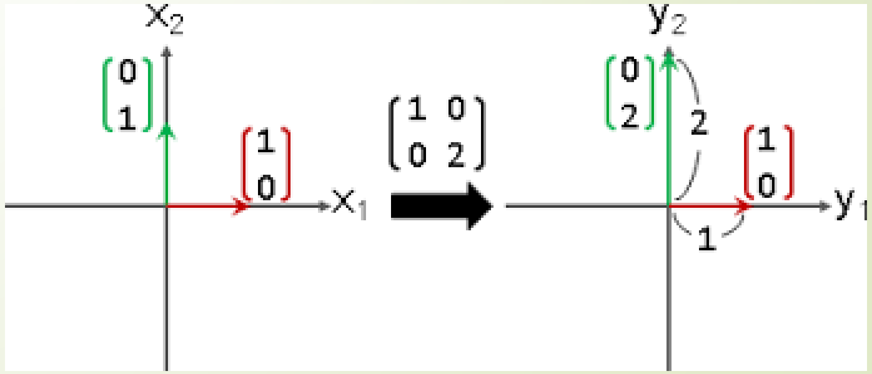


- $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$
- det($A - \lambda I$)=0
- det($\begin{bmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 1 & 0-\lambda \end{bmatrix}$)=0
- $\lambda^2+1 = 0$
- λ=虛數$i, -i$

8. 計算特徵向量的好處

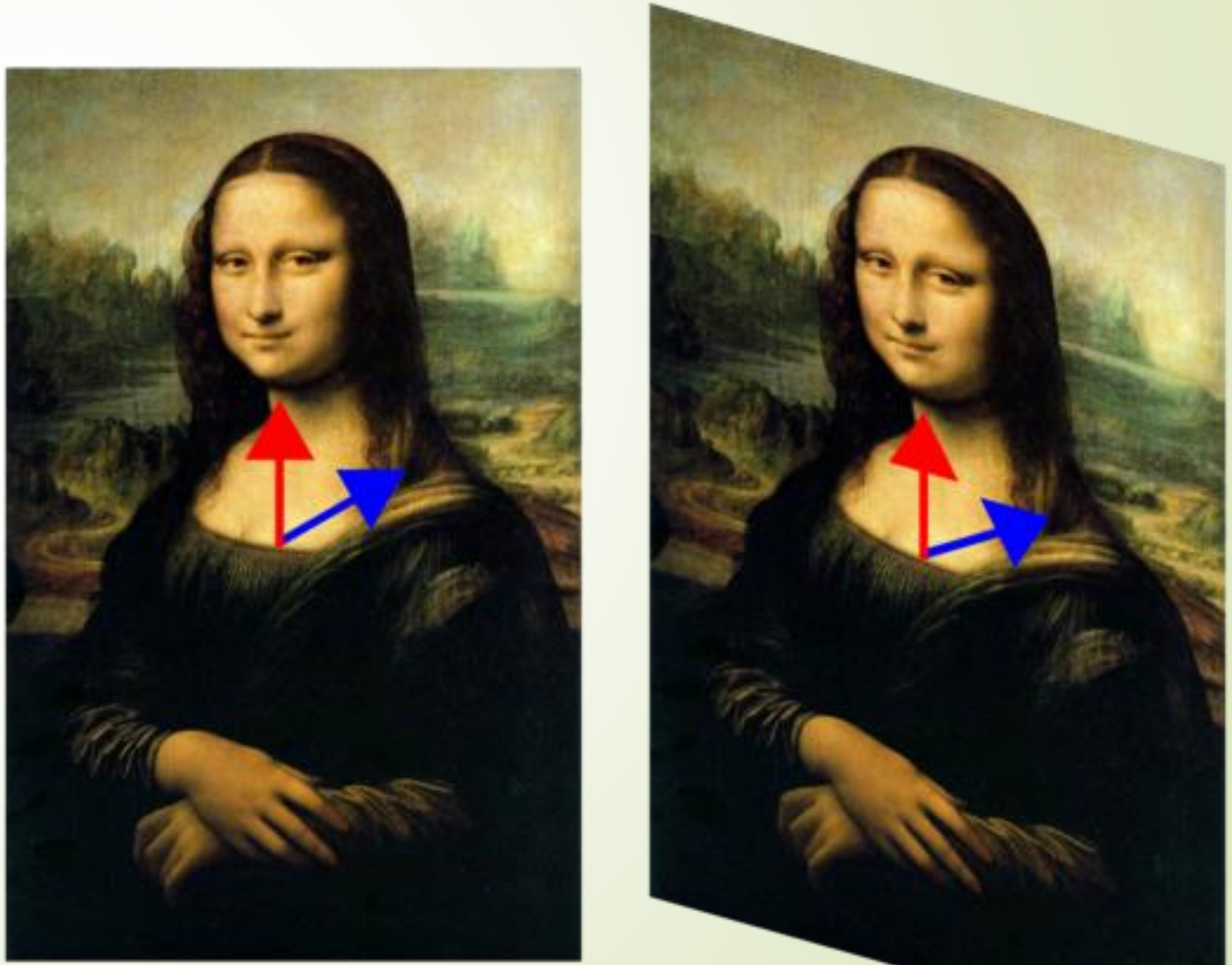
為什麼要學特徵向量

- 問題：兩個坐標系統的轉換，該選擇什麼基底向量呢？有沒有比較容易計算的基底向量呢？
- 方法：
  - 先找到一組基底（即特徵基底），
  - 使得該線性變換在這組基底下，只是原坐標軸方向上的伸縮變換(乘以一個純量 λ)
  - 但不同軸上的伸縮比例不同（ λ
  - $Ax = \lambda x$



