線性代數第13章
核空間kernel，
像空間images，值域range

陳擎文老師

1. 典型範例

碩士班考題

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ x_1 - x_3 - 2x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{Ax}$$

(1) Find a basis for Im ($\mathbf{A}$)

(2) Find a basis for ker ($\mathbf{A}$)

(3) Find an orthonormal basis for Im ($\mathbf{A}$) （91 交大資工）

碩士班考題

例 3： Let $T: R^3 \rightarrow R^4$ be a linear transformation represented by the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

relative to the standard bases of R^3 and R^4. Find the bases for the kernel and image of T （清大資工）

碩士班考題

例 20： $T: R^2 \to R^2$，$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$，$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$

(1) $T\left(\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}\right)=$?

(2) $\ker(T)=$?

(3) $\mathrm{Im}(T)=$?

(4) T 是否為一對一映射？ （交大電子）

碩士班考題

例 8： 給定矩陣 $\mathbf{A}$ 及向量 $\mathbf{b}$ 試以高斯消去法解 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，並為 ker (A) 定一組基底

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&3&1&4&-9\\1&1&1&1&-3\\1&1&1&2&-5\\2&2&2&3&-8\end{bmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{bmatrix}17\\6\\8\\14\end{bmatrix}$$

（83 台大電機）

碩士班考題

例 20： $T: R^2 \to R^2$，$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$，$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$

(1) $T\left(\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}\right)=$ ？

(2) $\ker(T)=$ ？

(3) $\operatorname{Im}(T)=$ ？

(4) T 是否為一對一映射？ （交大電子）

典型題庫1：求rank(A),dim(ker(A))

- 典型研究所考試題目

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix},$$

(a) $\text{rank}(A)=$?

(b) $\dim[\ker(A)]=$?

(c)為 ker (A)與 Im (A)找出一組基底 （交大控制）

典型題庫1：線性映射是否為一對一轉換

- 典型研究所考試題目

設 $T:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^3$ 爲線性運算子，且 $T(1,1)=(1,0,2)$，$T(2,3)=(1,-1,4)$，則

(1)$T(8,11)=?$　(2)T 是否爲一對一？

典型題庫2：線性映射是否為一對一轉換

- 典型研究所考試題目

8. 試決定下列變換是否爲一對一，映成，或兩者皆非：

(1) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，$T(x, y) = (x + y, x - y)$；

(2) $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$，$T(x, y, z) = (x + 2y, y - z)$；

(3) $T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$，$T(x, y) = (x - 3y, y, 0)$；

(4) $T_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，$T(x, y, z) = (x + 2y, y + z, 0)$。

典型題庫2：線性映射是否為一對一轉換

- 典型研究所考試題目

8. 試決定下列變換是否爲一對一，映成，或兩者皆非：

(1) $T_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$，$T(x,y)=(x+y,x-y)$；

(2) $T_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$，$T(x,y,z)=(x+2y,y-z)$；

(3) $T_3:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$，$T(x,y)=(x-3y,y,0)$；

(4) $T_4:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$，$T(x,y,z)=(x+2y,y+z,0)$。

典型題庫3：求線性映射的Ker(T)，nullity(T), R(T), rank(T)

- 典型研究所考試題目

7. 若 $T(X)=AX$ 爲線性變換，求 Ker(T)、nullity(T)、R(T)、rank(T)。

(1)$A=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$；(2)$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$；(3)$A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\\0&1\end{bmatrix}$；(4)$A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$；

(5)$A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\-2&2&-4\end{bmatrix}$；(6)$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\0&0&1\end{bmatrix}$；(7)$A=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\2&1&3&1\\-1&0&-2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$。

典型題庫4：線性映射是否為一對一轉換

- 典型研究所考試題目

設 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 爲線性運算子，且 $T(1,1)=(1,0,2)$，$T(2,3)=(1,-1,4)$，則

