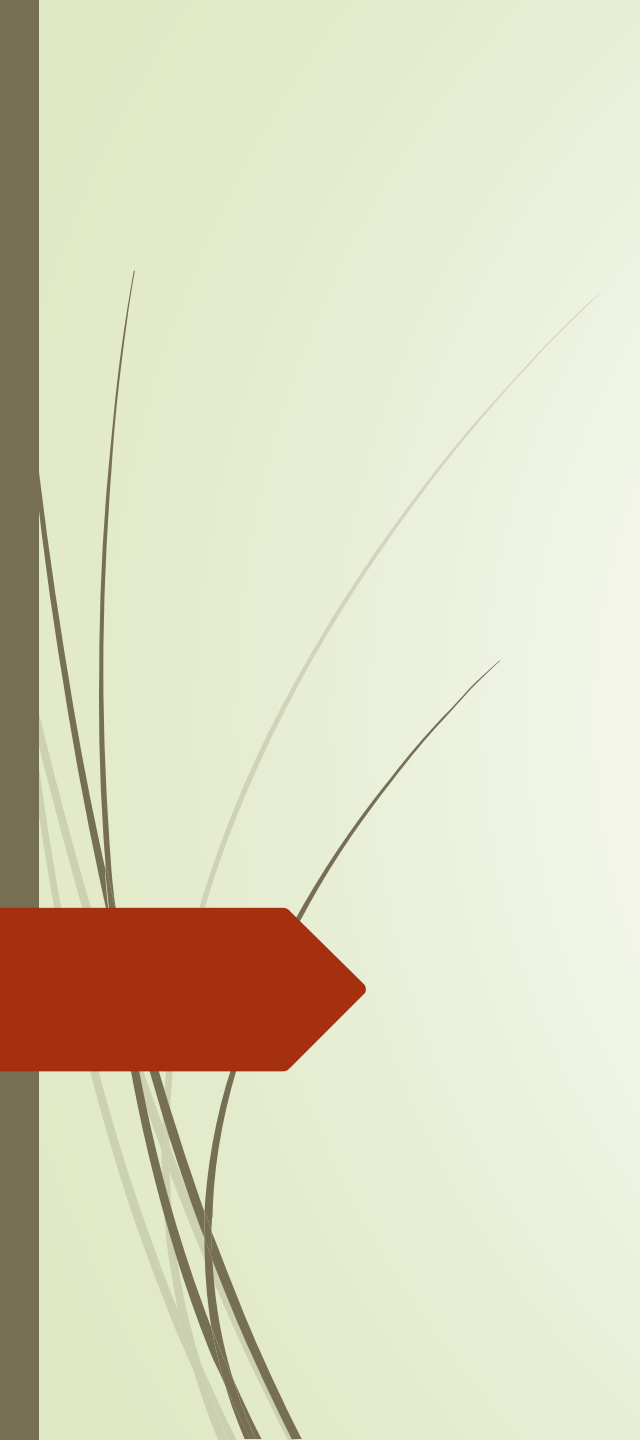


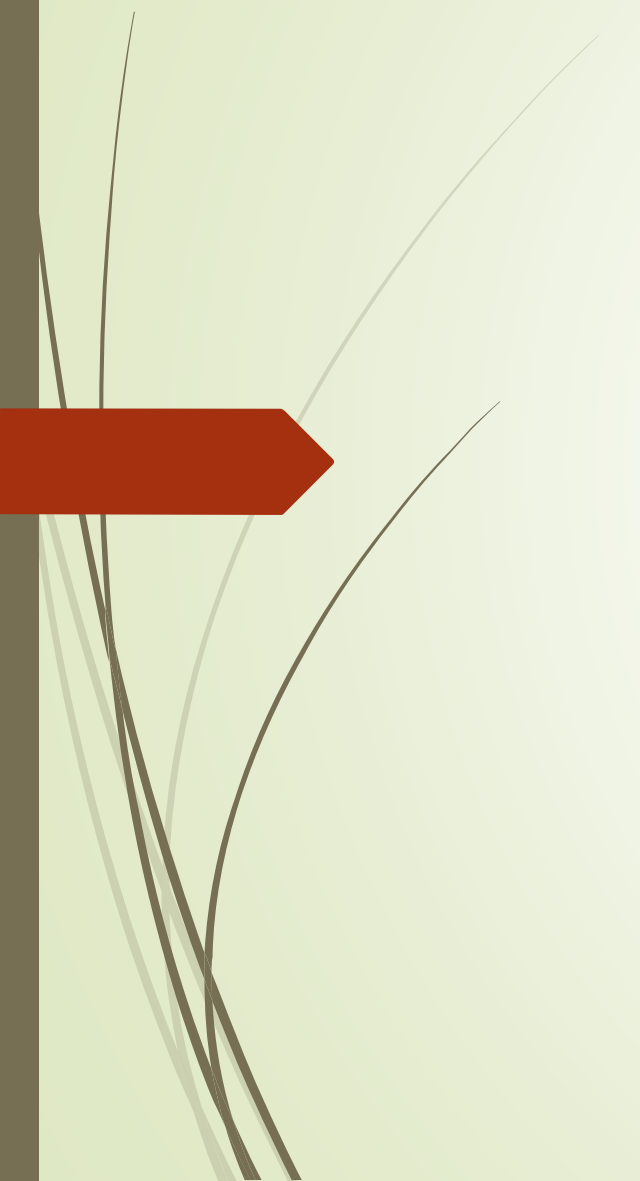


線性代數第12章

線性轉換，電腦繪圖

兩種座標轉換的題型

陳擎文老師



典型範例

範例4：逆時針旋轉 30° 的像

- 求 $x=(1, 1)$ 進行以原點為中心逆時針旋轉 $\pi/6$ 弧度 (弧度為 30°) 之後的像

(page. 331)

範例：逆時針旋轉 30° 的像

- 求 $x=(2, 3)$ ，以原點逆時針旋轉 90° ，再施加水平向1剪力變換shear的像

習題8：平面鏡射後的像 (page. 379)

- 利用矩陣乘法方式，求點 $(3, 4, 5)$ 對 xz 平面鏡射後的像。

題庫n：x軸正交投影後的像(page. 379)

- ➡ 利用矩陣乘法方式，求點 $(-3, 1)$ 對x軸的正交投影。

習題10：旋轉 45° 後的像 (page. 379)

- ➡ 利用矩陣乘法方式，求點 $(-2, 1, 2)$ 進行以下旋轉後的像。
 - ➡ (a) 以 y 軸為中心旋轉 45°



1. 映射函数的表示法

$$\mathbf{w} = T_A(\mathbf{x})$$



R^n 至 R^m 的矩陣轉換

➡ 兩個空間的轉換

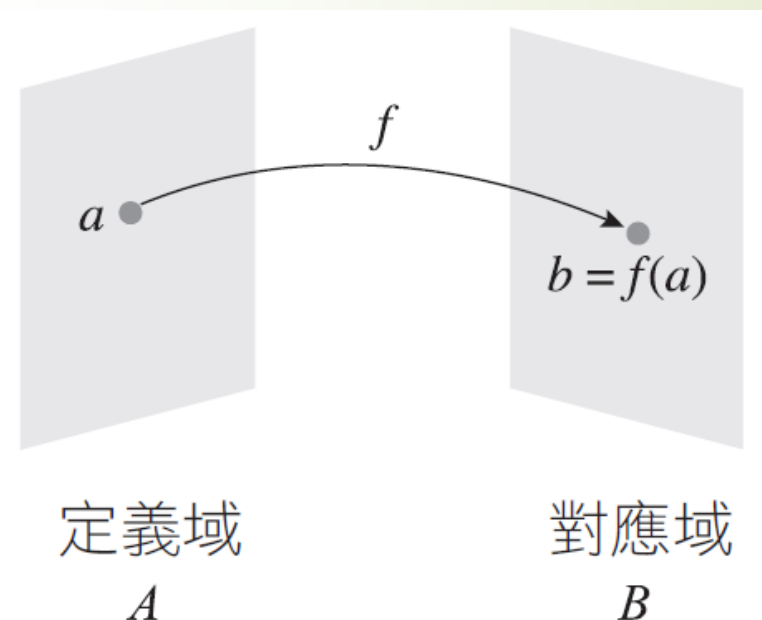
(page. 324)

➡ (1). f 為從 V 到 W 的轉換 (transformation)

➡ (2). 或 f 將 V 映射 (maps) 到 W

➡ (3). 符號： $f: V \rightarrow W$

➡ V 和 W 為向量空間



➡ 圖 7.1.1



R^n 至 R^m 的矩陣轉換 (page. 324)

➡ 線性映射 (map) : $f : V \rightarrow W$

➡ $w = f(x)$

➡ 矩陣轉換

$$w_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$w_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$w_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$w_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$$

$$w_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$w_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n$$



R^n 至 R^m 的矩陣轉換 (page. 325)

➡ 矩陣轉換

$$\mathbf{w} = A\mathbf{x}$$

➡ 線性轉換: transformation

➡ 線性映射: map

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

➡ 映射符號:

$$\mathbf{w} = T_A(\mathbf{x})$$

或

$$T(\mathbf{x}) = [T]\mathbf{x}$$

➡ 映射函數 = $T_A: R^n \rightarrow R^m$

➡ 讀作: T_A 映射 $\mathbf{x}$ 到 $\mathbf{w}$

$$\mathbf{x} \xrightarrow{T_A} \mathbf{w}$$

➡ $[T]$: 矩陣轉換 T 的標準矩陣



範例1： R^4 到 R^3 的矩陣轉換 (page. 325)

➡ 線性方程式

$$w_1 = 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4$$

$$w_2 = 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4$$

➡ 矩陣方程式

$$w_3 = 5x_1 - x_2 + 4x_3$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

➡ 請問：若

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -3, 0, 2)$ ，轉換到 R^3 的新坐標？

範例1： R^4 到 R^3 的矩陣轉換 (page. 325)

➡ 映射函數 = $\mathbf{w} = T_A(\mathbf{x})$

➡ T 的標準矩陣為

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

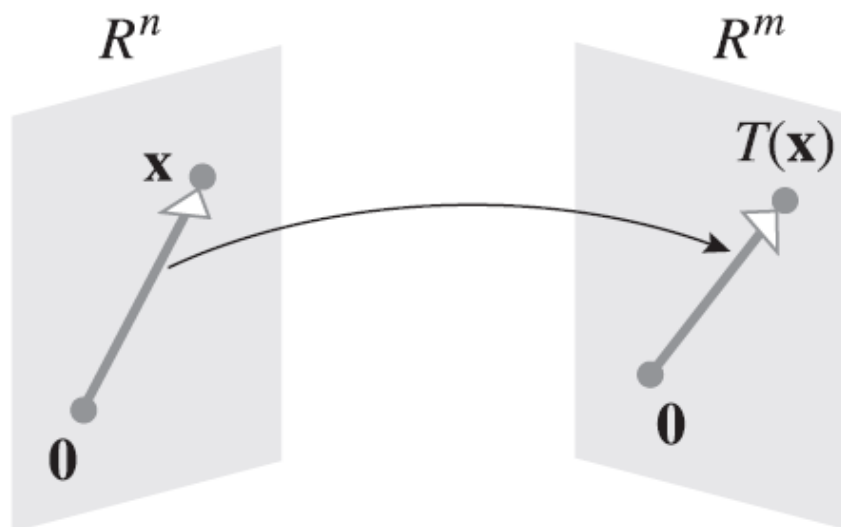
➡ R^4 : $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -3, 0, 2)$

➡ R^3 : 可得 $w_1=1, w_2=3, w_3=8$

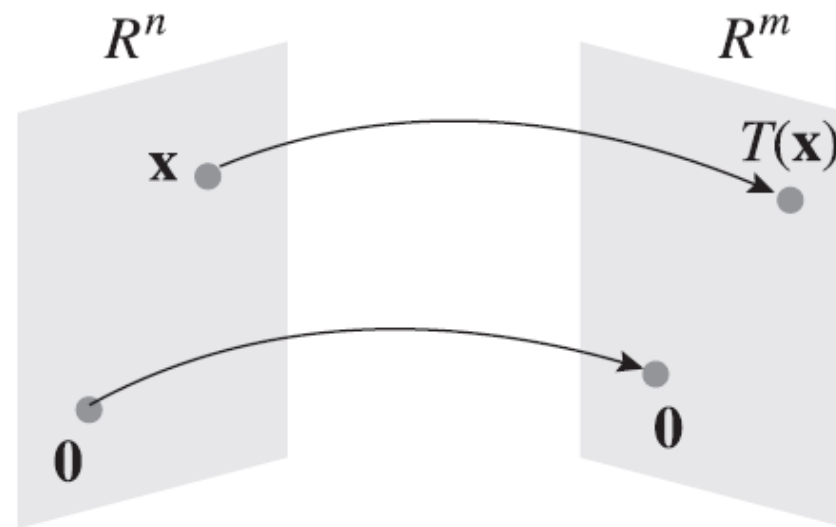
$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

R^n 至 R^m 的矩陣轉換

(page. 325)



T 映射向量到向量

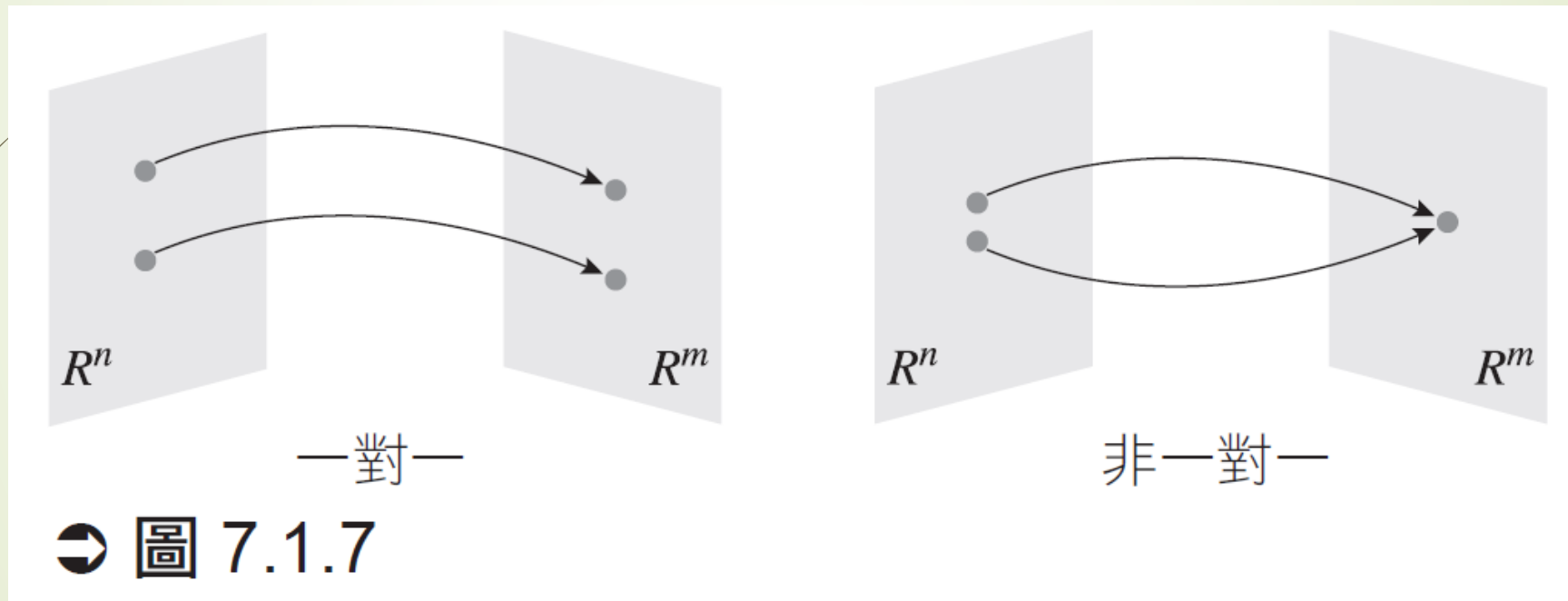


T 映射點到點

⇒ 圖 7.1.2

1對1轉換

(page. 336)



1對1轉換

(page. 336)