為什麼要學特徵向量

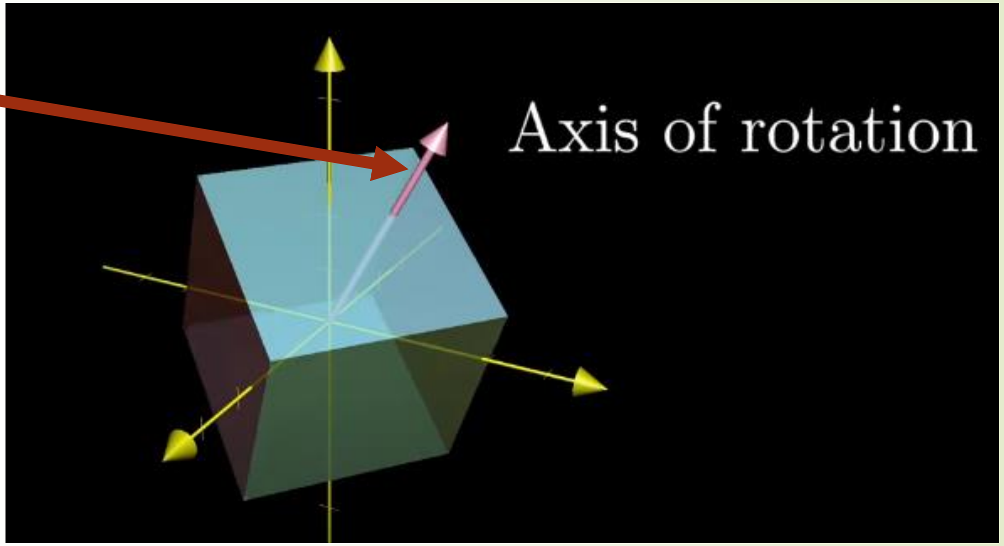
- 結果：
- 兩個坐標系統的基底向量基本雷同，只是比例不同
- 新坐標，只是舊坐標軸方向上的伸縮變換（乘以一個純量 λ）
- $Ax = \lambda x$



2.特徵向量的用途(1)

- (1).因為，特徵向量在變形轉換後，方向不會變
  - 可以當作3D旋轉的『旋轉軸』
  - 特徵向量Eigenvectors

  = axis of rotation
  - rotate 30 around $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$



- (2).**優點：清楚簡單表達**：
  - 例如**旋轉軸=特徵向量=rotate 30 around** $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ → Rotate $30°$ around $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$
  - 若用傳統矩陣表示旋轉軸很複雜 →

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) & -\sin(\phi) & \cos(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\cos(\phi) & \cos(\theta) & \sin(\theta)\sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

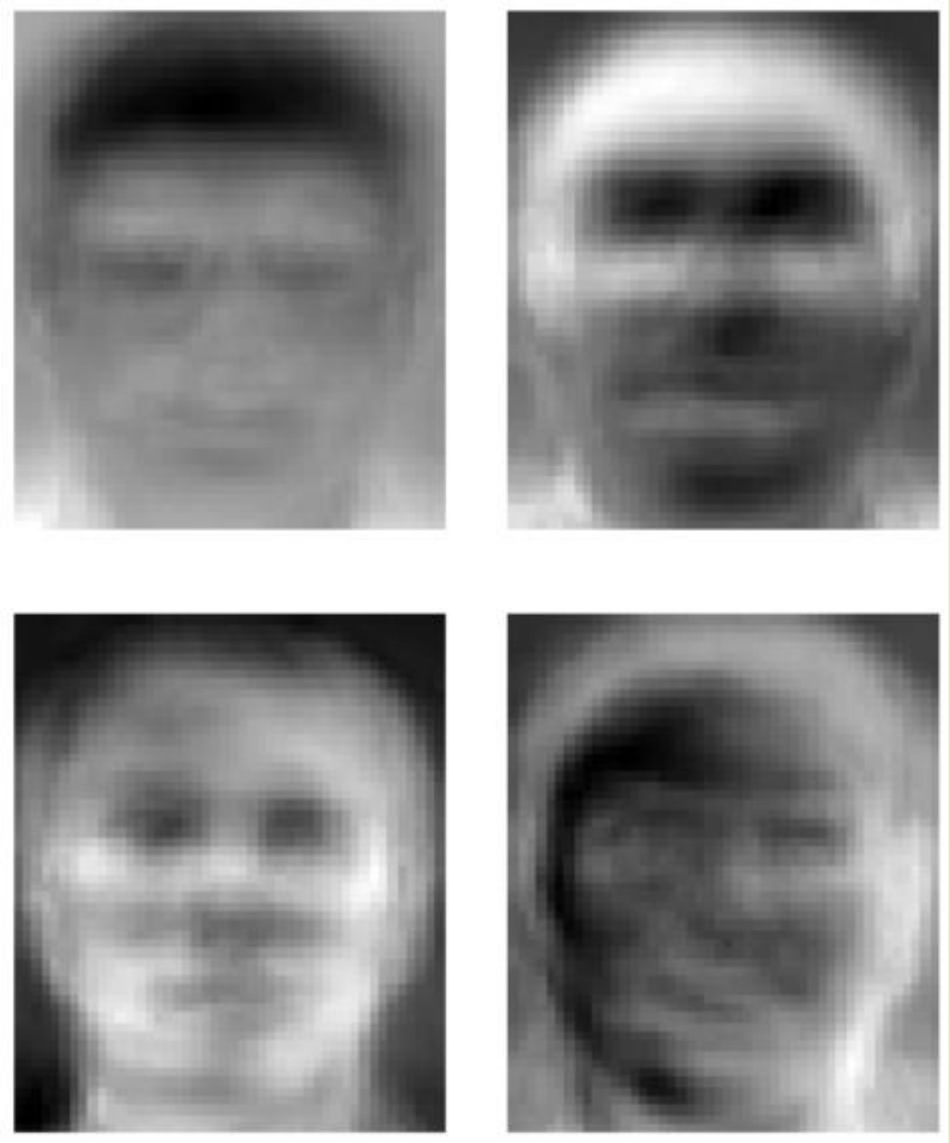
3. 特徵向量的用途(2)