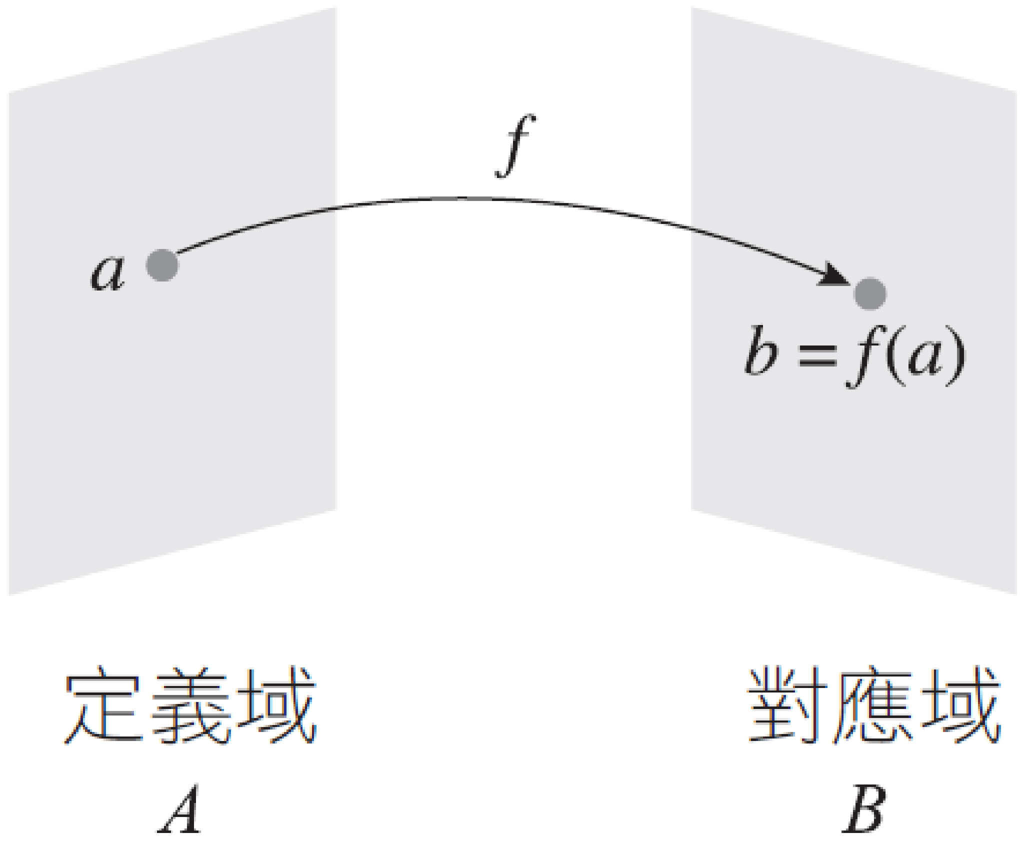
(1) $T(8,11)=?$

(2) T 是否爲一對一？

2. 線性系統以=>轉換, 映射的視角表示

R^n 至 R^m 的矩陣轉換

- 若 V 和 W 為向量空間，
- 且 f 為定義域是 V、對應域是 W 的函數，
- 則稱 f 為從 V 到 W 的轉換（transformation）
- 或稱 f 將 V 映射（maps）到 W
- 且記作：$f : V \to W$



➲ 圖 7.1.1

R^n 至 R^m 的矩陣轉換

$$
\begin{aligned}
w_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
w_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\vdots &\qquad \vdots \\
w_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

矩陣轉換

$$
\begin{aligned}
w_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
w_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
\vdots &\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
w_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n
\end{aligned}
$$

R^n 至 R^m 的矩陣轉換

- 1. 線性系統的視角：

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = A\mathbf{x}$$

A為標準矩陣

- 2. 函數轉換的視角：
  - 轉換，映射
  - 矩陣轉換

數學式：$\mathbf{w} = T_A(\mathbf{x})$

圖形式：$\mathbf{x} \xrightarrow{T_A} \mathbf{w}$

唸法：　讀作「T_A 映射 x 到 w」。

由基底向量的像求線性轉換

- 若 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 為 V 的基底，則 V 中任何向量的像可被表示為

$$T(\mathbf{v}) = c_1 T(\mathbf{v}_1) + c_2 T(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_n T(\mathbf{v}_n) \qquad (3)$$