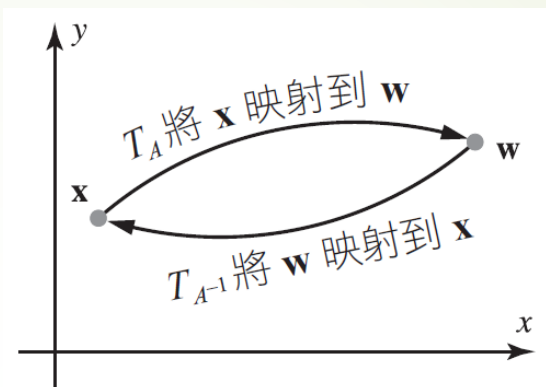
➡ 1對1轉換

➡ 特色：

➡ 有反矩陣

➡ 可逆

➡ 行列式不等於0



➡ 圖 7.1.10

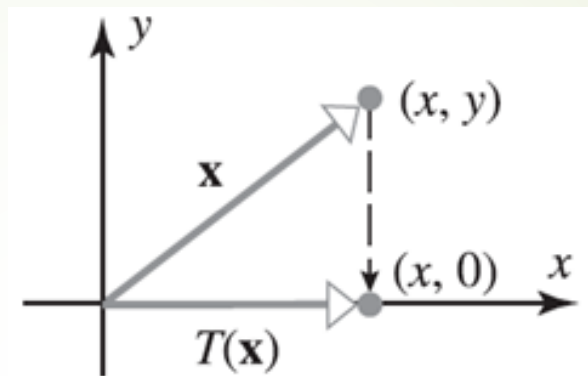
$$T_{A^{-1}}(\mathbf{w}) = T_{A^{-1}}(T_A(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$$

$$T_{A^{-1}} = T_A^{-1}$$

$$[T^{-1}] = [T]^{-1}$$

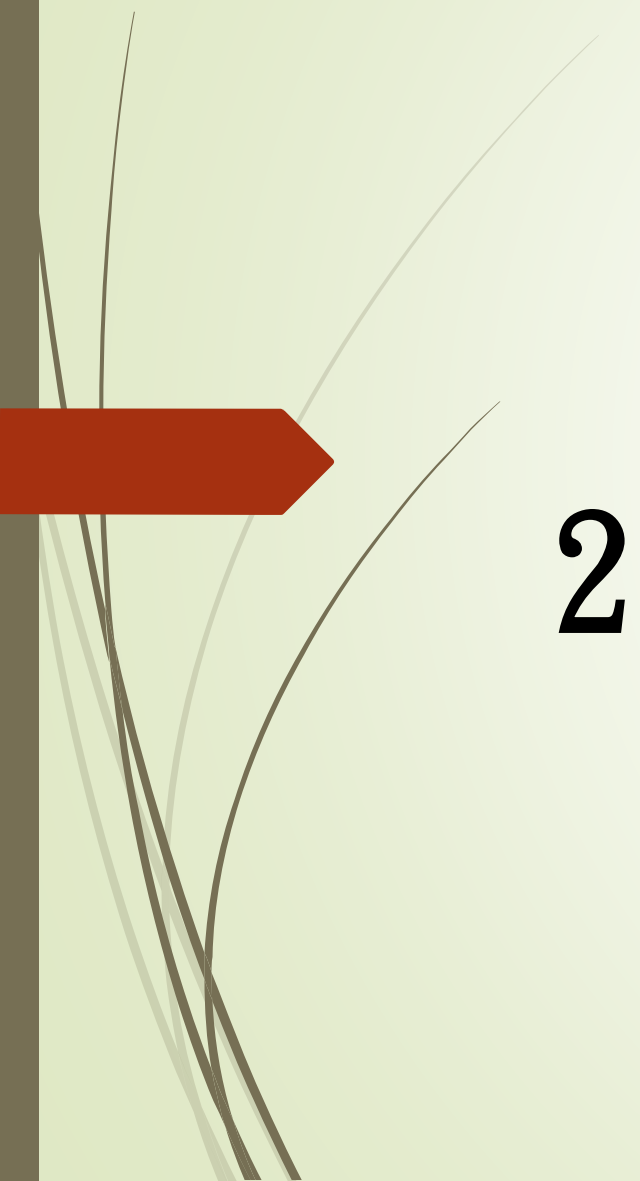
非1對1轉換

- ➡ 非1對1轉換
- ➡ 例如：投影轉換
- ➡ 特色：



(page. 336)

- ➡ 將向量投影xy-平面，非為一對一算轉換
- ➡ $[T]$ 為不可逆矩陣
- ➡ 沒有反矩陣
- ➡ 不可逆
- ➡ 行列式等於0



2. 坐標轉換的兩種問法



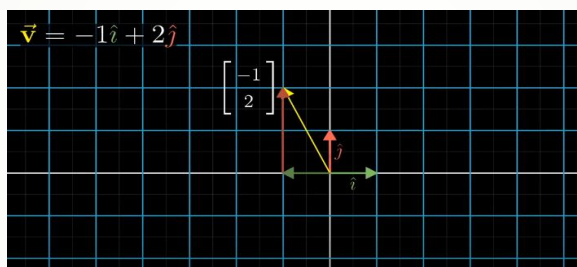
座標轉換的題目有兩種問法

(1). 第一種：某點 v ，當坐標軸變形後，會跑到什麼地方？

➡ 問法：求 $x=(2, 3)$ 被.... 變形移動後的像

➡ 例如： $v=(-1, 2)$ 被轉換矩陣轉換後，向量 v 會移動到什麼地方

➡
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

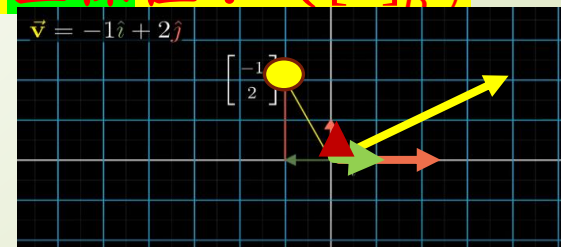


➡ (2). 第二種：同一點向量 v 不動，但在兩個坐標系統來觀察，其坐標值為多少？

➡ 問法：請計算 $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ 相對於另外一個座標系統的坐標值？ ($[v]_{B_1}$)

➡ 例如：在 B_1 基底的坐標是 $(-1, 2)$,

➡ 在 B_1 基底為坐標為？





這兩種座標轉換的轉換公式不同

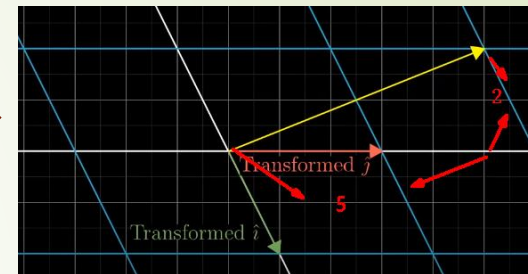
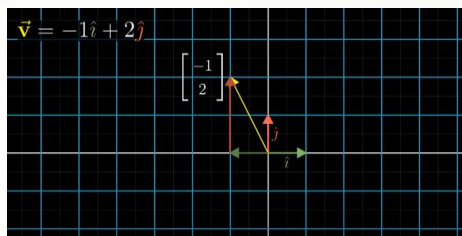
(1). 第一種：某點V，當坐標軸變形後，會跑到什麼地方？

➡ 例如：求 $x=(2, 3)$ 被... 變形移動後的像

➡ 關係圖： $V_{B1} \xrightarrow{P_{B1 \rightarrow B2}} V_{B2}$

➡ 關係式： $V_{B2} = P_{B1 \rightarrow B2} V_{B1}$

➡ 平行基底 = $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$



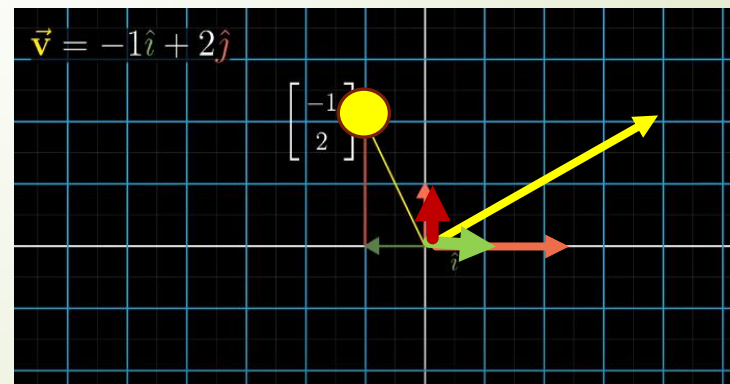
➡ (2). 第二種：同一向量V不動，但在兩個坐標系統來看，其相對坐標值為？

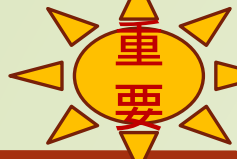
➡ 例如：在B1基底的坐標是(-1, 2), 相對於B1基底為坐標為？

➡ 關係圖： $V_{B1} \xrightarrow{P_{B1 \rightarrow B2}} V_{B2}$

➡ 關係式： $V_{B2} = P_{B1 \rightarrow B2} V_{B1}$

➡ 交叉基底 = $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$





解釋轉移矩陣一個是平行基底，一個卻是交叉基底的原理與物理意義

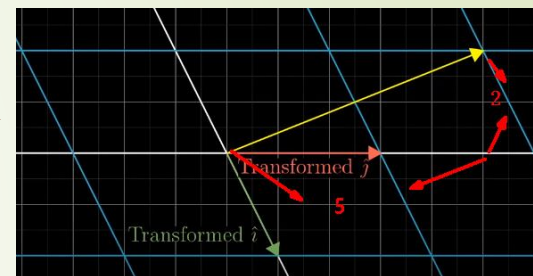
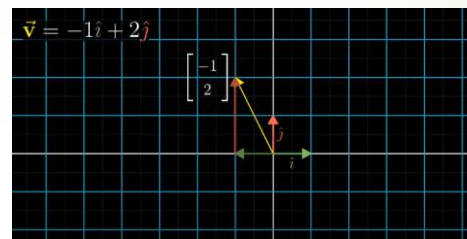
(1). 第一種：某點x，當坐標軸變形後，會跑到什麼地方y？

➡ **Ax=y的物理意義**：左邊直角基底的 $x=(x_1, x_2)$ ，被A矩陣變形移動到右邊S基底的像 $=y(y_1, y_2)$ ，因為順向，故為平行基底

➡ 關係圖： $x_{B1} \xrightarrow{P_{B1 \rightarrow B2}} y_{B2}$

➡ 關係式： $y_{B2} = P_{B1 \rightarrow B2} x_{B1}$

➡ 平行基底 = $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$



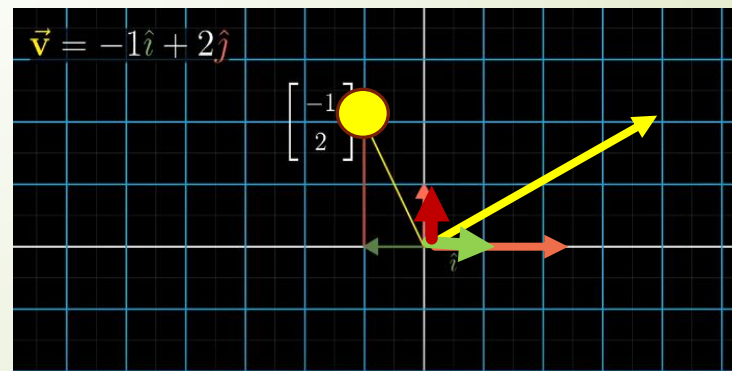
➡ (2). 第二種：同一向量x不動，但在兩個坐標系統來看，其相對坐標值為？

➡ **Ax=y的物理意義**：右邊S基底的 $x=(x_1, x_2)$ ，相對於左邊直角基底的像 $=y(y_1, y_2)$ ，因為逆向，故為交叉基底

➡ 關係圖： $x_{B1} \xrightarrow{P_{B1 \rightarrow B2}} y_{B2}$

➡ 關係式： $y_{B2} = P_{B1 \rightarrow B2} x_{B1}$

➡ 交叉基底 = $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$



第1種坐標轉換的題目

原座標系統被移動變形後的新像=?

➡ 問法特色：求 $x=(2, 3)$ 被... 變形移動後的像

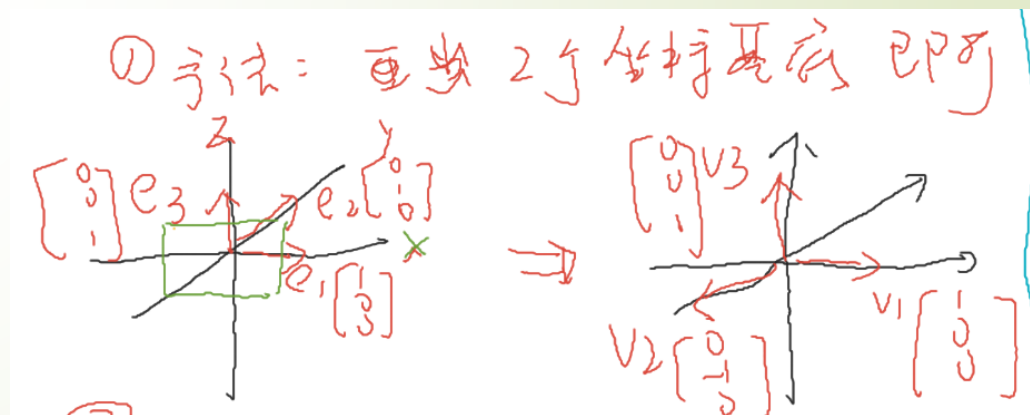
➡ 求點 $(3, 4, 5)$ 對yz平面鏡射後的像。

➡ 關係圖： $V_{B1} \xrightarrow{P_{B1 \rightarrow B2}} V_{B2}$

➡ 關係式： $V_{B2} = P_{B1 \rightarrow B2} V_{B1}$

➡ P 直角→鏡射 (快速方法：平行基底)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





第2種坐標轉換的題目 相對於另一個座標系統=?

➡ 問法特色：請計算 $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ 相對於另外一個座標系統的坐標值？ ($[v]_B$)

➡ 有兩個座標： $B = \{u_1, u_2\}$ 和 $B' = \{u'_1, u'_2\}$ (page. 191)

➡ 座標基底： $u_1 = (1, 0), u_2 = (0, 1), u'_1 = (1, 1), u'_2 = (2, 1)$

➡ 請計算 $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ 另外一個座標的表示 $[v]_B$

➡ 關係圖： $V_{B1} \xrightarrow{P_{B1 \rightarrow B2}} V_{B2}$

➡ 關係式： $V_{B2} = P_{B1 \rightarrow B2} V_{B1}$

➡ $P_{B1 \rightarrow B2}$ (快速方法：交叉基底)

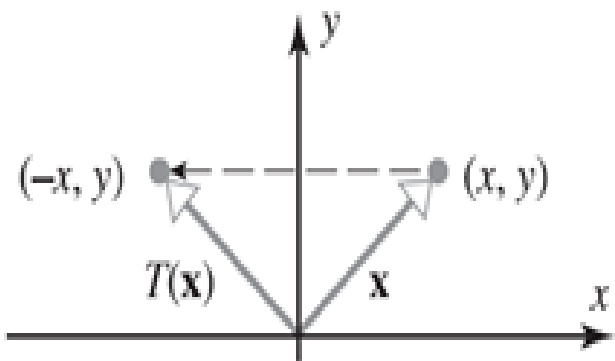
$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$



3. 各種鏡射轉換的標準矩陣

求矩陣轉換之標準矩陣的程序

- ➡ 步驟 1：對 R^n 中的標準基底向量 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 求出轉換後的像。
- ➡ 步驟 2：以步驟 1 所得的向量依序為行向量建構矩陣，則建構的矩陣即為此轉換的標準矩陣。

算子	圖說	e_1 和 e_2 的像	標準矩陣
對稱 y -軸的鏡射 $T(x, y) = (-x, y)$		$T(e_1) = T(1, 0) = (-1, 0)$ $T(e_2) = T(0, 1) = (0, 1)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



各種鏡射轉換的標準矩陣(page. 328)

► 表 1

算子	圖說	$\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 的像	標準矩陣
對稱 y -軸的鏡射 $T(x, y) = (-x, y)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (-1, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (0, 1)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
對稱 x -軸的鏡射 $T(x, y) = (x, -y)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (1, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (0, -1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
對稱直線 $y = x$ 的鏡射 $T(x, y) = (y, x)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (0, 1)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (1, 0)$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$



2D座標，對稱y軸的鏡射(page. 328)

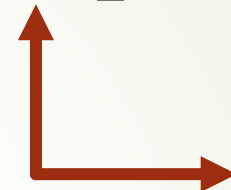
如何快速寫出標準矩陣：

(1). 原來xy軸 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2). 對稱y軸鏡射後的xy軸 = $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

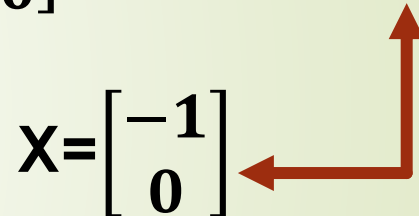
(3). 映射的標準矩陣 = $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

算子	圖說	e_1 和 e_2 的像	標準矩陣
對稱 y-軸的鏡射 $T(x, y) = (-x, y)$		$T(e_1) = T(1, 0) = (-1, 0)$ $T(e_2) = T(0, 1) = (0, 1)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



2D座標，對稱x軸的鏡射(page. 328)

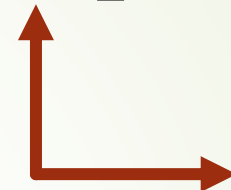
➡ 如何快速寫出標準矩陣：

➡ (1). 原來xy軸 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

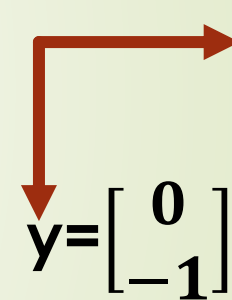
➡ (2). 對稱x軸鏡射後的xy軸 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