- (1). 座標轉換的方式，
  - 最常用的方法：找出特徵向量，當作基底向量
  - 不是用之前我們隨意選擇的向量變換

- (2). 優點：
  - 1. 特徵向量不會被變形
  - 2. 特徵值矩陣，只出現在對角線，計算會變得很簡單

特徵向量應用1：圖形辨識：特徵臉

- 臉部圖像的處理可以看作：為每個像素的灰度的向量。
- 該向量空間的維數是像素的個數。
- 特徵臉：一個部圖形矩陣的特徵向量
- 好處：可以把面部圖像，用特徵向量（特徵臉）的線性組合來表達。
- 用途：特徵臉可用於人臉辨識的數據壓縮的方式。
- 在這個應用中，一般只取那些最大特徵值所對應的特徵臉



9. 把矩陣對角化

方法：$P^{-1}AP$=特徵值在對角線的矩陣

P就是特徵向量矩陣

對角線矩陣的應用優點：方便計算矩陣n次方

- 對角線矩陣：Diagonal Matrices

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^3 x \\ 2^3 y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3^4 x \\ 2^4 y \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdots\cdots \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{100 \text{ times}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

一般矩陣的n次方很難計算

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdots\cdots \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{100 \text{ times}}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

把矩陣對角化的重要性

- **有些矩陣，可以被對角化的方法**
- **範例：**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{P-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **對角化**是找到可對角化矩陣或映射的相應對角矩陣的過程。

如何把矩陣對角化：$P^{-1}AP$

- 矩陣A，可以被對角化的方法 (page. 277)
- 方法：$P^{-1}AP =$ 特徵值在對角線的矩陣
  - 其中P是A的特徵向量所組成的價值
- 範例：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{P-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 21 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{\text{A}} \boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{P}}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

範例1 求可將矩陣 A 對角化的矩陣 P

- 矩陣A，可以被對角化的方法 (page.277)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- (1). 方法：$P^{-1}AP$ = 特徵值在對角線的矩陣
  - 其中P是A的特徵向量所組成的價值
- (2). 先求A的特徵值 $\begin{bmatrix} 0-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$
- $=-\lambda(2-\lambda)(3-\lambda)+2(2-\lambda)=(2-\lambda)(-\lambda(3-\lambda)+2)=(2-\lambda)(\lambda 2-3\lambda+2)$
- $=-(\lambda-2)(\lambda-2)\ (\lambda-1)=0$, 解出特徵值：$\lambda=2$，$\lambda=1$

範例 1 求可將矩陣 A 對角化的矩陣 P

- =−λ(2−λ)(3−λ)+2(2−λ)=(2−λ)(−λ(3−λ)+2)=(2−λ)(λ2−3λ+2)
- =−(λ−2)(λ−2) (λ−1)=0, **解出特徵值：λ=2，λ=1**
- (1). λ=2的特徵值：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- $\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- x1=−x3, x2
- 特徵向量=$\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ s \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\lambda = 2: \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

範例1 求可將矩陣 A 對角化的矩陣 P

- $=-\lambda(2-\lambda)(3-\lambda)+2(2-\lambda)=(2-\lambda)(-\lambda(3-\lambda)+2)=(2-\lambda)(\lambda 2-3\lambda+2)$
- $=-(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-1)=0$, **解出特徵值：$\lambda=2$，$\lambda=1$**
- (2). $\lambda=1$的特徵值：
- $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 1 & 0 & 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- $x1=-2x3$, $x2=x3$
- 特徵向量$=\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\lambda = 1: \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

範例 1 求可將矩陣 A 對角化的矩陣 P

- 解出特徵值：λ=2，λ=1
- 解出特徵向量：

$$P=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (3). 求p的反矩陣：
- $=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ =公式： $P^{-1}=\dfrac{\text{伴隨矩陣}}{det(A)}=\dfrac{\text{餘因子矩陣的轉置矩陣}}{det(A)}$
- Det(A)=-1+2=1
- 餘因子矩陣$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$（注意正負號）
- 伴隨矩陣$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}=P^{-1}$

範例 1 求可將矩陣 A 對角化的矩陣 P

- 解出特徵值：λ=2，λ=1
- 解出特徵向量：

$$P=\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}-1\\0\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-2\\1\\1\end{matrix}}\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{bmatrix}$$

- (3). 求p的反矩陣= $\begin{bmatrix}1&0&2\\1&1&1\\-1&0&-1\end{bmatrix}$ = P^{-1}
- (4). $P^{-1}AP$ = 特徵值在對角線的矩陣
- $\begin{bmatrix}1&0&2\\1&1&1\\-1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&-2\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，對角線矩陣
- 所以，P就是特徵向量矩陣

範例2：無法對角化的矩陣

- 證明A無法被對角化 （page. 281）

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

範例2：無法對角化的矩陣

- 特徵多項式　　（page. 281）

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ 3 & -5 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

- 特徵方程式

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

特徵值 $\lambda = 1$ 和 $\lambda = 2$

範例2：無法對角化的矩陣

- 特徵空間 （page. 281）

$$\lambda = 1: \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \lambda = 2: \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- A為3x3矩陣，卻只有2個基底向量

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

- 所以，A無法被對角化

10. 把矩陣對角化的物理意義

$A^{-1}MA$：視角轉換＋動作轉換

把矩陣對角化的物理意義

$A^{-1}MA$：視角轉換＋動作轉換

題目：$\Longrightarrow$ $A=\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}$，求特徵空間的 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，被變形後的坐標？