- 其中，係數 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 即為將 $\mathbf{v}$ 表示為基底 S 中向量之線性組合的係數

(page. 346)

範例10：求基底向量之像(page. 346)

- 考慮 R^3 中之基底 $S=\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$，其中

$$\mathbf{v}_1=(1,1,1), \quad \mathbf{v}_2=(1,1,0), \quad \mathbf{v}_3=(1,0,0)$$

- 令 $T: R^3 \rightarrow R^2$ 為線性轉換，且

$$T(\mathbf{v}_1)=(1,0), \quad T(\mathbf{v}_2)=(2,-1), \quad T(\mathbf{v}_3)=(4,3)$$

- (1). 求 $T(x_1, x_2, x_3)$ 之轉換公式
- (2). 計算 $T(2, -3, 5)$ 之結果

範例10：求基底向量之像(page. 346)

- 輸入向量是3D, 輸入向量是2D，所以這是個3x2轉換
- (1). 求 $T(x_1, x_2,$ $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$
- (2). 計算 $T(2, -3$ $T(\mathbf{v}_1) = (1, 0), \quad T(\mathbf{v}_2) = (2, -1), \quad T(\mathbf{v}_3) = (4, 3)$

方法1：

- $[T]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$
- $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$
- $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

範例10：求基底向量之像(page. 346)

方法2：

- 輸入向量是3D, 輸入向量是2D，所以這是個3x2轉換
- (1). 求 $T(x_1, x_2, x_3)$ 之轉換公式
- (2). 計算 $T(2, -3, 5)$ 之結果
- $=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = [T]\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}$=T(v)
- a+b+c=1
- d+e+f=0
- a+b=2
- d+e=-1
- a=4
- d=3 => b=-2, e==4, c=-1, f=1

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$$

$$T(\mathbf{v}_1) = (1, 0), \quad T(\mathbf{v}_2) = (2, -1), \quad T(\mathbf{v}_3) = (4, 3)$$

範例10：求基底向量之像(page. 346)

方法2：

- 輸入向量是3d, 輸入向量是2D，所以這是個3x2轉換
- (1). 求 $T(x_1, x_2, x_3)$ 之轉換公式
- (2). 計算 $T(2, -3, 5)$ 之結果
- $=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = [T]\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}$=T(v)
- a=4, b=-2, c=-1, d=3, e==4, f=1
- (1). $[T]=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$
- (2). 計算 $T(2, -3, 5) =\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ 23 \end{bmatrix}$

3. 核空間kernel：核(kernel)：ker(T)=kernel(T)

像空間images，

值域(range)：R(T)=range(T)=像空間Img f

核與值域(像空間) page. 348

- (1).核(kernel)：ker(T) 或 kernel(T)
  - 若 $T: V \to W$ 為線性轉換 $W=T_A x= [T]x = 0$
  - V 中可被 T 映射到0，的所有向量所成集合稱為 T 的核（kernel）
  - 記作 ker(T) 或 kernel(T)，或Ker f
- (2).值域(range)：R(T) 或 range(T)
  - W 中所有由 V 映射而來的像（images）所成集合稱為 T 的值域（range）
  - 記作值域$R(T)$ 或 range(T)，
  - 或像空間Img f

核空間： *ker(T)，或Ker f*

- (1).核(kernel)：ker(T) 或 kernel(T) （page.348）

  $W=T_A x= [T]x = 0$

  - 若 $T: V \to W$ 為線性轉換
  - V 中可被 T 映射到0，的所有向量所成集合稱為 T 的核（kernel）
  - 記作 ker(T) 或 kernel(T)，或Ker f