➡ (3). 映射的標準矩陣 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



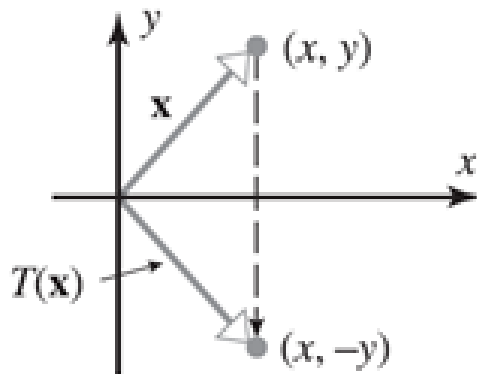
$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

對稱 x- 軸的鏡射
 $T(x, y) = (x, -y)$



$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= T(1, 0) = (1, 0) \\ T(\mathbf{e}_2) &= T(0, 1) = (0, -1) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



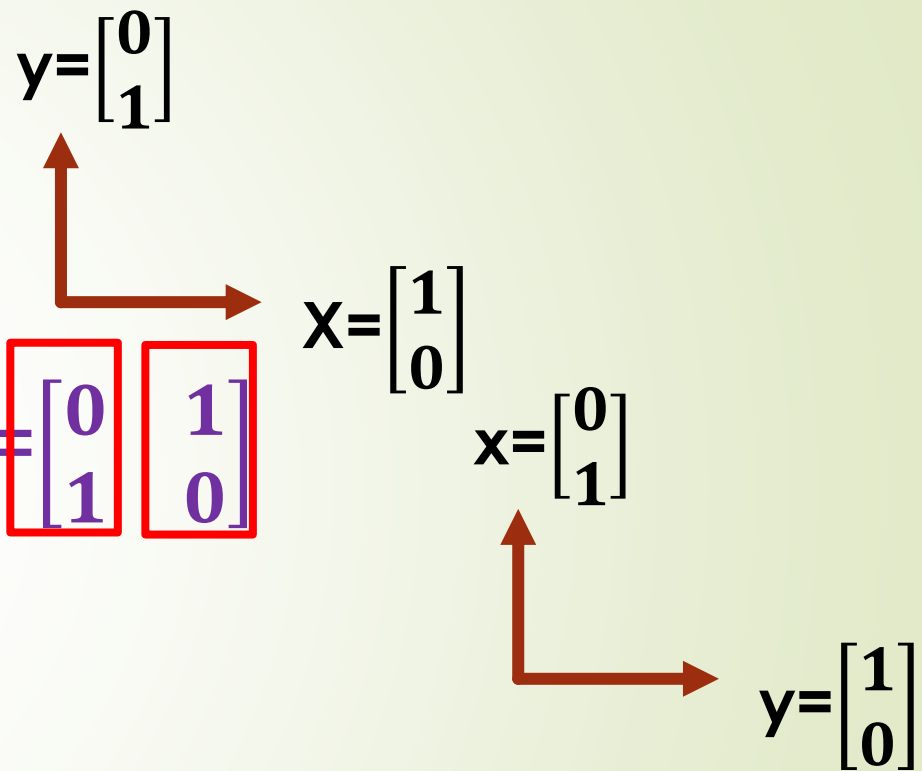
2D座標，對稱 $y=x$ 軸的鏡射 (page. 328)

如何快速寫出標準矩陣：

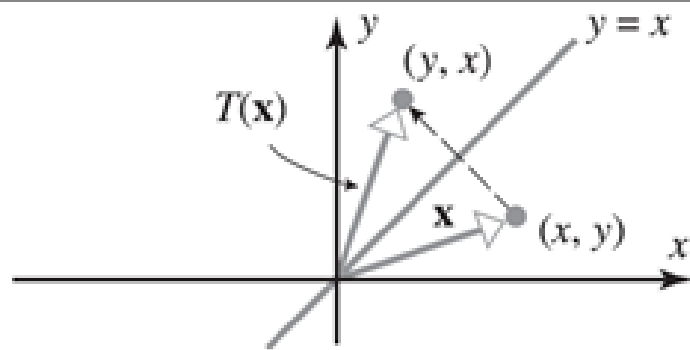
(1). 原來 xy 軸 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2). 對稱 $y=x$ 軸鏡射後的 xy 軸 = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(3). 映射的標準矩陣 = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$



對稱直線 $y=x$ 的鏡射
 $T(x, y) = (y, x)$



$$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (0, 1)$$
$$T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (1, 0)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



各種鏡射轉換的標準矩陣 (page. 329)

► 表 2

算子	圖說	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	標準矩陣
對稱 xy -平面的鏡射 $T(x, y, z) = (x, y, -z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, -1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
對稱 xz -平面的鏡射 $T(x, y, z) = (x, -y, z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, -1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
對稱 yz -平面的鏡射 $T(x, y, z) = (-x, y, z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



3D座標，對稱xy平面的鏡射 (page. 329)

如何快速寫出標準矩陣：

(1). 原來xyz軸 = $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(2). 對稱xy平面鏡射後的xyz軸 = $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

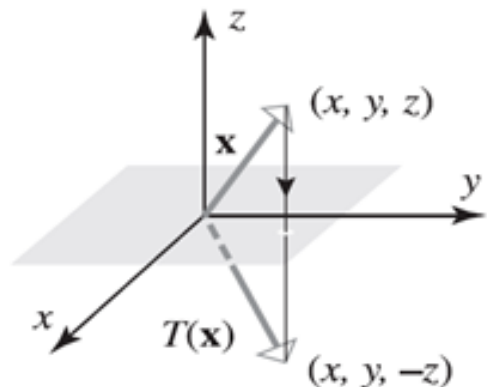
(3). 映射的標準矩陣 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

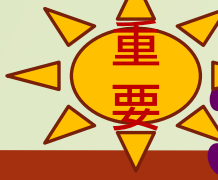
$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

對稱 xy-平面的鏡射
 $T(x, y, z) = (x, y, -z)$



$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= T(1, 0, 0) = (1, 0, 0) \\ T(\mathbf{e}_2) &= T(0, 1, 0) = (0, 1, 0) \\ T(\mathbf{e}_3) &= T(0, 0, 1) = (0, 0, -1) \end{aligned}$$

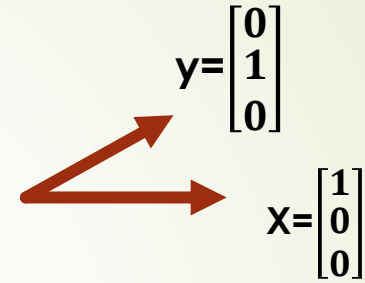
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



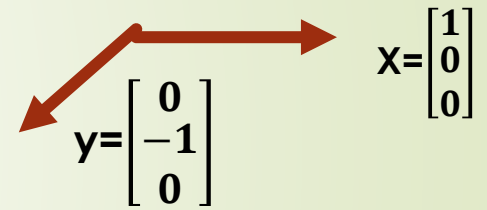
3D座標，對稱xz平面的鏡射 (page. 329)

如何快速寫出標準矩陣：

(1). 原來xyz軸 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

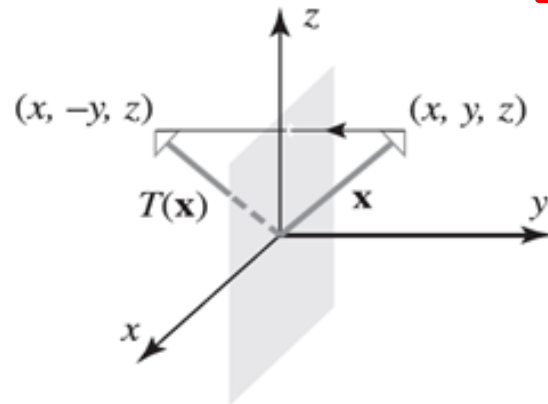


(2). 對稱xz平面鏡射後的xyz軸 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



(3). 映射的標準矩陣 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

對稱 xz -平面的鏡射
 $T(x, y, z) = (x, -y, z)$



$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= T(1, 0, 0) = (1, 0, 0) \\ T(\mathbf{e}_2) &= T(0, 1, 0) = (0, -1, 0) \\ T(\mathbf{e}_3) &= T(0, 0, 1) = (0, 0, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



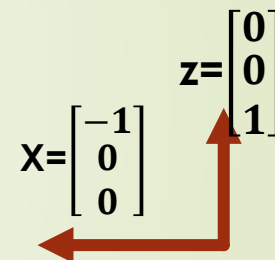
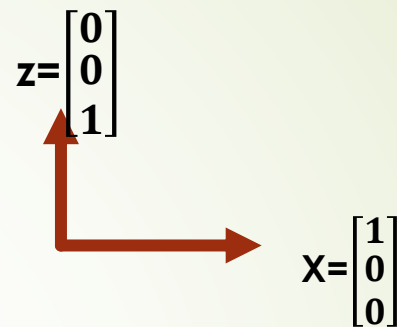
3D座標，對稱yz平面的鏡射 (page. 329)

如何快速寫出標準矩陣：

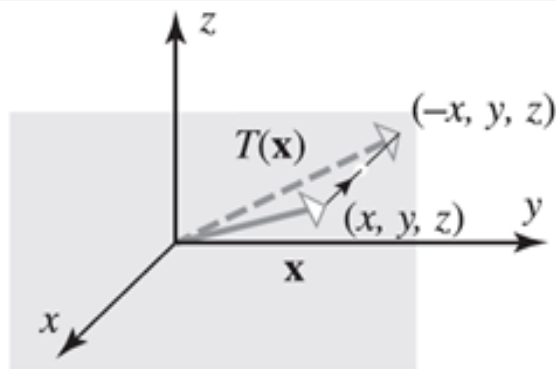
(1). 原來xyz軸 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2). 對稱yz平面鏡射後的xyz軸 = $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(3). 映射的標準矩陣 = $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

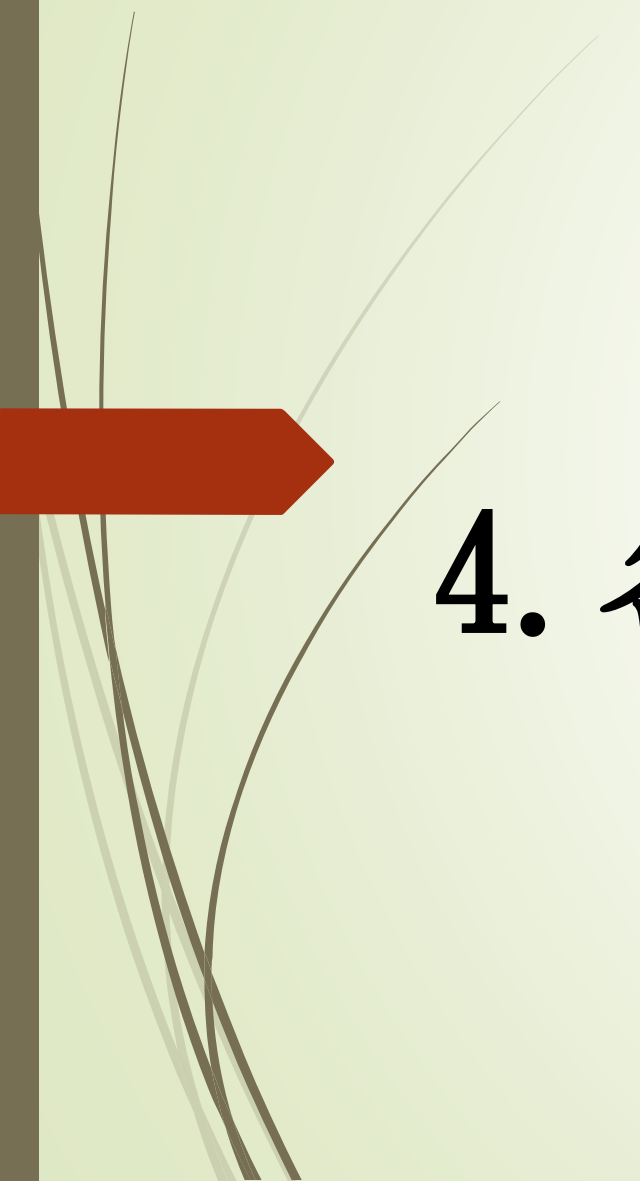


對稱 yz-平面的鏡射
 $T(x, y, z) = (-x, y, z)$



$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= T(1, 0, 0) = (-1, 0, 0) \\ T(\mathbf{e}_2) &= T(0, 1, 0) = (0, 1, 0) \\ T(\mathbf{e}_3) &= T(0, 0, 1) = (0, 0, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



4. 各種**投影轉換**的標準矩陣



各種投影轉換的標準矩陣(page. 330)

► 表 3

算子	圖說	$\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 的像	標準矩陣
正交投影到 x - 軸 $T(x, y) = (x, 0)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (1, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (0, 0)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
正交投影到 y - 軸 $T(x, y) = (0, y)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (0, 1)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



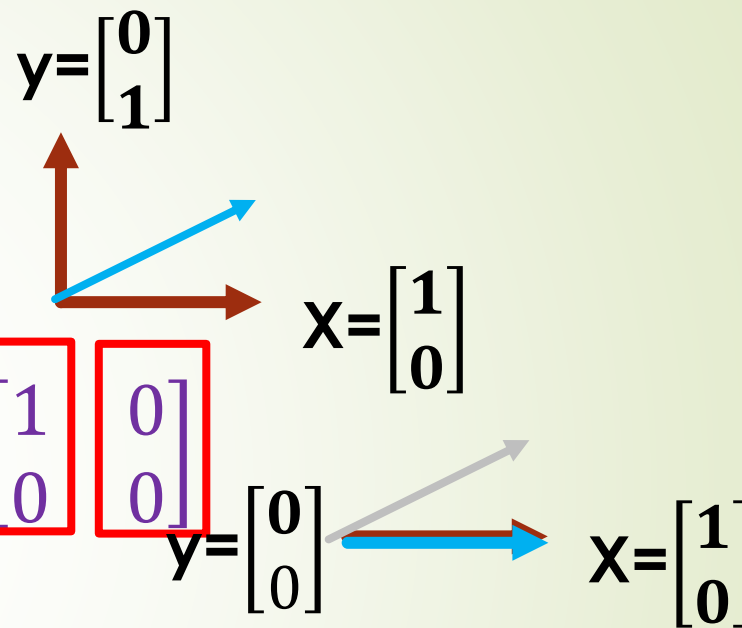
2D座標，投影x軸的轉換(page. 330)

➡ 如何快速寫出標準矩陣：

➡ (1). 原來xy軸 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

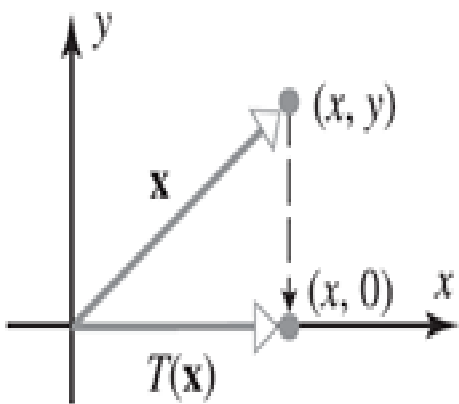
➡ (2). 投影x軸(y=0)後的xy軸 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

➡ (3). 映射的標準矩陣 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$



正交投影到 x-軸

$$T(x, y) = (x, 0)$$



$$T(e_1) = T(1, 0) = (1, 0)$$

$$T(e_2) = T(0, 1) = (0, 0)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



2D座標，投影y軸的轉換(page. 330)

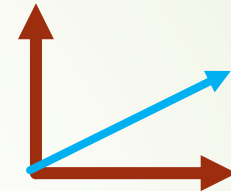
➡ 如何快速寫出標準矩陣：

➡ (1). 原來xy軸 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

➡ (2). 投影y軸(x=0)後的xy軸 = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

➡ (3). 映射的標準矩陣 = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

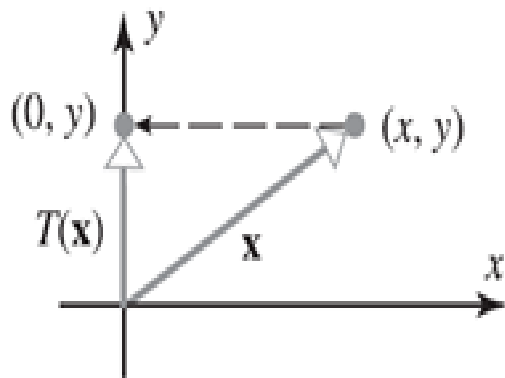


$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

正交投影到 y-軸
 $T(x, y) = (0, y)$



$$T(e_1) = T(1, 0) = (0, 0)$$

$$T(e_2) = T(0, 1) = (0, 1)$$

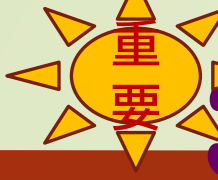
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



各種投影轉換的標準矩陣 (page. 330)