1. 分析，對角化公式 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{bmatrix}$

① 範例：

$$\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}$$

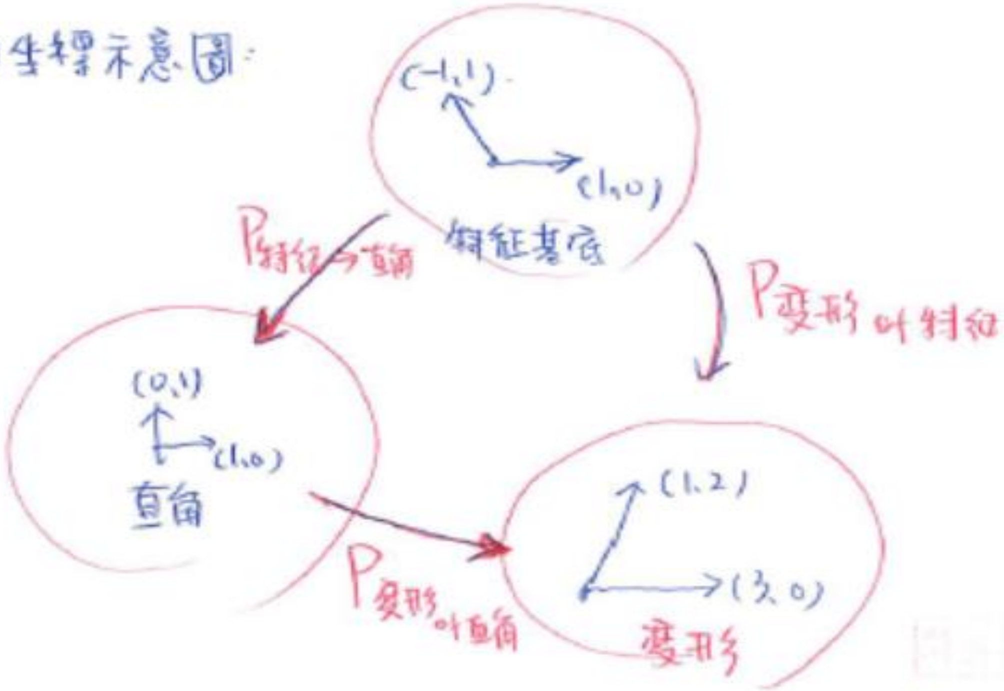
$(\lambda=3,\ 2)$
特徵基底 $=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\}$

② 解析物理意義：這是三個坐標轉換（2個基底轉換，一個變形轉換）

說：線性轉換有2種
① 基底轉換
② 變形轉換

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}}_{\text{直角}\to\text{特徵}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}}_{\text{變形}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}}_{\text{特徵}\to\text{直角}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}_{\text{特徵基底}}=\underbrace{\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}}_{\text{變形}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}_{\text{特徵基}}$$

③ 三個坐標示意圖:



左邊

④ 三個坐標系統關係式:

(A) $V_{直角} \xleftarrow{P_{特徵\to直角}} V_{特徵}$, $V_{直角} = P_{特徵\to直角} \cdot V_{特徵}$

$= \left[\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1&-1\\0&1\end{matrix}\right]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

(B) $V_{直角} \xrightarrow{\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix} 變形} V_{變形時直角}$. $V_{變形時直角} = P_{變形} \cdot V_{直角}$

$= \begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$

(C) $V_{變形時特徵}$ —— $V_{變形時直角}$. $V_{變形時特徵} = P_{直角\to特徵} \cdot V_{直角時變形}$

$= \left(\begin{matrix}1&-1\\0&1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\right) \cdot \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$

$= \left[\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\bullet&\bullet\\\bullet&\bullet\end{matrix}\right] \cdot \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$

⑤ 右邊坐標系統關係式：

$$V_{\text{特征}} \xrightarrow{\text{變形}} V_{\text{特征的變形}}$$

$$V_{\text{特征的變形}} = P_{\text{變形}} \cdot V_{\text{特征}}$$

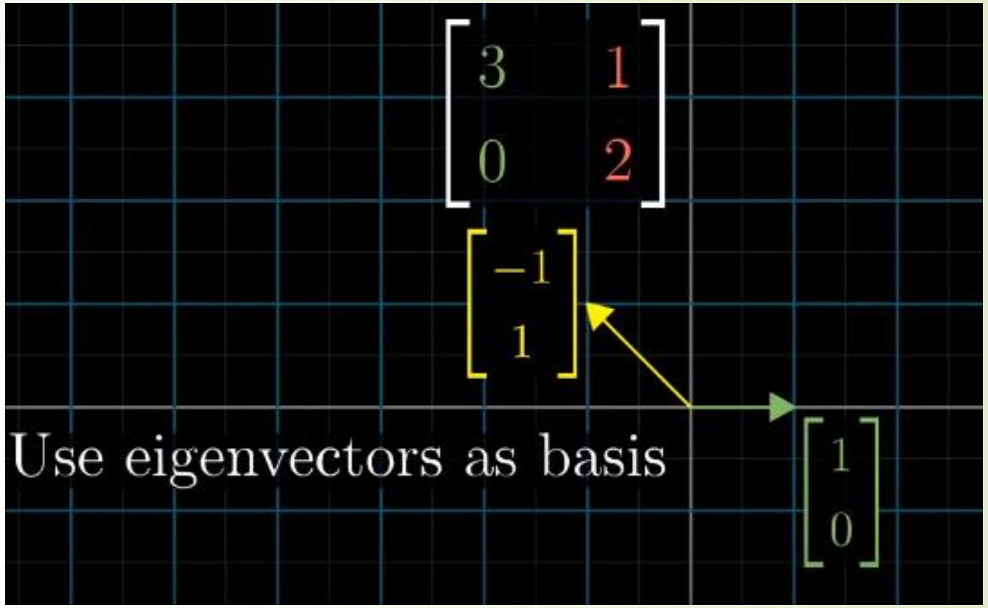
$$= \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}$$

⑥ 故

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}_{\text{直角}\to\text{特征}} \cdot \begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}_{\text{變形}} \cdot \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{\text{特征}\to\text{直角}} \cdot \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}_{\text{特征}} = \begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}_{\text{變形}} \cdot \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}_{\text{特征}}$$