- (2).物理意義：
- 有一組x向量，經過[T]矩陣轉換後，會投射到[0]零空間
- 這組x向量，就是核空間
- 就是會映射到零空間的x輸入向量，就是核空間Ker f

核空間： *ker(T)*，或*Ker f*（page.348）

- (1).核(kernel)：ker(T) 或 kernel(T)
- (2).物理意義： $W=T_A\ x= [T]x = 0$
  - 就是會映射到零空間的x輸入向量，就是核空間Ker f
- (3).數學表示式：
  - 是集合(空間)
  - 是輸入向量（x1,x2..）
  - 會讓y=0的x向量集合
- 範例：

$$\ker f = \left\{ \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\}$$

y=[T]x

值域(R(T)，range(T) ＝像空間Img f

- (1).值域(range)：R(T) 或 range(T) （page.348）
  - *W* 中所有由 *V* 映射而來的像（images）所成集合稱為 *T* 的值域（range）
  - 記作值域*R*(*T*) 或 range(*T*)，
  - 或像空間Img f

$W=T_A\, x= [T]x$

- (2).物理意義：
- 有一組x向量，經過[T]矩陣轉換後，會投射到*W*空間
- 這個映射後的結果W空間，就映射後的成像=W=像空間Img f
- 這個映射後的成像=W=也稱為值域R(T)，range(T)

值域(R(T)，range(T)) ＝像空間Img f

- (1). 值域＝R(T)＝像空間Img f （page. 348）
- (2). 物理意義：

$W=T_A x= [T]x$

- x向量經過[T]矩陣轉換後，會投射到*W*空間成像W=像空間Img f
- (3). 數學表示式：
  - 是集合(空間)，是輸出向量（y1,y2..）
  - 會讓x向量座標轉換後的新集合
- 範例：