► 表 4

算子	圖說	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 的像	標準矩陣
正交投影到 xy -平面 $T(x, y, z) = (x, y, 0)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
正交投影到 xz -平面 $T(x, y, z) = (x, 0, z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
正交投影到 yz -平面 $T(x, y, z) = (0, y, z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



3D座標，投影xy平面的轉換(page. 330)

➡ 如何快速寫出標準矩陣：

➡ (1). 原來xyz軸 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

➡ (2). 投影xy平面(z=0)後的xyz軸 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

➡ (3). 映射的標準矩陣 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

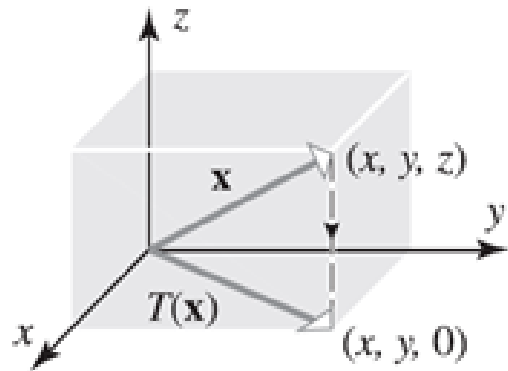
$$z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

正交投影到 xy-平面
 $T(x, y, z) = (x, y, 0)$



$$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$$

$$T(e_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$$

$$T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



3D座標，投影xz平面的轉換(page. 330)

如何快速寫出標準矩陣：

(1). 原來xyz軸 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2). 投影xz平面(y=0)後的xyz軸 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(3). 映射的標準矩陣 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

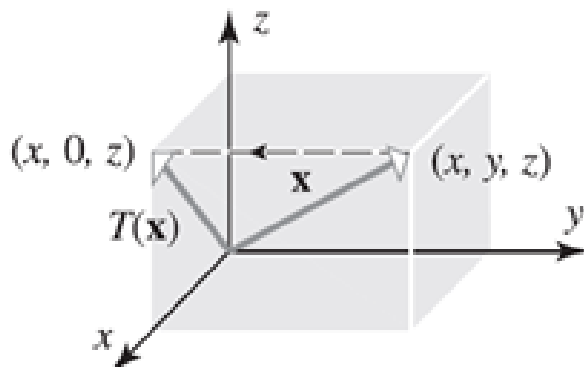
$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

正交投影到 xz-平面
 $T(x, y, z) = (x, 0, z)$



$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= T(1, 0, 0) = (1, 0, 0) \\ T(\mathbf{e}_2) &= T(0, 1, 0) = (0, 0, 0) \\ T(\mathbf{e}_3) &= T(0, 0, 1) = (0, 0, 1) \end{aligned}$$

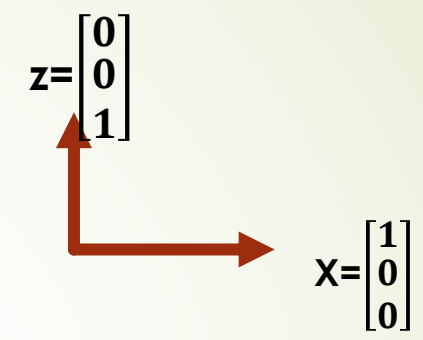
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



3D座標，投影xz平面的轉換(page. 330)

➡ 如何快速寫出標準矩陣：

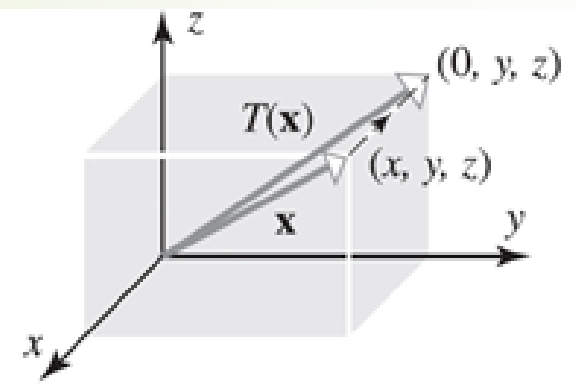
➡ (1). 原來xyz軸 = $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



➡ (2). 投影yz平面(x=0)後的xyz軸 = $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

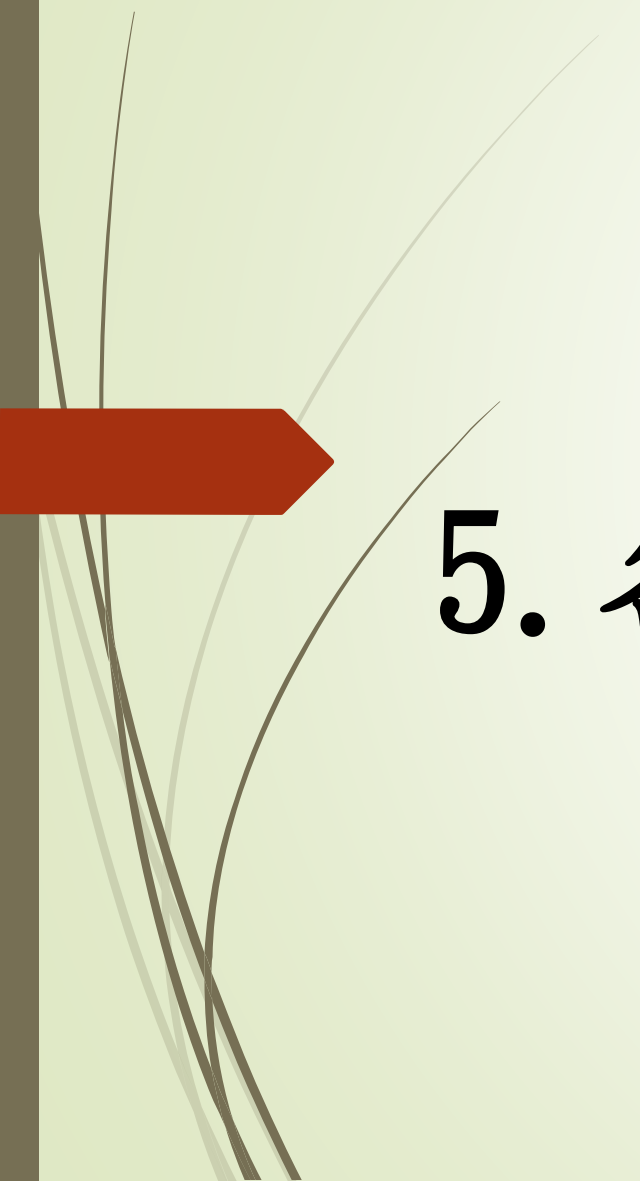
➡ (3). 映射的標準矩陣 = $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

正交投影到 yz-平面
 $T(x, y, z) = (0, y, z)$



$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= T(1, 0, 0) = (0, 0, 0) \\ T(\mathbf{e}_2) &= T(0, 1, 0) = (0, 1, 0) \\ T(\mathbf{e}_3) &= T(0, 0, 1) = (0, 0, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



5. 各種旋轉轉換的標準矩陣



2D旋轉轉換的標準矩陣(page. 331)

► 表 5

算子	圖說	旋轉方程式	標準矩陣
以原點為中心逆時針旋轉 θ 角		$\begin{aligned}w_1 &= x \cos \theta - y \sin \theta \\w_2 &= x \sin \theta + y \cos \theta\end{aligned}$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

► 逆時針旋轉

$$R_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$w_1 = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$w_2 = x \sin \theta + y \cos \theta$$



逆時針旋轉的轉換 (page. 331)

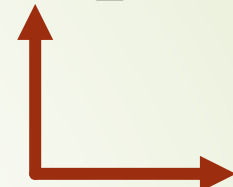
➡ 如何快速寫出標準矩陣：

➡ (1). 原來xy軸 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

➡ (2). 逆時針旋轉後的xy軸 = $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

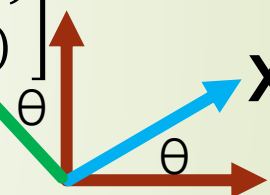
➡ (3). 映射的標準矩陣 = $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



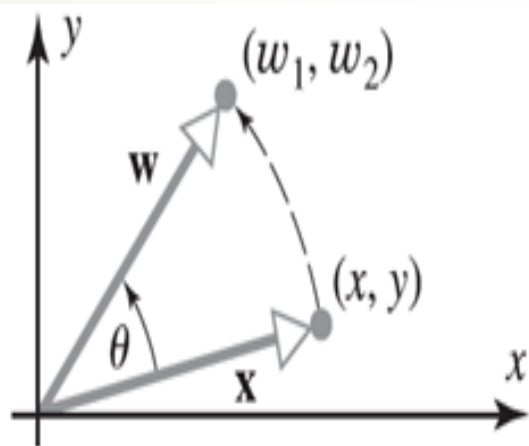
$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}$$



$$x = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

以原點為中心逆時針
旋轉 θ 角



$$w_1 = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$w_2 = x \sin \theta + y \cos \theta$$

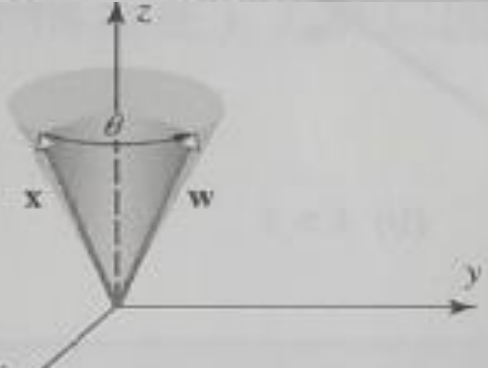
$$\begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$



3維旋轉轉換的標準矩陣(page. 332)

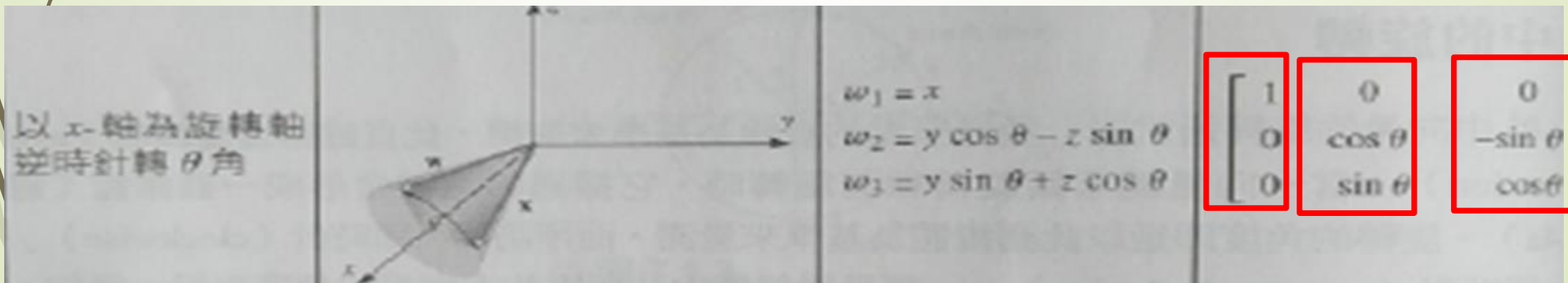
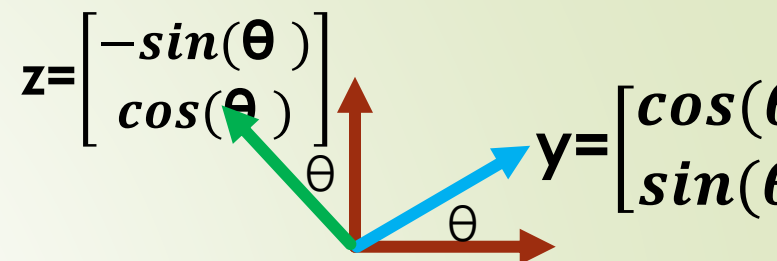
注意：3D的旋轉，例如以y軸為中心旋轉，乃是由外向內的視角旋轉，不是由原點向外視角來旋轉。逆時針為正

標準矩陣			
以 x-軸為旋轉軸 逆時針轉 θ 角		$\begin{aligned}w_1 &= x \\w_2 &= y \cos \theta - z \sin \theta \\w_3 &= y \sin \theta + z \cos \theta\end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$
以 y-軸為旋轉軸 逆時針轉 θ 角		$\begin{aligned}w_1 &= x \cos \theta + z \sin \theta \\w_2 &= y \\w_3 &= -x \sin \theta + z \cos \theta\end{aligned}$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$
以 z-軸為旋轉軸 逆時針轉 θ 角		$\begin{aligned}w_1 &= x \cos \theta - y \sin \theta \\w_2 &= x \sin \theta + y \cos \theta \\w_3 &= z\end{aligned}$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

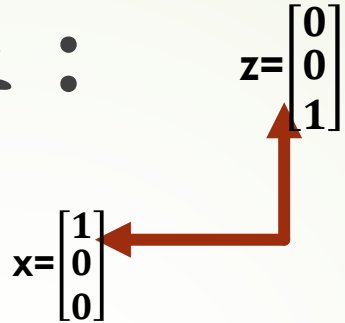
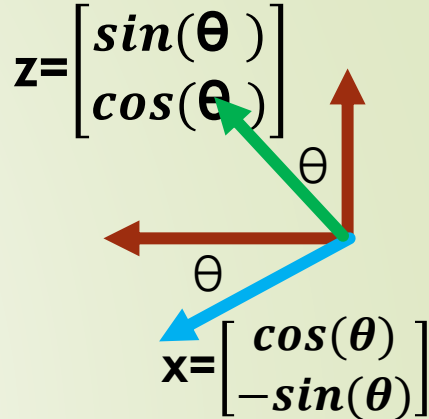


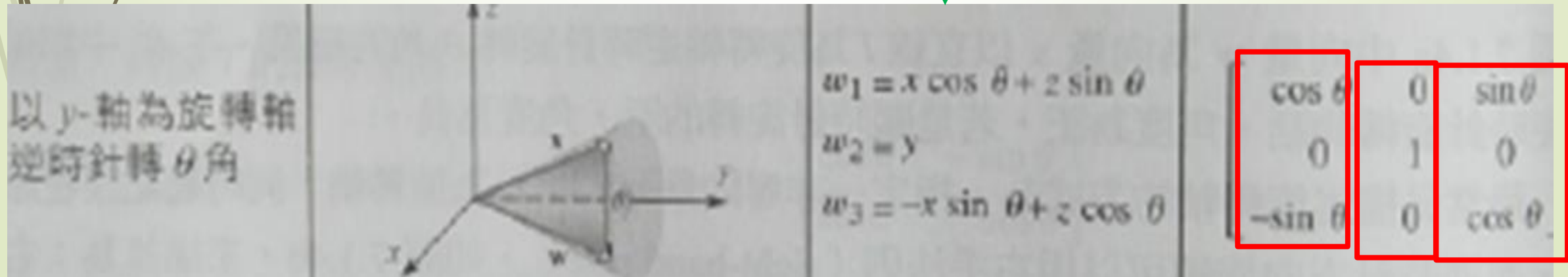
以X軸旋轉轉換的標準矩陣 (page. 332)

- 如何快速寫出標準矩陣： $z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- (1). 原來xyz軸 = $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- (2). 以X軸旋轉(x不變)後的xyz軸 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$
- (3). 映射的標準矩陣 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$



以y軸旋轉轉換的標準矩陣(page. 332)

- 如何快速寫出標準矩陣：
- (1). 原來xyz軸 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 
- (2). 以y軸旋轉(y不變)後的xyz軸 = $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ 
- (3). 映射的標準矩陣 = $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$



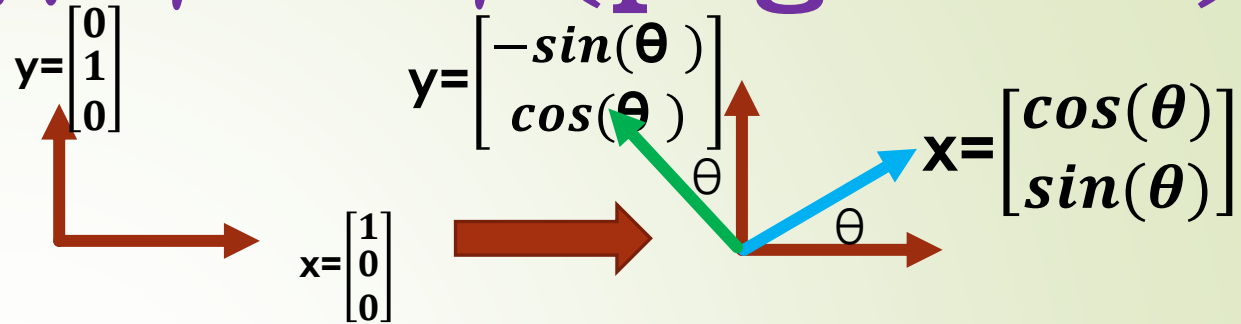
以Z軸旋轉轉換的標準矩陣 (page. 332)