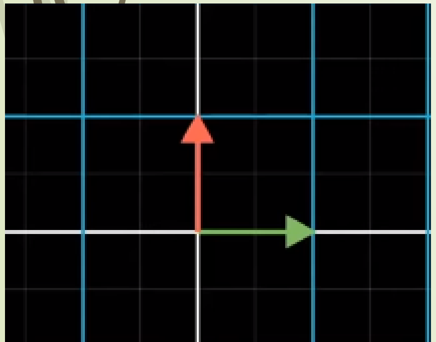
範例2：選擇特徵向量當作基底eigenBasis

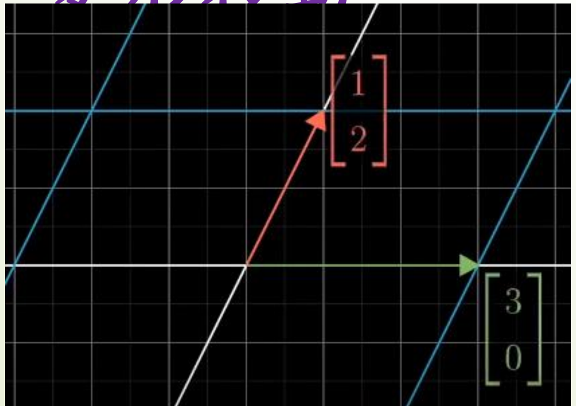


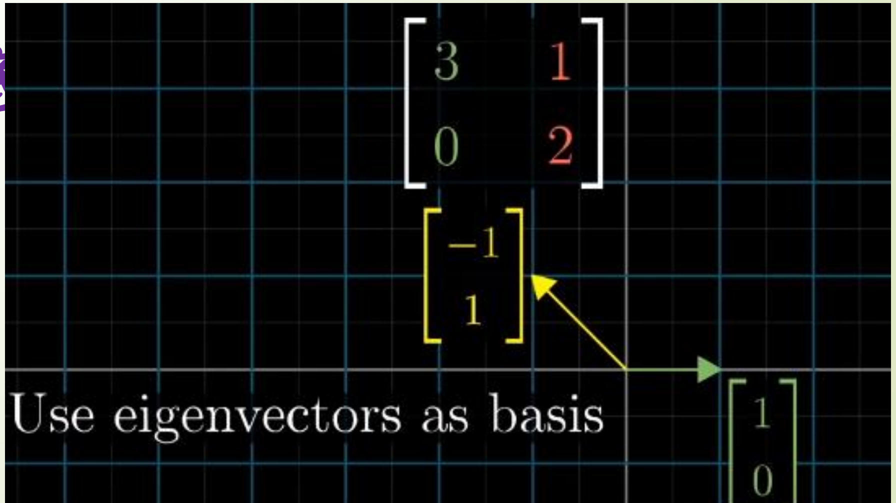
- 1. 例如：座標轉換矩陣，A=$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
- 3. 證明：$A\vec{v}=\lambda\vec{v}$，det(A- λ I)=0
  - det($\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$)=0
  - $(3-\lambda)(2-\lambda)=0$
  - λ=3，2
- 4. $(A-\lambda I)\vec{v}=\begin{bmatrix} 3-3 & 1 \\ 0 & 2-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=0$
  - y=0 （特徵向量就是x軸$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，放大3倍）
- 5. $(A-\lambda I)\vec{v}=\begin{bmatrix} 3-2 & 1 \\ 0 & 2-\mathbf{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=0$
  - y=-x （特徵向量就是$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，放大2倍）

範例2：特徵基底$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$座標系統的$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，被A矩陣變形後的座標?

- (接續)：座標轉換矩陣，$A=\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}$
- 6. 兩個特徵向量當作基底向量$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$
- 7. 範例2，在特徵基底座標為$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$的位置，是直角坐標的什麼$\begin{bmatrix}?\\?\end{bmatrix}$
- 根據$A^{-1}MA=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{E基底}$
- 這裡面有三個座標系統的轉換
- 直角基底　　變形移動　　特徵基底