➡ 如何快速寫出標準矩陣

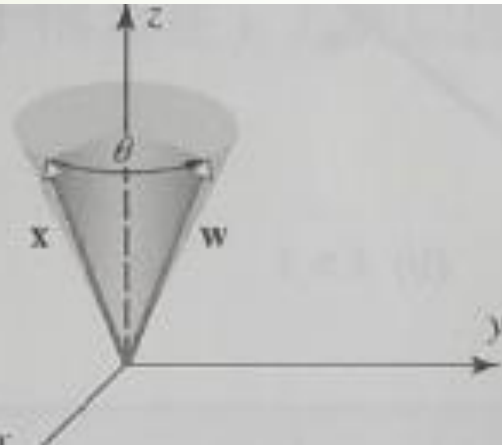
➡ (1). 原來xyz軸 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

➡ (2). 以Z軸旋轉(z不變)後的xyz軸 = $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

➡ (3). 映射的標準矩陣 = $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



以 z-軸為旋轉軸
逆時針轉 θ 角

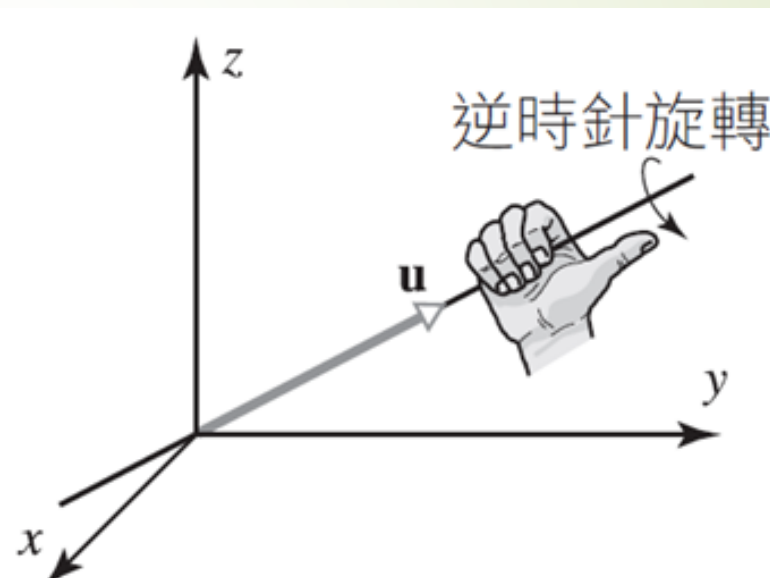
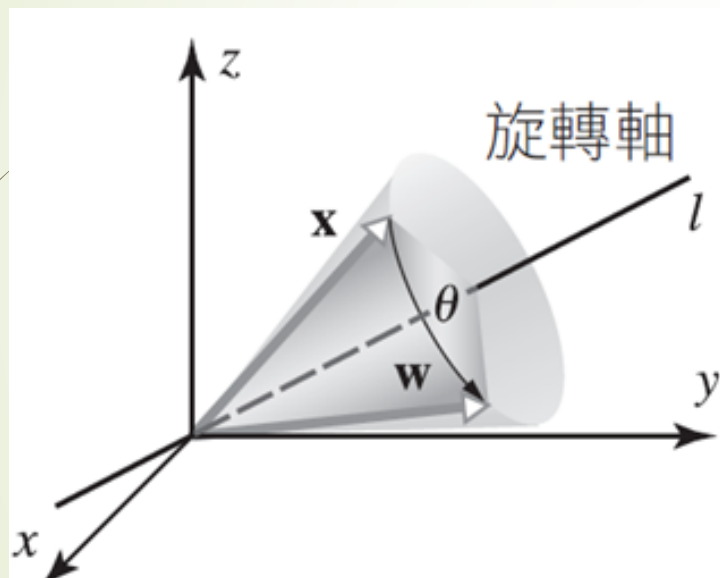


$$\begin{aligned} w_1 &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ w_2 &= x \sin \theta + y \cos \theta \\ w_3 &= z \end{aligned}$$

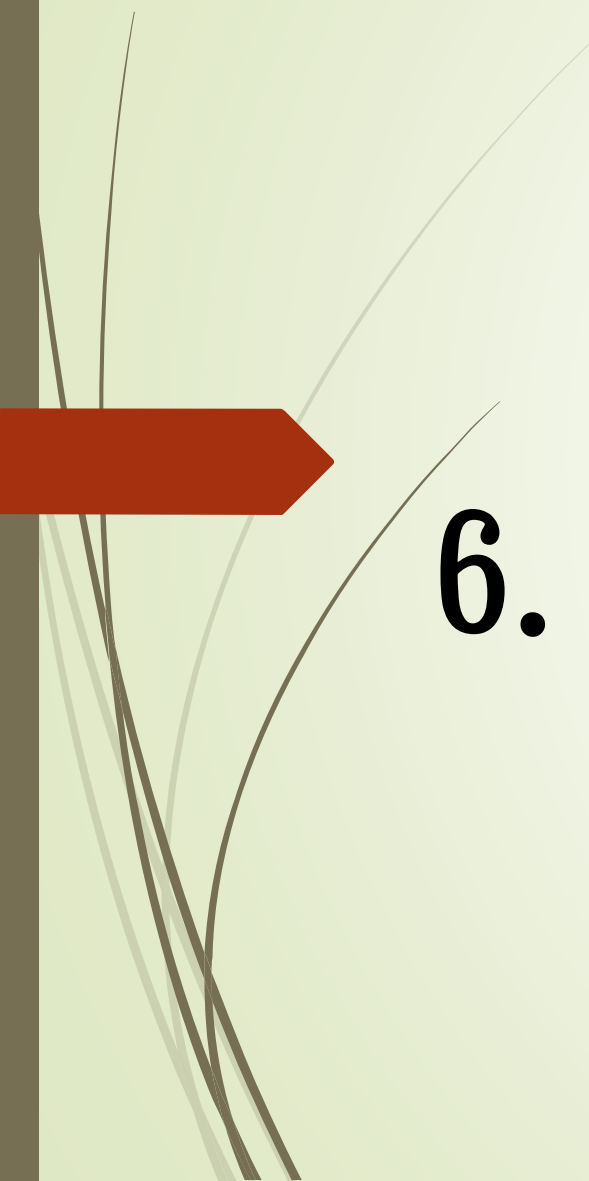
$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3維任意軸旋轉轉換的標準矩陣(page. 332)

- ➡ 任意單位向量 $\mathbf{u}=(a, b, c)$ 為旋轉軸，逆時針旋轉 θ 角，此時旋轉的標準矩陣



$$\begin{bmatrix} a^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta & ab(1 - \cos \theta) - c \sin \theta & ac(1 - \cos \theta) + b \sin \theta \\ ab(1 - \cos \theta) + c \sin \theta & b^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta & bc(1 - \cos \theta) - a \sin \theta \\ ac(1 - \cos \theta) - b \sin \theta & bc(1 - \cos \theta) + a \sin \theta & c^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta \end{bmatrix} \quad (15)$$



6. 各種縮放轉換的標準矩陣



各種2D縮放轉換的標準矩陣(page. 333)

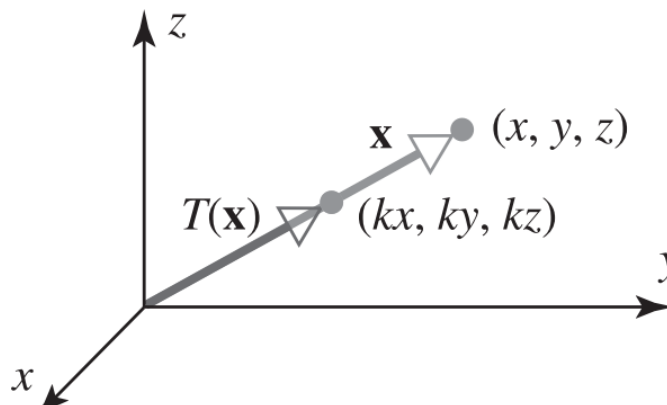
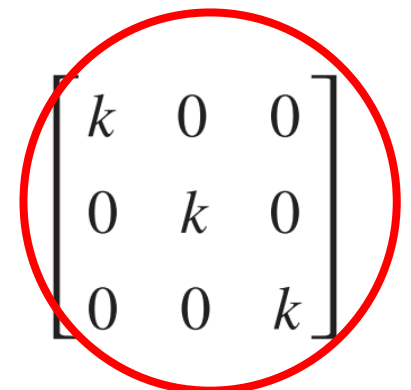
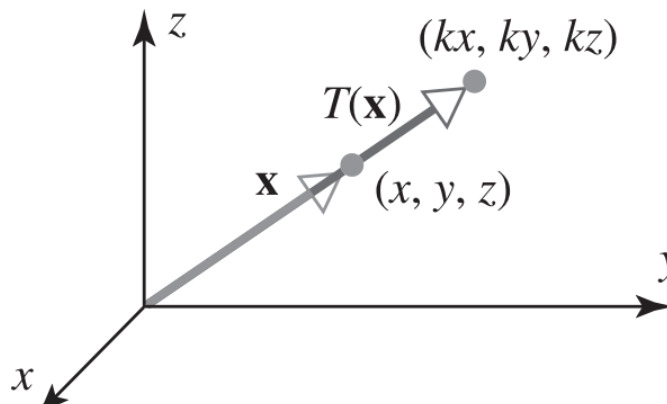
► 表 7

算子	圖說 $T(x, y) = (kx, ky)$	在標準基底的效果	標準矩陣
R^2 中收縮 k 倍 ($0 \leq k < 1$)			$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
R^2 中擴張 k 倍 ($k > 1$)			



各種3D縮放轉換的標準矩陣(page. 333)

►表 8

算子	圖說 $T(x, y, z) = (kx, ky, kz)$	標準矩陣
R^3 中收縮 k 倍 ($0 \leq k \leq 1$)		 $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$
R^3 中擴張 k 倍 ($k \geq 1$)		



3D座標，等比例擴張與收縮的轉換 (page. 333)

➡ 如何快速寫出標準矩陣：

➡ 映射的標準矩陣 =
$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$



單向擴張與收縮的轉換(page. 334)

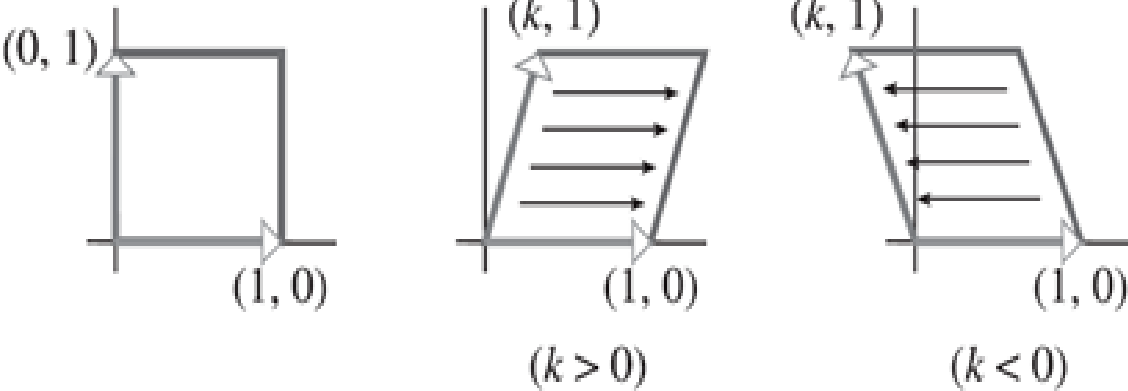
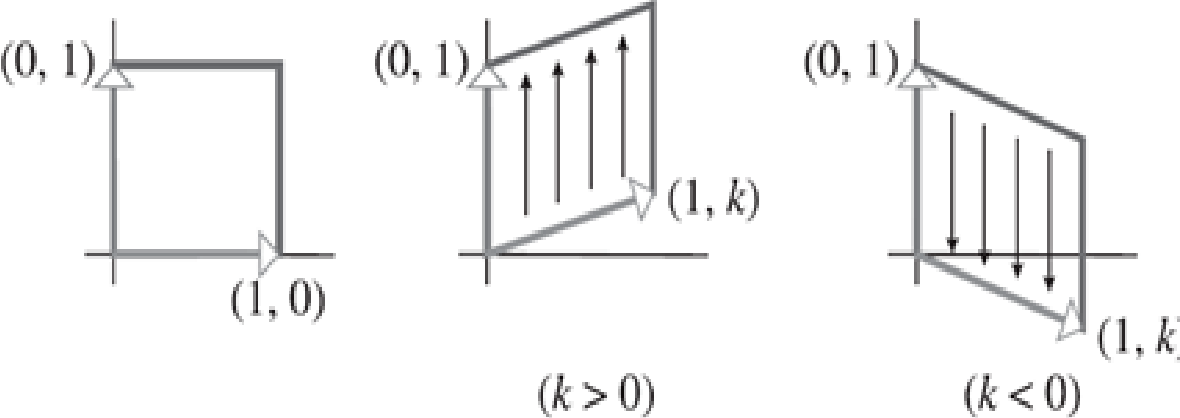
R^2 中的 x -方向壓縮 k 倍 ($0 \leq k < 1$)			$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
R^2 中的 x -方向膨脹 k 倍 ($k > 1$)			
算子	圖說 $T(x, y) = (x, ky)$	在標準基底的效果	標準矩陣
R^2 中的 y -方向壓縮 k 倍 ($0 \leq k < 1$)			$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
R^2 中的 y -方向膨脹 k 倍 ($k > 1$)			



7. 各種剪力 (shear)轉換的標準矩陣



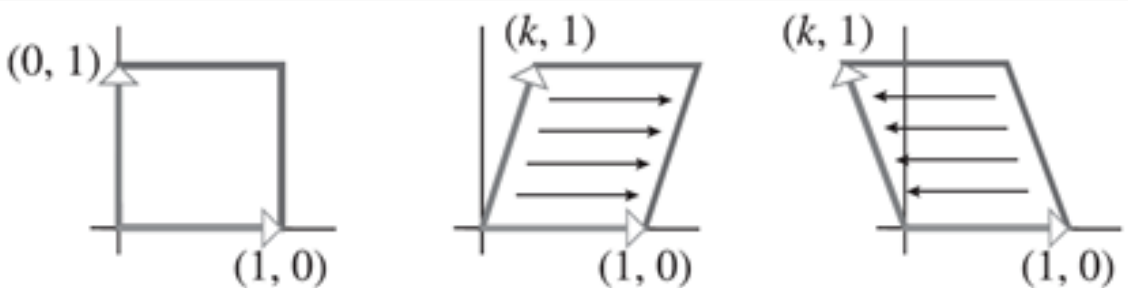
剪力 (shear) 的轉換 (page. 335)

算子	在標準基底的效果	標準矩陣
在 x 方向以因子 k 做修剪 (shear) $T(x, y) = (x + ky, y)$		$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
在 y 方向以因子 k 做修剪 (shear) $T(x, y) = (x, y + kx)$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$



在x方向剪力(k, 1)的轉換(page. 335)

- 如何快速寫出標準矩陣： $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\text{red arrow}}$ $y = \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}$
 $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\text{red arrow}}$ $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- (1). 原來xy軸 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- (2). x方向剪力(k, 1)後的xy軸 = $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- (3). 映射的標準矩陣 = $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

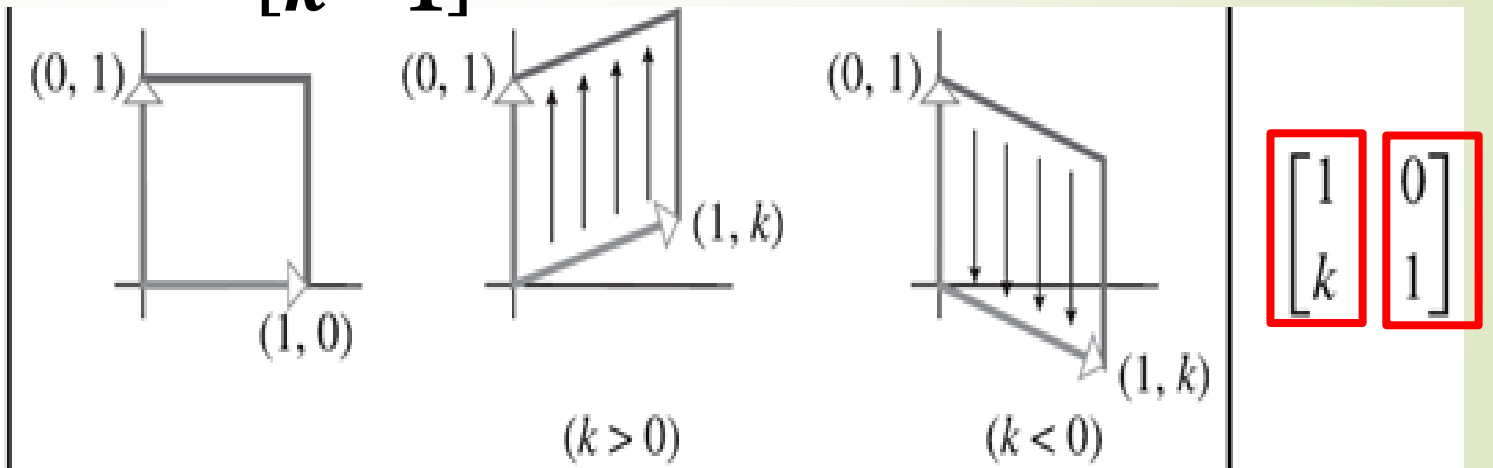
算子	在標準基底的效果	標準矩陣
在 x 方向以因子 k 做修剪 (shear) $T(x, y) = (x + ky, y)$	 $(k > 0)$ $(k < 0)$	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



在y方向剪力(1, k)的轉換(page. 335)

- 如何快速寫出標準矩陣： $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\text{red arrow}}$ $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
 $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\text{red arrow}}$ $x = \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}$
- (1). 原來xy軸 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- (2). y方向剪力(1, k)後的xy軸 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$
- (3). 映射的標準矩陣 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

在y方向以因子k做修剪 (shear)
 $T(x, y) = (x, y + kx)$





8. 各種變形成像的範例練習

範例4：逆時針旋轉 30° 的像

- 求 $x=(1, 1)$ 進行以原點為中心逆時針旋轉 $\pi/6$ 弧度 (弧度為 30°) 之後的像

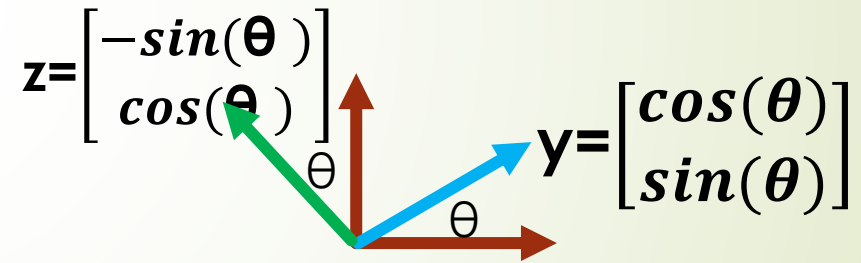
(page. 331)

範例4：逆時針旋轉 30° 的像 (page. 331)

➡ 求 $x=(1, 1)$ 進行以原點為中心逆時針旋轉 $\pi/6$ 弧度 (弧度為 30°)

➡ $[T]$ 標準矩陣 $= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(30) & -\sin(30) \\ \sin(30) & \cos(30) \end{bmatrix}$

➡ $= \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$



➡ 旋轉轉換映射 $= \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 - 1/2 \\ 1/2 + \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

Python 程式碼

```
import numpy as np
rad = np.radians(30)
T1 = np.array([
    [np.cos(rad), -np.sin(rad)],
    [np.sin(rad), np.cos(rad)]
])
x = np.array([
    [1],
    [1]
])
y = T1 @ x
print('旋轉後的像=\n', y)
```

旋轉後的像=

```
[[0.3660254]
 [1.3660254]]
```

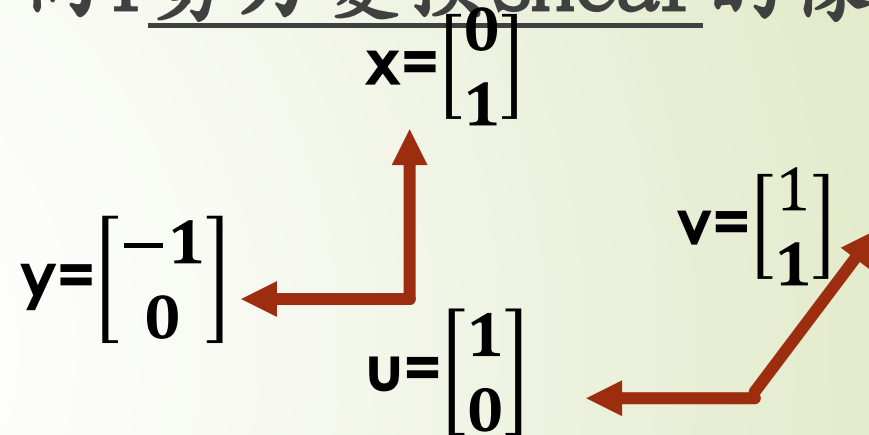
範例n：逆時針旋轉 30° 的像

- 求 $x=(2, 3)$ ，以原點逆時針旋轉 90° ，再施加水平向1剪力變換shear的像

範例n：逆旋轉 30° 再水平剪力1的像

求 $x=(2, 3)$ 逆時針旋轉 90° ，再水平向1剪力變換shear的像

旋轉標準矩陣 $[T_1] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$



剪力標準矩陣 $[T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (注意：這個座標是uv, 不是x, y)

轉換映射的像 $= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

範例n：連續兩次的網格移動的矩陣表示式

➡ <https://www.youtube.com/watch?v=XkY2DOUCWMU>

➡ 10 : 00

➡ (1). 先逆時針旋轉90度counterclockwise

➡ 轉換矩陣 = $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

➡ (2). 再施加剪力變換shear

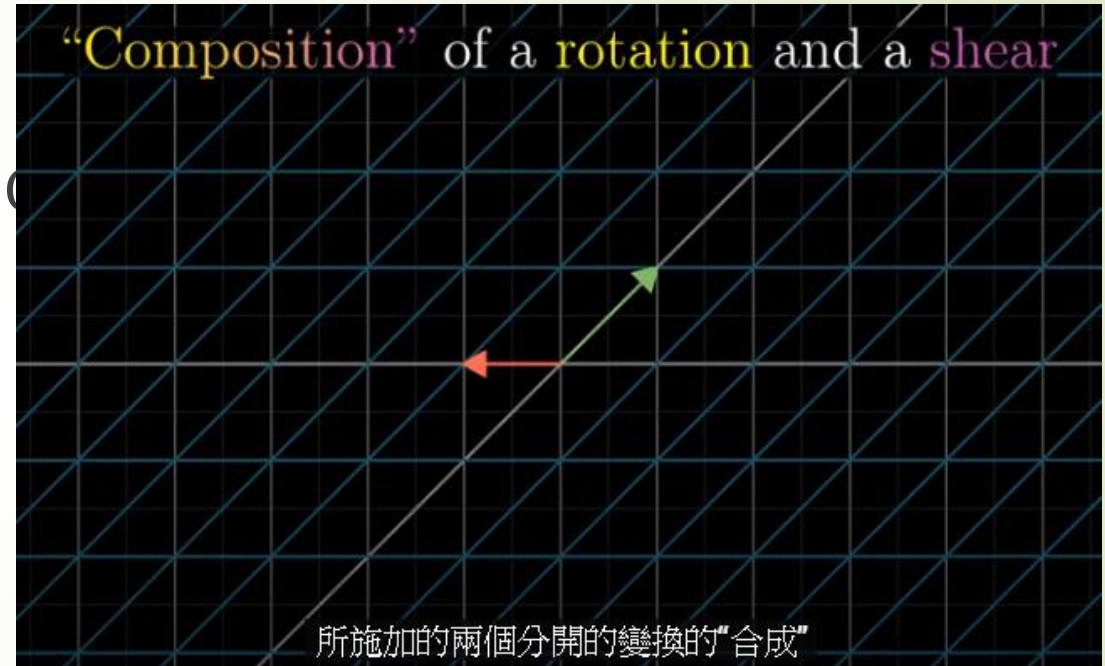
➡ 轉換矩陣 = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

➡ (3). 合成矩陣

➡ Composition of rotation and shear

➡ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

➡ Shear Rotation composition



$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Shear}} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Rotation}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)$$

Python 程式碼

```
import numpy as np
rad = np.radians(90)
T1 = np.array([
    [np.cos(rad), -np.sin(rad)],
    [np.sin(rad), np.cos(rad)]
])
T2 = np.array([
    [1, 1],
    [0, 1]
])
x = np.array([
    [2], [3]
])
y = T2 @ T1 @ x
print("兩次座標轉換後的像=\n", y)
```

兩次座標轉換後的像=

$\begin{bmatrix} -1. \\ 2. \end{bmatrix}$

習題8：平面鏡射後的像 (page. 379)

- 利用矩陣乘法方式，求點 $(3, 4, 5)$ 對 xz 平面鏡射後的像。

習題8：平面鏡射後的像 (page. 379)

➡ 點 $(3, 4, 5)$ 對 xz 平面鏡射後的像。

➡ xz 平面鏡射： $(y \rightarrow -y)$

➡ 標準矩陣 $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

➡ 轉換映射的像 $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$

Python 程式碼

```
import numpy as np
```

```
T1 = np.array([  
    [1, 0, 0],  
    [0, -1, 0],  
    [0, 0, 1]  
])
```

```
x = np.array([  
    [3], [4], [5]  
])
```

```
y = T1 @ x
```

```
print("對xz平面鏡射後的像\n", y)
```

對xz平面鏡射後的像

```
[[ 3]  
 [-4]  
 [ 5]]
```

題庫n：x軸正交投影後的像(page. 379)

- ➡ 利用矩陣乘法方式，求點 $(-3, 1)$ 對x軸的正交投影。

題庫n：x軸正交投影後的像(page. 379)

➡ x軸正交投影：(y=0)

➡ 標準矩陣 $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

➡ 轉換映射的像 $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$

Python 程式碼

```
import numpy as np
```

```
T1 = np.array([  
    [1, 0],  
    [0, 0]  
])
```

```
x = np.array([  
    [-3], [1]  
])
```

```
y = T1 @ x
```

```
print('對x軸的正交投影=\n', y)
```

對x軸的正交投影=

$\begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

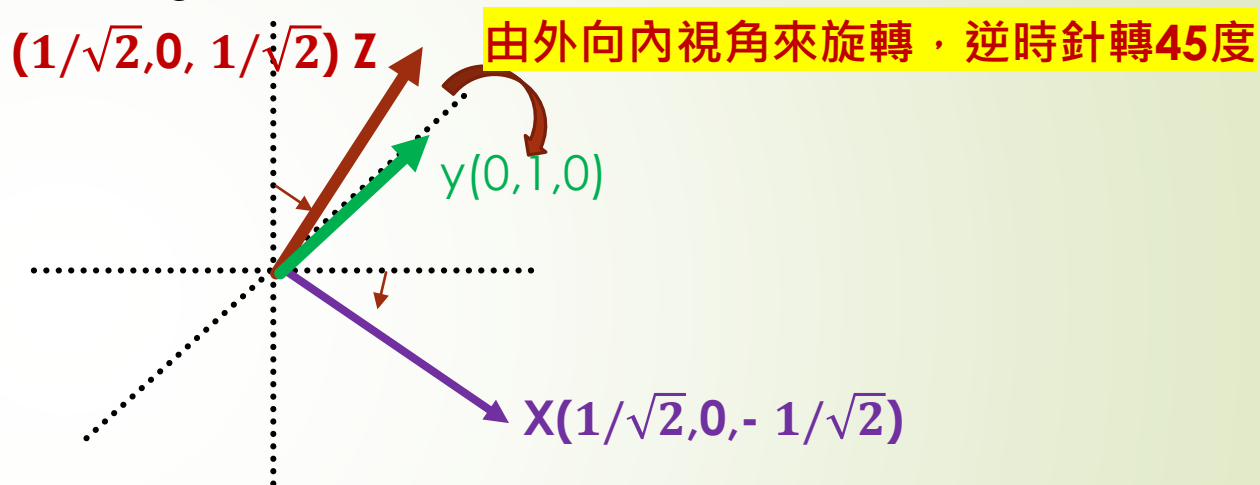
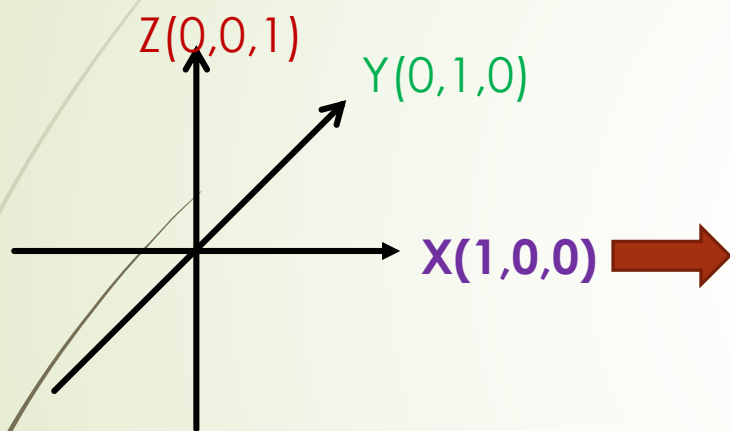
習題10：旋轉 45° 後的像 (page. 379)

➡ 利用矩陣乘法方式，求點 $(-2, 1, 2)$ 進行以下旋轉後的像，以y軸為中心旋轉 45°

➡ 注意：3D的旋轉，例如以y軸為中心旋轉，乃是由外向內的視角旋轉，不是由原點向外視角來旋轉。逆時針為正

習題10：旋轉後的像 (page. 379)

➡ 以y軸為中心旋轉 45° ：(y不變)



➡ 旋轉標準矩陣 $[T] = \begin{bmatrix} \cos(45) & 0 & \sin(45) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(45) & 0 & \cos(45) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

➡ 轉換映射的像 $= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2/\sqrt{2} + 2/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Python 程式碼

```
import numpy as np
rad = np.radians(45)
T1 = np.array([
    [np.cos(rad), 0, np.sin(rad)],
    [0, 1, 0],
    [-np.sin(rad), 0, np.cos(rad)]
])
x = np.array([
    [-2], [1], [2]
])
y = T1 @ x
print('以y軸為中心旋轉45°旋轉後的像=\n', y)
```

以y軸為中心旋轉45°旋轉後的像=

```
[[0.]
 [1.]
 [2.82842712]]
```



9. 各種相對坐標的範例練習

範例9：相對坐標的範例練習

例題 9

令一直角 $x'y'$ 坐標系為另一直角 xy 坐標系逆時針旋轉一個角度 $\theta = \frac{3}{4}\pi$ 後所得。

- (1) 求 xy 坐標為 $Q(-2, 6)$ 之點的 $x'y'$ 坐標。
- (2) 求 $x'y'$ 坐標為 $Q'(5, 2)$ 之點的 xy 坐標。

範例9：相對坐標的範例練習

例題 9

令一直角 $x'y'$ 坐標系為另一直角 xy 坐標系逆時針旋轉一個角度 $\theta = \frac{3}{4}\pi$ 後所得。

- (1) 求 xy 坐標為 $Q(-2, 6)$ 之點的 $x'y'$ 坐標。
- (2) 求 $x'y'$ 坐標為 $Q'(5, 2)$ 之點的 xy 坐標。

- ➡ **注意**：這一題，看似是旋轉變形成像的題目，
- ➡ 但是：這其實是兩個基底相對坐標的題目

(1) 轉移矩陣為 $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, $\theta = \frac{3}{4}\pi$

所以,
$$A = \begin{bmatrix} \cos \frac{3}{4}\pi & -\sin \frac{3}{4}\pi \\ \sin \frac{3}{4}\pi & \cos \frac{3}{4}\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

故
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Q 點的新坐標為 $(x', y') = (4\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ 。

範例9：相對坐標的範例練習

(2) 因

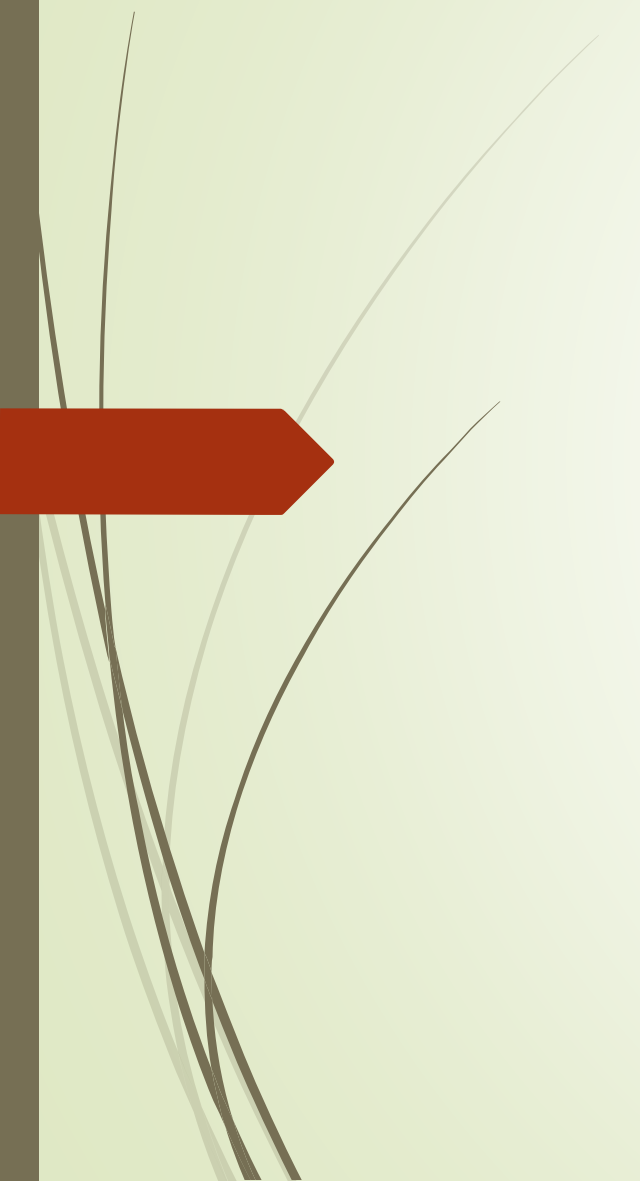
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