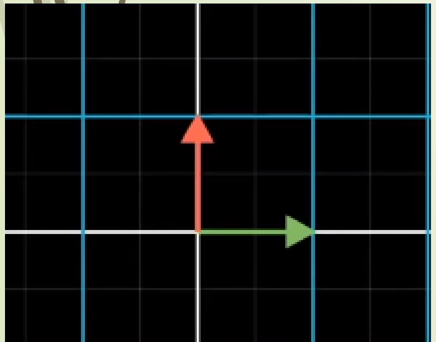


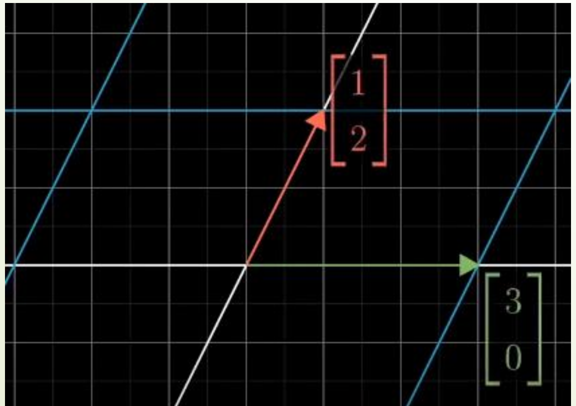


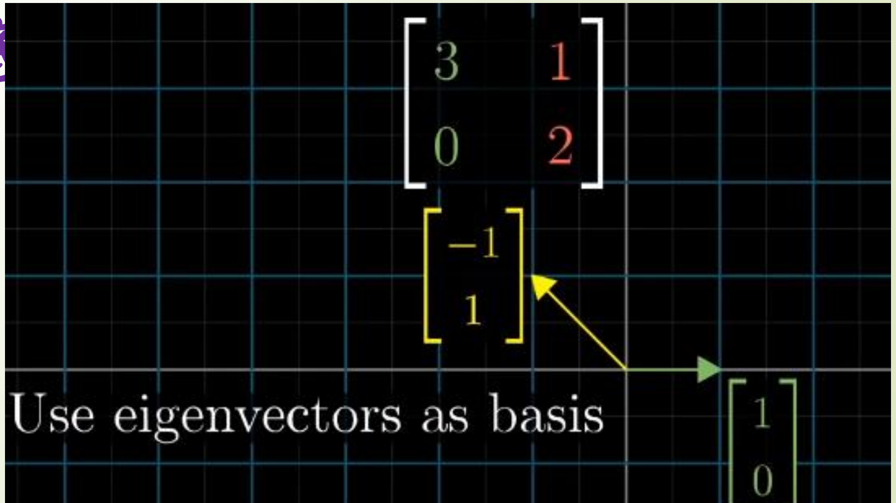


14. 範例2：特徵基底$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$座標系統的$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，被A矩陣變形後的座標?

- (接續)：座標轉換矩陣，A=$\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$
- 6. 兩個特徵向量當作基底向量$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$
- 根據$A^{-1}MA=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}_{S基底}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{E基底}$
- 這裡面有三個座標系統的轉換
- 其中的兩個視角轉換是：直角視角座標，特徵基底視角座標
- 直角基底　　變形移動　　特徵基底

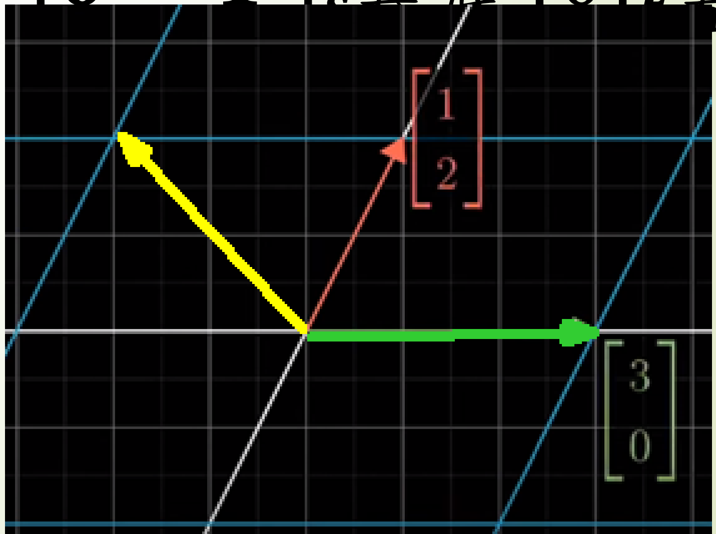




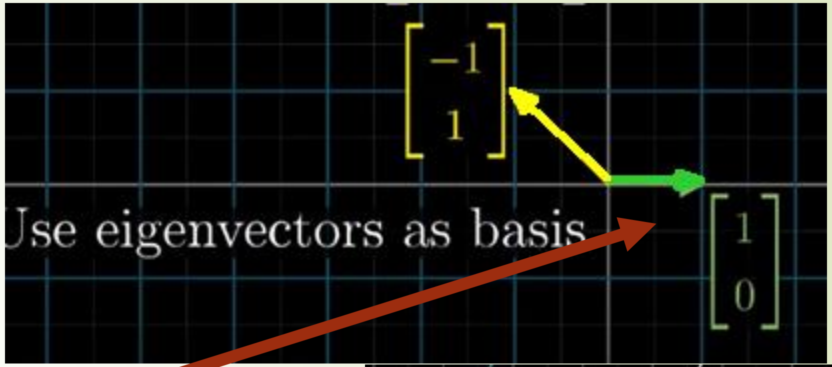


14. 範例2：特徵基底$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$座標系統的$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，被A矩陣變形後的座標?

- (接續)：座標轉換矩陣，A=$\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}$，特徵基底底$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$
- 根據$A^{-1}MA=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{E基底}$
- (1). 先計算逆矩陣：$\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}_{E基底}/(1)=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}_{E基底}$
- (2). $A^{-1}MA=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}_{E基底}\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{E基底}$
- $=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}_{E基底}\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{s基底}$
- $=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}_{E基底}\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}_{s基底}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}_{E基底}$
- 所以特徵基底的$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$被A矩陣變形後的座標$\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$

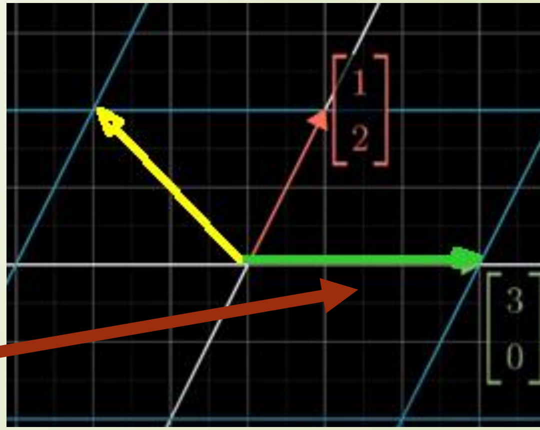


14. 範例2：特徵基底$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$座標系統的$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，被A矩陣變形後的座標?