故

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2}\sqrt{2} \\ \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Q' 點的新坐標為 $(x, y) = (-\frac{7}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2})$ 。





10. 計算機圖學

電腦繪圖

電腦繪圖

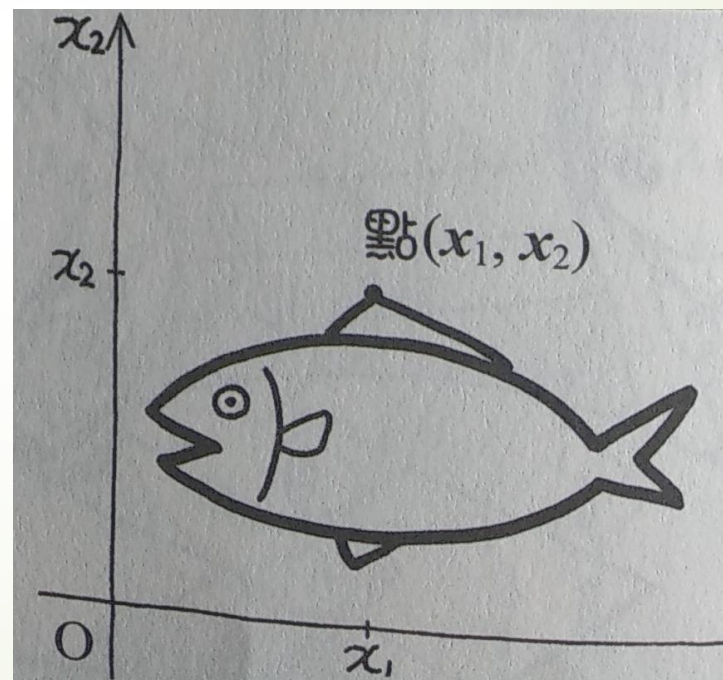
■ 幾個電腦繪圖常用的應用（線性映射）

■ 放大

■ 旋轉

■ 平行移動

■ 透視投影

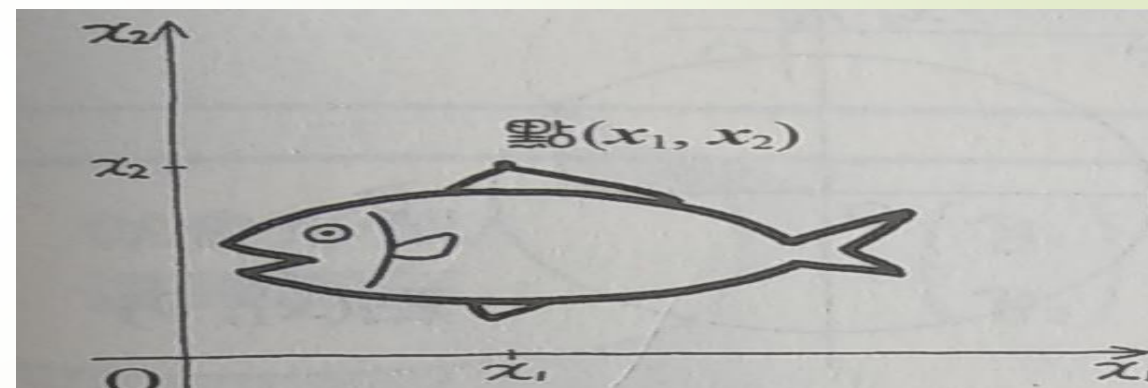
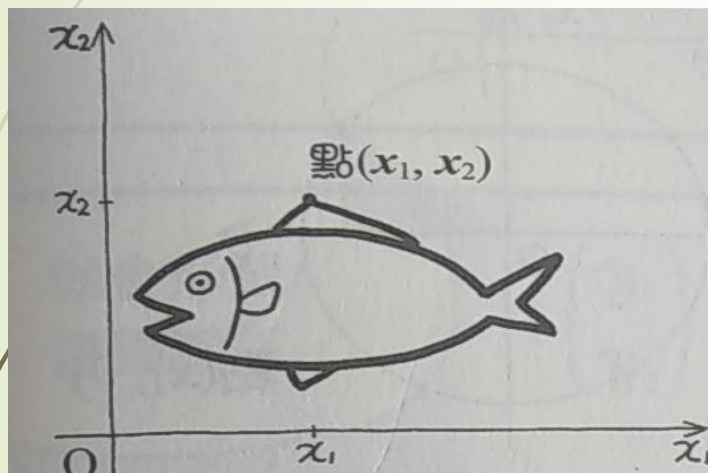


電腦繪圖：放大，縮放

將圖做 $\begin{cases} \text{延 } x_1 \text{ 軸方向乘以 } \alpha \text{ 倍} \\ \text{延 } x_2 \text{ 軸方向乘以 } \beta \text{ 倍} \end{cases}$



形成 $\begin{cases} y_1 = \alpha x_1 \\ y_2 = \beta x_2 \end{cases}$



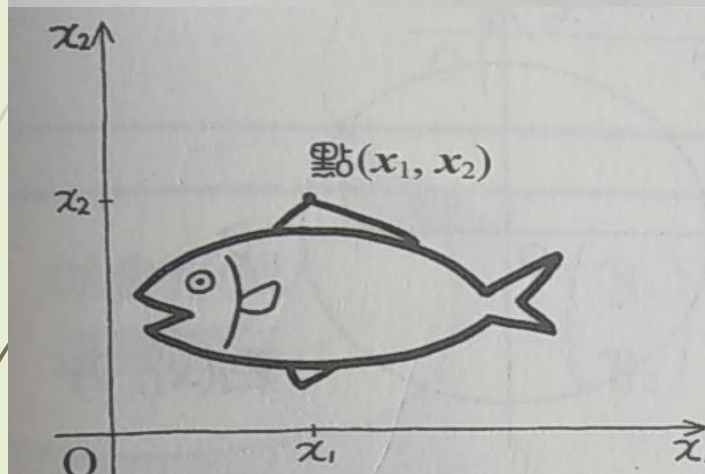
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \beta x_2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$



只要運用「由二次方陣 $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ 所決定，
從 R^2 到 R^2 的線性映射 f 」就可以。

電腦繪圖：放大，縮放

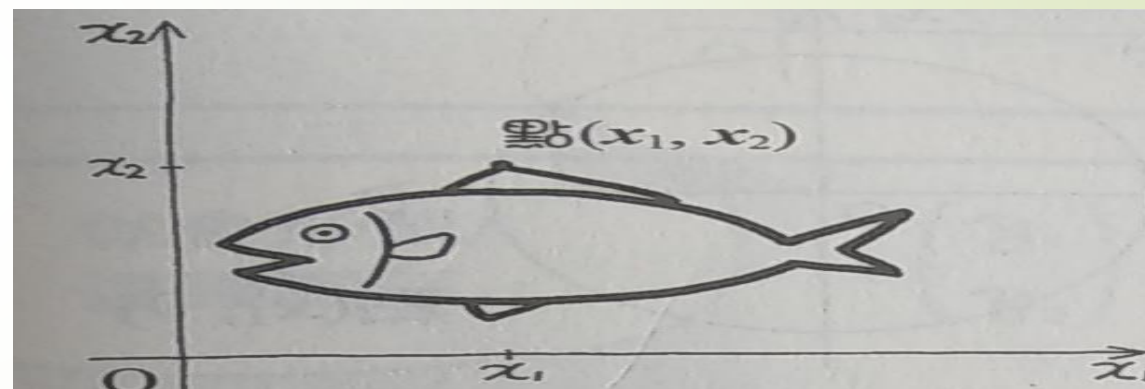
將圖做 $\begin{cases} \text{延 } x_1 \text{ 軸方向乘以 } \alpha \text{ 倍} \\ \text{延 } x_2 \text{ 軸方向乘以 } \beta \text{ 倍} \end{cases}$



$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \beta x_2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

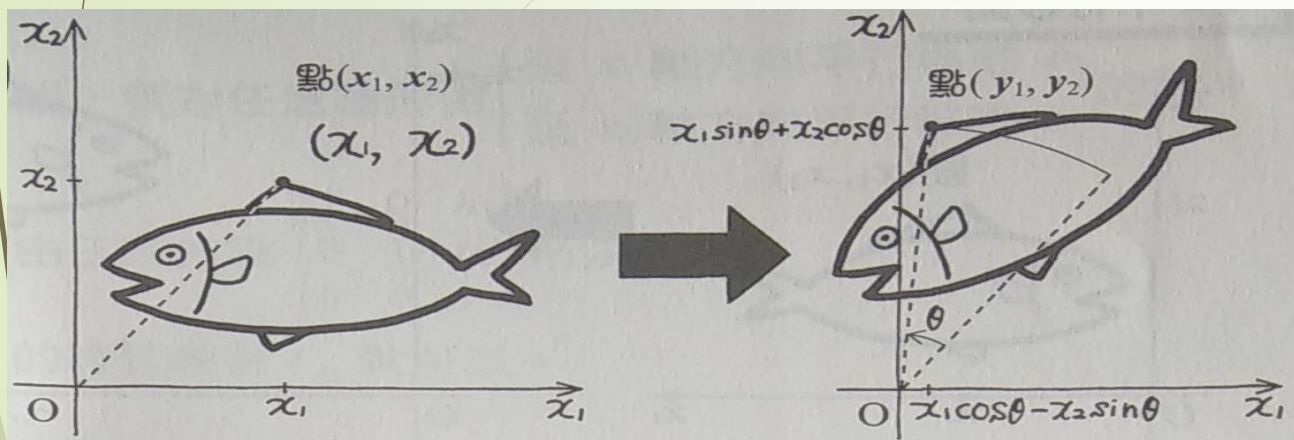


形成 $\begin{cases} y_1 = \alpha x_1 \\ y_2 = \beta x_2 \end{cases}$

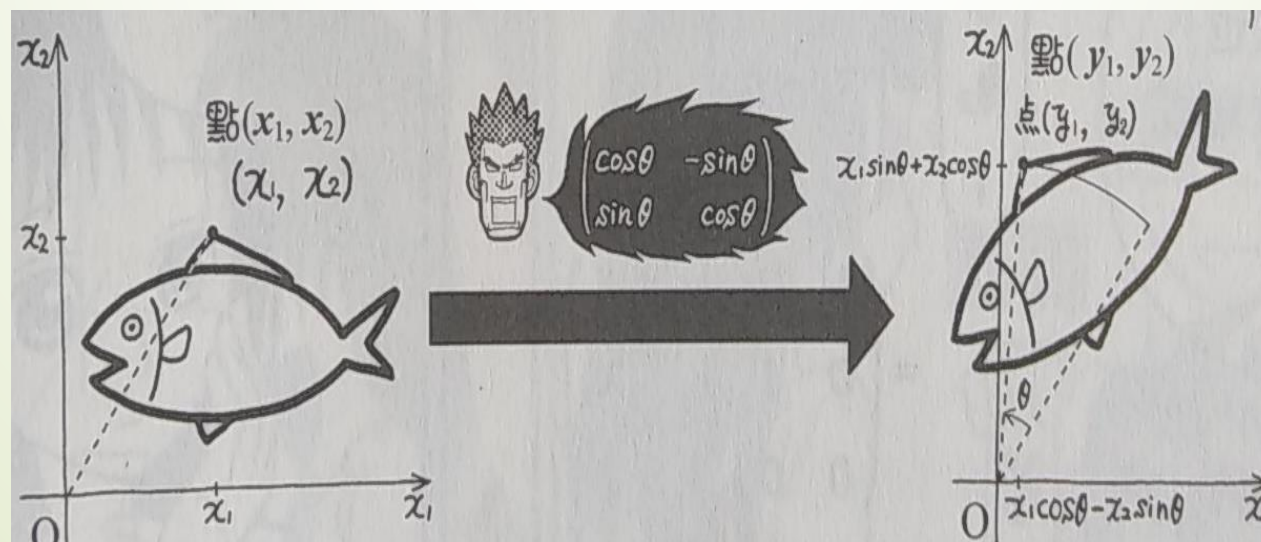


只要運用「由二次方陣 $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ 所決定，
從 R^2 到 R^2 的線性映射 f 」就可以。

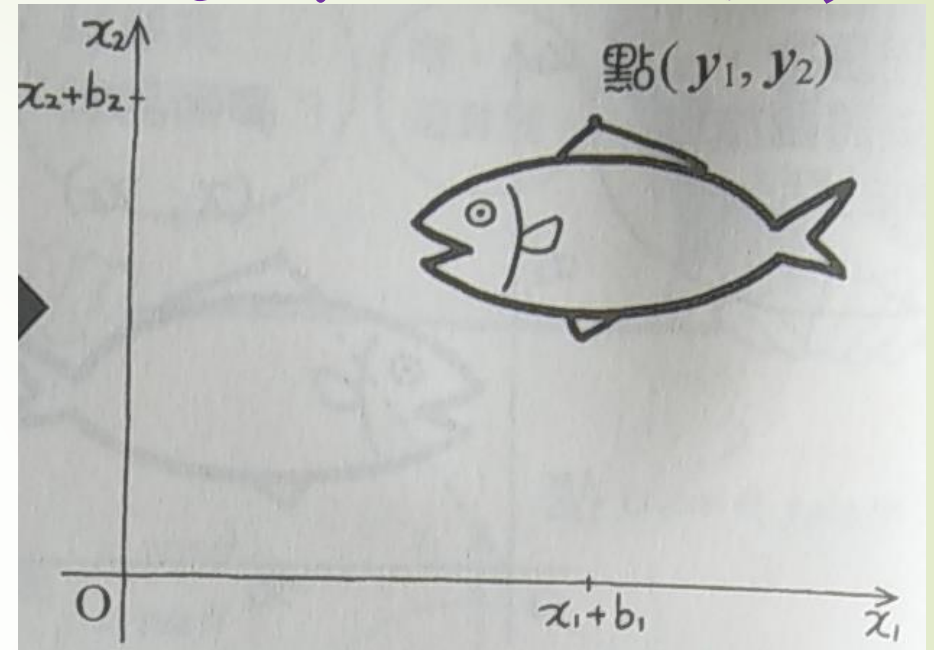
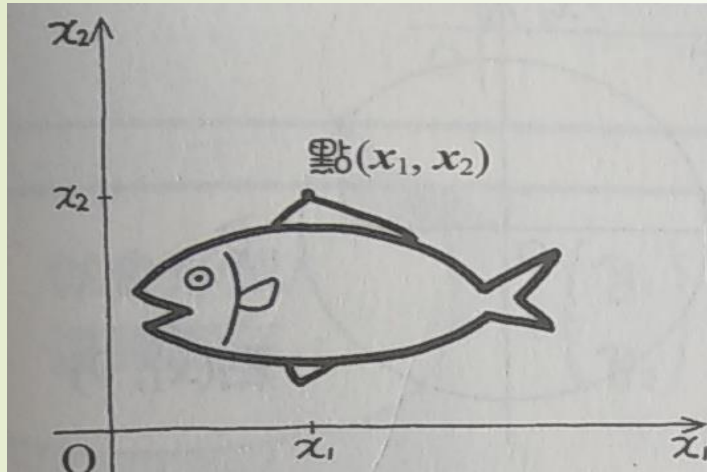
電腦繪圖：旋轉



$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta \\ x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$



電腦繪圖：平移(不是線性映射)



將圖做 $\begin{cases} \text{延 } x_1 \text{ 軸方向平行移動 } b_1 \\ \text{延 } x_2 \text{ 軸方向平行移動 } b_2 \end{cases}$



形成 $\begin{cases} y_1 = x_1 + b_1 \\ y_2 = x_2 + b_2 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + b_1 \\ x_2 + b_2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$



電腦繪圖(3D寫法)：平移

➡ 電腦繪圖，一般都是用3D矩陣

➡ 2D矩陣寫法：
$$\begin{bmatrix} y1 \\ y2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b1 \\ b2 \end{bmatrix}$$

➡ 3D矩陣寫法：
$$\begin{bmatrix} y1 \\ y2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b1 \\ 0 & 1 & b2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



電腦繪圖(3D寫法)：縮放

➡ 電腦繪圖，一般都是用3D矩陣

➡ 2D矩陣寫法：
$$\begin{bmatrix} y1 \\ y2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix}$$

➡ 3D矩陣寫法：
$$\begin{bmatrix} y1 \\ y2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



電腦繪圖(3D寫法)：旋轉

➡ 電腦繪圖，一般都是用3D矩陣

➡ 2D矩陣寫法：
$$\begin{bmatrix} y1 \\ y2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix}$$

➡ 3D矩陣寫法：
$$\begin{bmatrix} y1 \\ y2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