- (接續)：座標轉換矩陣，$A=\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}$
- 6. 兩個特徵向量當作基底向量$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$
- 根據$A^{-1}MA=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{E基底}$
- (1). $\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{E基底}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{s基底}$ 特徵向量就是直角座標的x軸

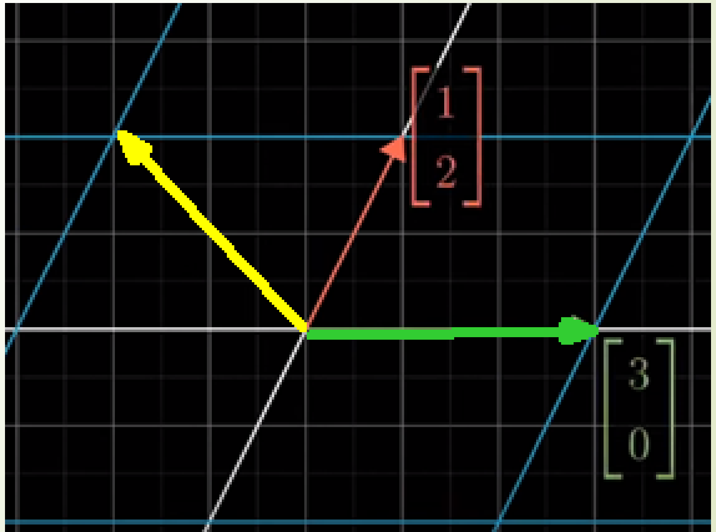
- (2). $\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{E基底}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}_{s基底}$ 特徵向量被A矩陣變形後的直角座標的視角位置
- (3). $\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{E基底}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}_{E基底}$



特徵向量被變形後在特徵基底視角的位置

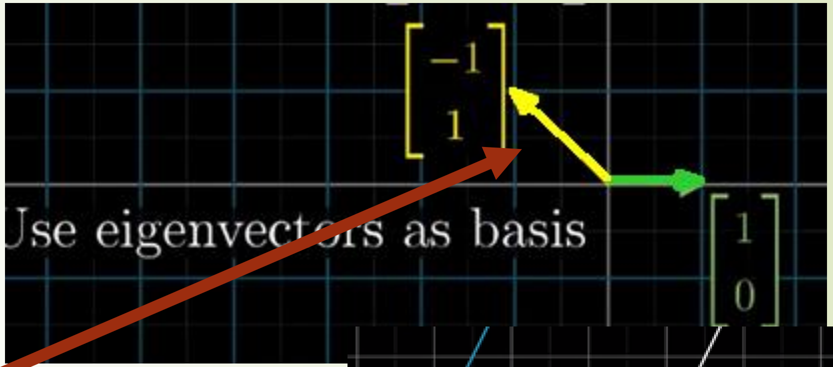
15. 範例3：特徵基底$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$座標系統的$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，被A矩陣變形後的座標

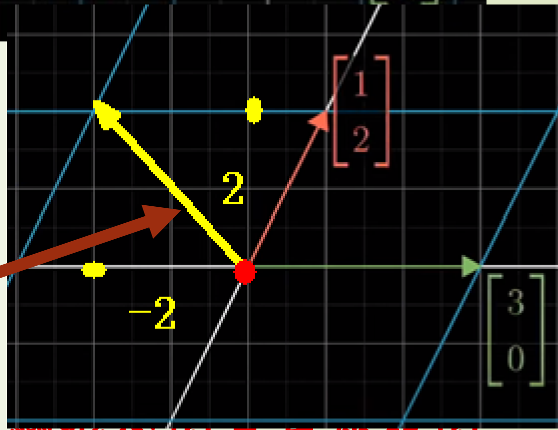
- (接續)：座標轉換矩陣，A=$\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}$，特徵基底底$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$
- 根據$A^{-1}MA=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{E基底}$
- (1). 先計算逆矩陣：$\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}_{S基底}/(1)=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}_{S基底}$
- (2). $A^{-1}MA=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}_{E基底}\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{E基底}$
- $=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}_{S基底}\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}_{s基底}$
- $=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}_{S基底}\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}_{s基底}=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}_{S基底}$
- 所以特徵基底的$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$被A矩陣變形後的座標$\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$

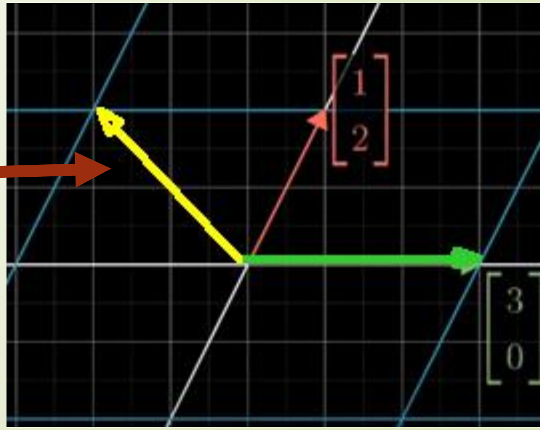


14. 範例2：特徵基底$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$座標系統的$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，被A矩陣變形後的座標

- (接續)：座標轉換矩陣，$A=\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}$
- 6. 特徵向量當作基底向量$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$
- 根據$A^{-1}MA=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{E基底}$
- (1). $\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{E基底}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}_{s基底}$ 特徵向量就是直角座標的y=-x
- (2). $\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{E基底}=\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}_{s基底}$ 特徵向量被A矩陣變形後的直角座標的視角位置
- (3). $\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{E基底}=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}_{S基底}$







特徵向量被變形後在特徵基底視角的位置

16. 特徵基底$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$的$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$座標，被A矩陣變形後的座標= $A^{-1}MA$=特徵值對角矩陣

- (1). 根據$A^{-1}MA=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}_{s基底}$

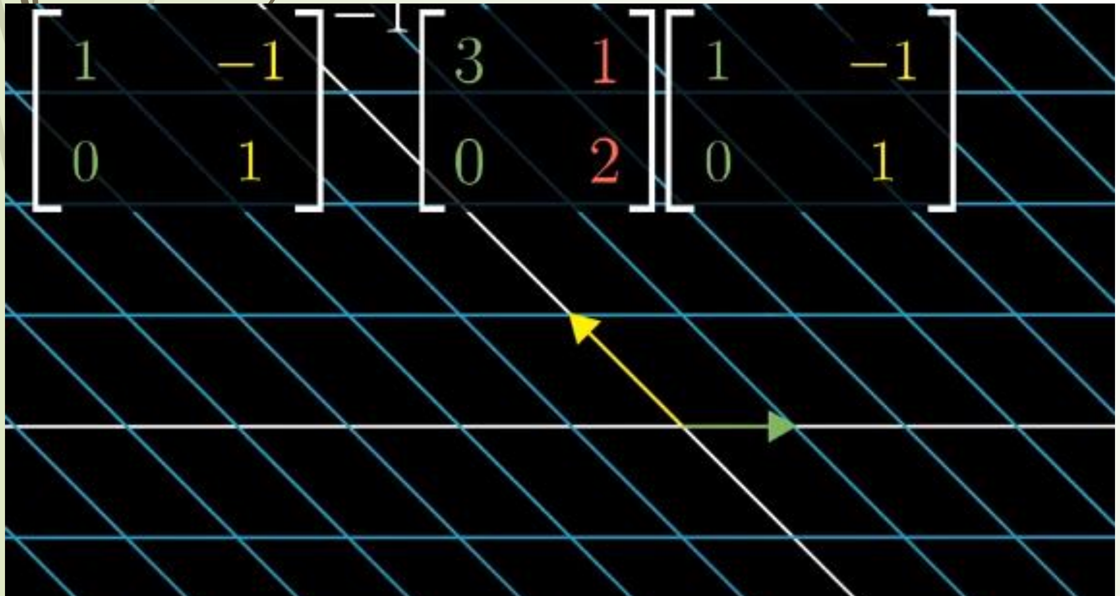
$$=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}\begin{bmatrix}3 & -2\\0 & 2\end{bmatrix}_{Smove}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}_{S基底}\begin{bmatrix}3 & -2\\0 & 2\end{bmatrix}_{Smove}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}_{S基底}=\begin{bmatrix}\lambda 1 & 0\\0 & \lambda 2\end{bmatrix}_{S基底}\quad（\lambda=3，2）$$

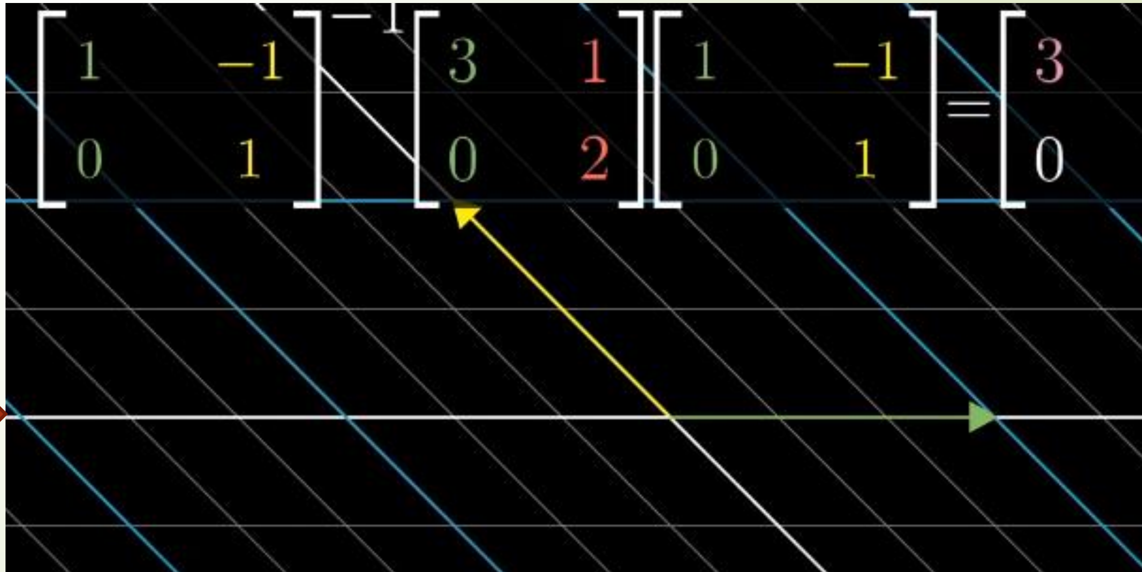
- (2). 所以以後若要有特徵基底座標，轉換成直角座標，不要再用$A^{-1}MA$
- (3). $A^{-1}MA$ = $=\begin{bmatrix}\lambda 1 & 0\\0 & \lambda 2\end{bmatrix}_{S基底}$
- (4). 結論：特徵基底轉換矩陣直接用$\begin{bmatrix}\lambda 1 & 0\\0 & \lambda 2\end{bmatrix}_{S基底}$

17. 結論：特徵基底被A矩陣變形後座標=直接用$\begin{bmatrix} \lambda 1 & 0 \\ 0 & \lambda 2 \end{bmatrix}_{s基底}$

- **特徵基底**
- 被A矩陣變形後座標
- =直接用$\begin{bmatrix} \lambda 1 & 0 \\ 0 & \lambda 2 \end{bmatrix}_{s基底}$



被A矩陣變形



11. 計算矩陣的次冪

$$A^{1000}$$

計算矩陣的次冪

- 假設A為可對角化的$n \times n$矩陣，則存在矩陣P可將A對角化，使得(page. 282)

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = D$$

$$(P^{-1}AP)^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} = D^2$$

$$(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}AIAP = P^{-1}A^2P$$

範例 5：矩陣的次冪

- 計算 A^3 (page. 282)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

範例 5：矩陣的次冪

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- 計算 A^3 (page. 282)
- 使用公式

$$A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1} \qquad (3)$$

在範例 1 中已知矩陣 A 可被矩陣

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

範例 5：矩陣的次冪

- 計算 A^3 (page. 282)
- 使用公式

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1} \qquad (3)$$

在範例 1 中已知矩陣 A 可被矩陣

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

範例 5：矩陣的次冪

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- 計算 A^3 (page. 282)
- 使用公式：

$$A^3 = PD^3P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$