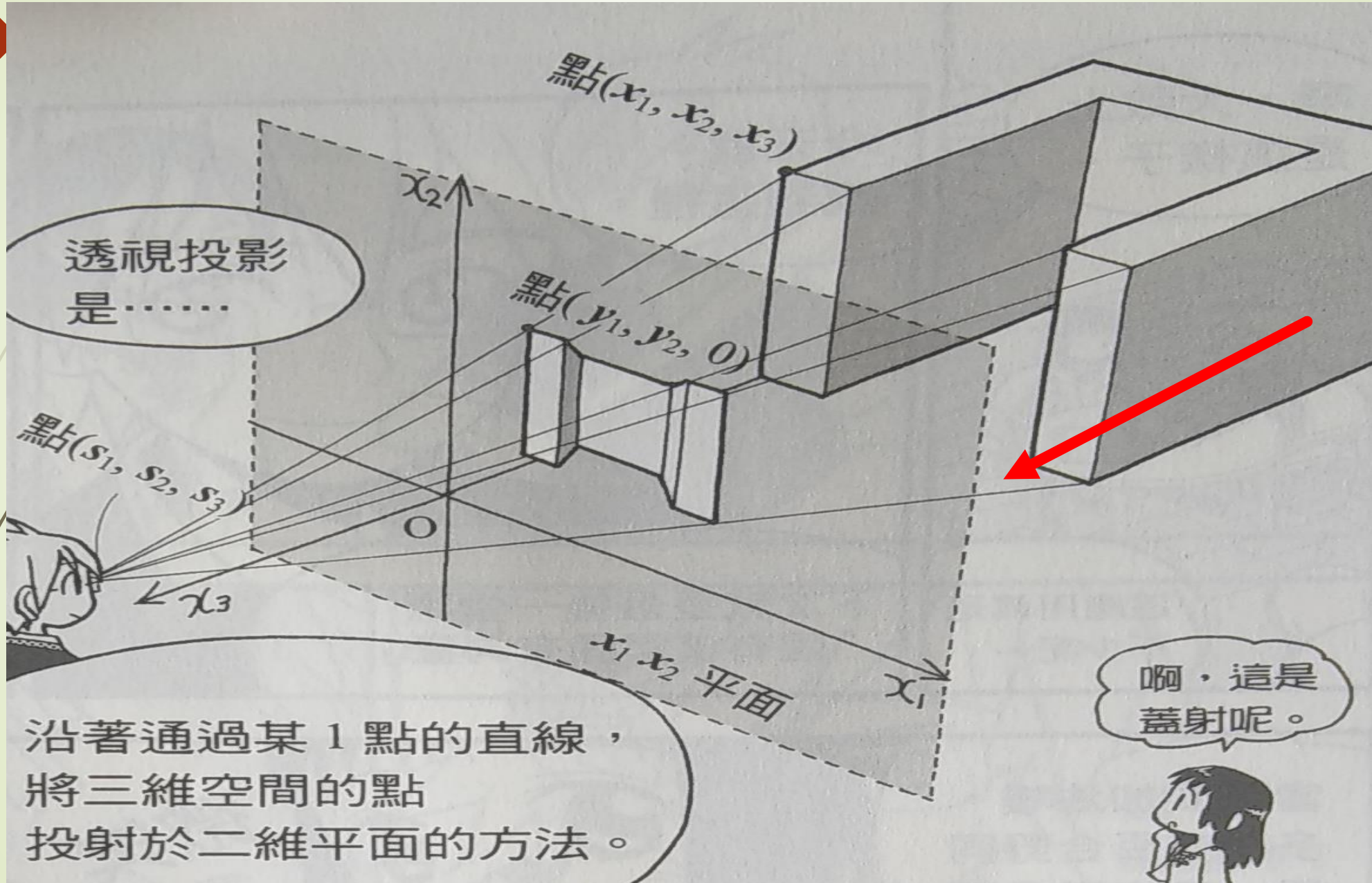


電腦繪圖(3D寫法)

	平常計算時的線性映射	應用在電腦繪圖中的線性映射
放 大	$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$
旋 轉	$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$
平行移動	$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ※這項不是線性映射。	$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$



透視投影：把3D投影到一個2D平面





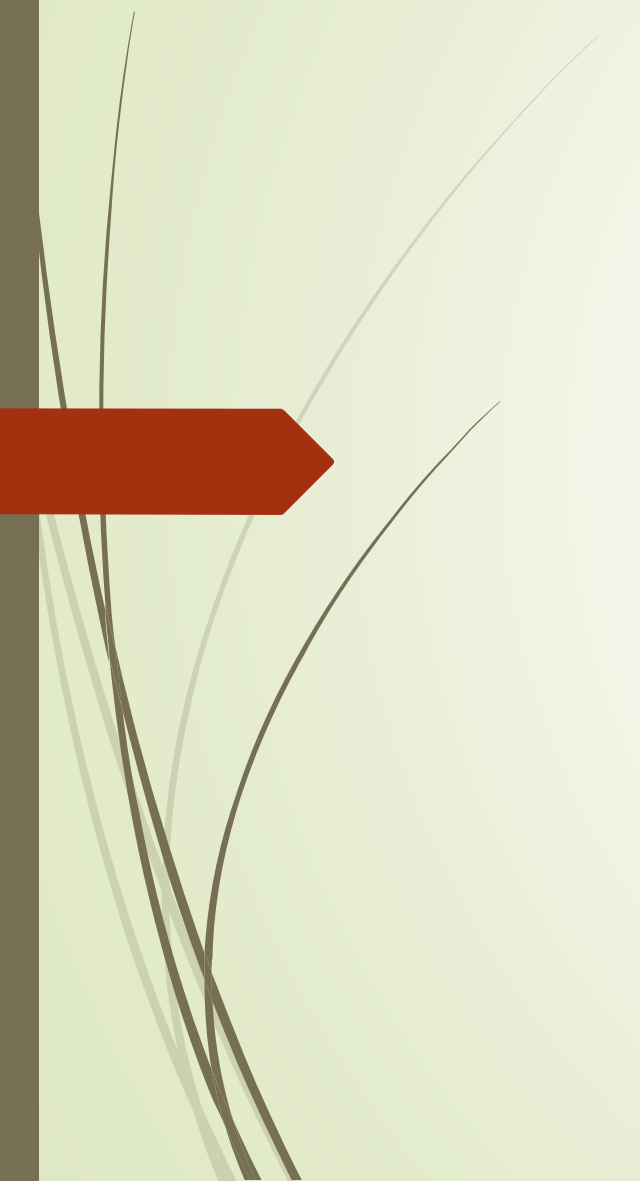
電腦繪圖(3D寫法)：透視投影

➡ 透視投影的標準矩陣：（過程繁雜）

但只要運用「由四次方陣

$$\frac{1}{x_3 - s_3} \begin{pmatrix} -s_3 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & -s_3 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -s_3 \end{pmatrix} \quad \text{所決定}$$

從 R^4 到 R^4 的線性映射 f 」就可以。



11. 線性系統 以 $\Rightarrow$ 轉換, 映射 的視角表示

一對一矩陣轉換

- 若矩陣轉換 $T_A: R^n \rightarrow R^m$ 將 R^n 中的不同向量（點）映射到 R^m 中的不同向量（點），則稱 T_A 為一對一

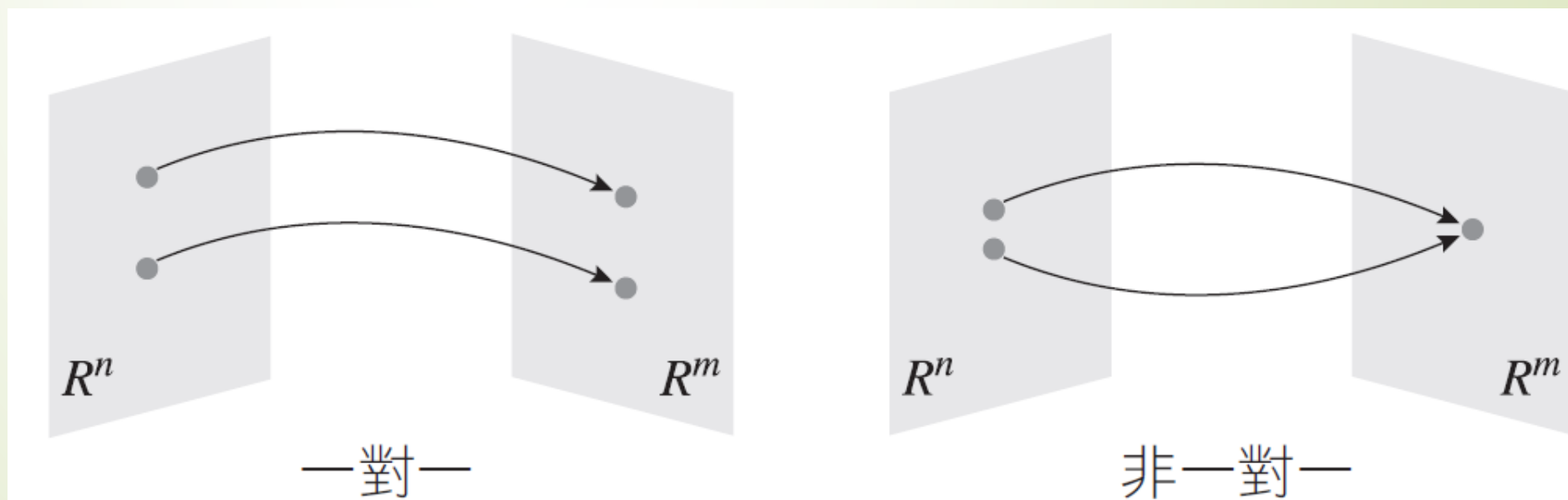
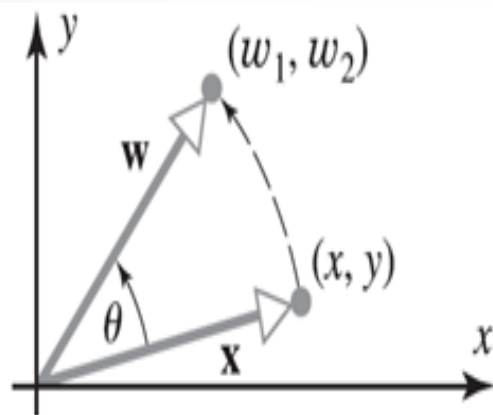


圖 7.1.7

R^2 中的旋轉算子為一對一

- ➡ $T: R^n \rightarrow R^n$ 為 R^2 中將向量旋轉 θ 角的一對一旋轉算子
- ➡ 定理 7.1.3 確認 $[T]$ 為可逆矩陣

以原點為中心逆時針
旋轉 θ 角

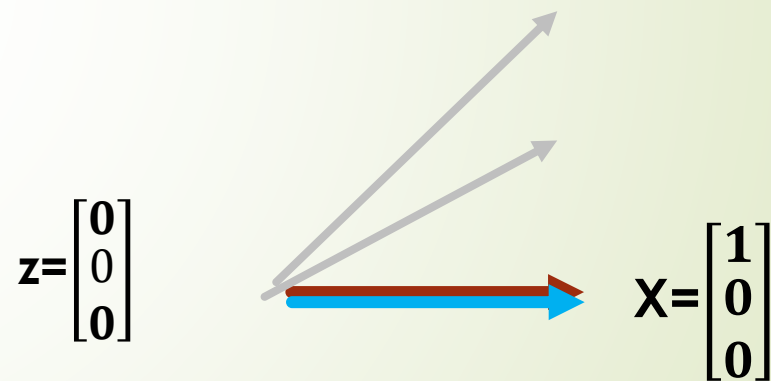


$$\begin{aligned}w_1 &= x \cos \theta - y \sin \theta \\w_2 &= x \sin \theta + y \cos \theta\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

投影算子非一對一

- ➡ $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 為 $\mathbb{R}^3$ 中將向量投影 xy -平面，其非為一對一算子。
- ➡ 定理 7.1.3 確認 $[T]$ 為不可逆矩陣

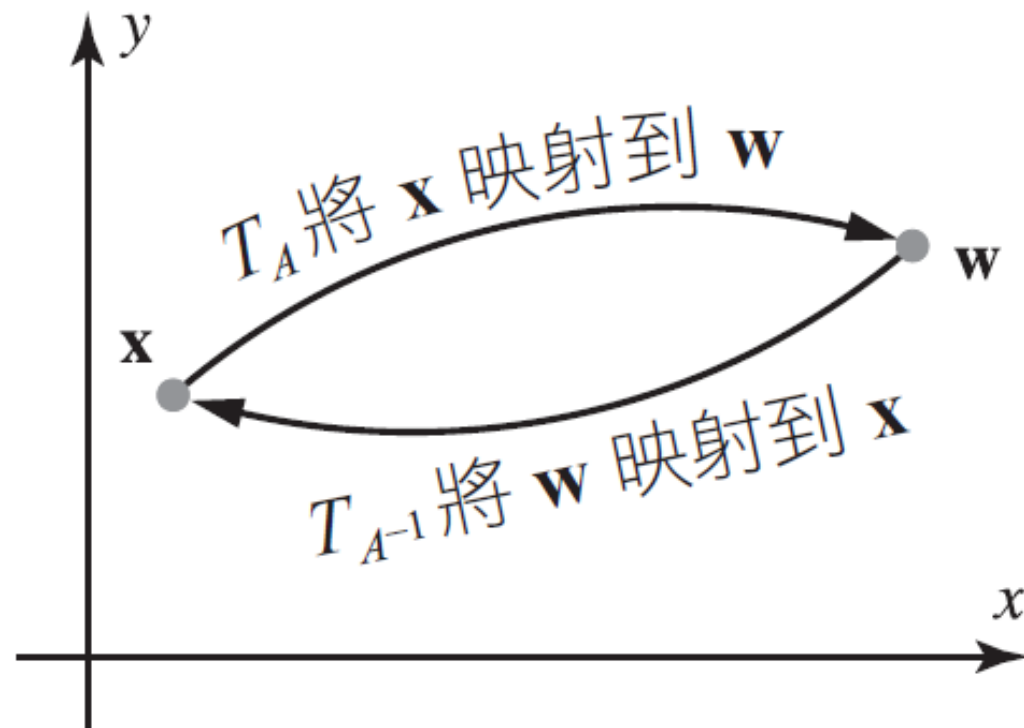


一對一矩陣算子的反轉換

$$T_{A^{-1}}(\mathbf{w}) = T_{A^{-1}}(T_A(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$$

$$T_{A^{-1}} = T_A^{-1}$$

$$[T^{-1}] = [T]^{-1}$$



➡ 圖 7.1.10

範例9：求 T^{-1}

➡ $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 算子定義為 (page. 338)

$$w_1 = 2x_1 + x_2$$

$$w_2 = 3x_1 + 4x_2$$

➡ 求 $T^{-1}(w_1, w_2)$

範例9：求 T^{-1}

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = 2x_1 + x_2$$

$$w_2 = 3x_1 + 4x_2$$

➡ 映射標準矩陣 $[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (page. 338)

$$\text{➡ } [T^{-1}] = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}{8-3} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}}{5}$$

由基底向量的像求線性轉換

➡ 若 $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 為 V 的基底，
則 V 中任何向量的像可被表示為

$$T(v) = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + \dots + c_n T(v_n) \quad (3)$$

➡ 其中，係數 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 即為將 v
表示為基底 S 中向量之線性組合的係數

(page. 346)

範例10：求基底向量之像(page. 346)

➡ 考慮 R^3 中之基底 $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ ，其中

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 1, 0), \quad v_3 = (1, 0, 0)$$

➡ 令 $T: R^3 \rightarrow R^2$ 為線性轉換，且

$$T(v_1) = (1, 0), \quad T(v_2) = (2, -1), \quad T(v_3) = (4, 3)$$

➡ (1). 求 $T(x_1, x_2, x_3)$ 之轉換公式

➡ (2). 計算 $T(2, -3, 5)$ 之結果

範例10：求基底向量之像(page. 346)

➡ 輸入向量是3D, 輸入向量是2D，所以這是個3x2轉換

➡ (1). 求 $T(x_1, x_2, x_3)$ 之轉換公式

➡ (2). 計算 $T(2, -3, 5)$ 之結果

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = T(v)$$

➡ $a+b+c=1$

➡ $d+e+f=0$

➡ $a+b=2$

➡ $d+e=-1$

➡ $a=4$

➡ $d=3 \Rightarrow b=-2, e=4, c=-1, f=1$

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$$

$$T(\mathbf{v}_1) = (1, 0), \quad T(\mathbf{v}_2) = (2, -1), \quad T(\mathbf{v}_3) = (4, 3)$$

範例10：求基底向量之像(page. 346)

輸入向量是3d, 輸入向量是2D, 所以這是個3x2轉換

➡ (1). 求 $T(x_1, x_2, x_3)$ 之轉換公式

➡ (2). 計算 $T(2, -3, 5)$ 之結果

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = T(v)$$

$$\Rightarrow a=4, b=-2, c=-1, d=3, e=-4, f=1$$

$$\Rightarrow (1). [T] = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (2). \text{計算 } T(2, -3, 5) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 23 \end{bmatrix}$$