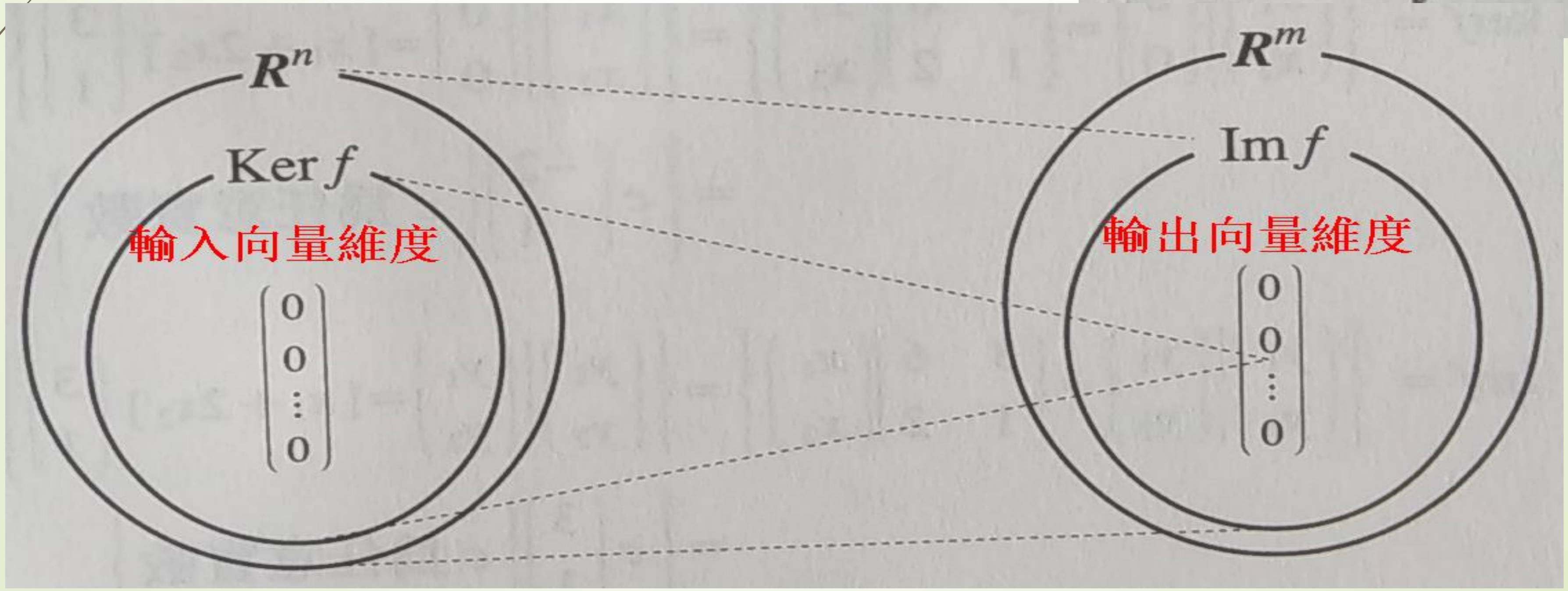
y=[T]x

$$\operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} =$$

維度定理=秩-零度定理

- 輸入向量空間的維度n = rank + nullity的數目
- n = dim:Imf+ dim:Kerf

$$n-\dim\mathrm{Ker}\, f=\dim\mathrm{Im}\, f$$



範例1：求像空間，核空間？

- 若映射f是由$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$所決定，請問從$R^2$到$R^2$的線性映射的像空間Im$f$，核空間Ker$f$為何？

範例1：求像空間，核空間？

- 若映射f是由$\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$所決定，請問從$R^2$到$R^2$的線性映射的**像空間Im$f$**，核空間**Ker$f$**為何？
- (1). [T]=$\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix}0 & -5\\1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$
- **(2). Rank=2 => dim:Imf=2, dim:Kerf=0**
  - Det($\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$)=5，有唯一解
- **(3). 像空間Imf=$\left\{\begin{bmatrix}y1\\y2\end{bmatrix} \middle| \ldots\right\}$**
  - =$\left\{\begin{bmatrix}y1\\y2\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}y1\\y2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x1\\x2\end{bmatrix}\right\} R^2$
  - =$\left\{\begin{bmatrix}y1\\y2\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}y1\\y2\end{bmatrix} = x1\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + x2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\} R^2$

像空間維度=2

範例1：求像空間，核空間？

- (4). 核空間Ker f=$\left\{\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} \middle| \dots \right\}$
  - =$\left\{\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} R^2$
  - =$\left\{\begin{bmatrix} x1 \\ \mathrm{x2} \end{bmatrix} \middle| x1\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} R^2$
  - 因為 (3, 1)與 (1, 2)為線性獨立，
  - 所以，只有x1=0, x2=0一種可能
  - 核空間==$\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \text{零空間} \right\}$ ➡ **核空間維度=0**
- (5). 輸入變數空間維度=2
  - Rank=2 =>像空間維度= dim:Imf=2
  - 核空間維度= dim:Kerf=0

範例1：Python程式碼

```
from sympy import *
M = Matrix([
    [3,1],
    [1,2]
    ])
M_nullsapce = M.nullspace()
M_columnspace = M.columnspace()
M_rank = M.rank()
M_dim = M.shape[1]
M_nullity = M_dim - M_rank
print('線性轉換後有壓縮空間 = 核空間向量集合 = null space=\n', M_nullsapce)
print('輸出空間的向量之線性組和= column space= \n', M_columnspace)
print('輸入空間維度 = input dimension of M=', M_dim)
print('輸出空間維度 = rank(M)=', M_rank)
print('核空間維度 = 被轉換壓縮的空間維度 = nullity=', M_nullity)
```

```
線性轉換後有壓縮空間 = 核空間向量集合 = null space=
 []
輸出空間的向量之線性組和= column space=
 [Matrix([
[3],
[1]]), Matrix([
[1],
[2]])]
輸入空間維度 = input dimension of M= 2
輸出空間維度 = rank(M)= 2
核空間維度 = 被轉換壓縮的空間維度 = nullity= 0
```

範例2：求像空間，核空間？

- 若映射f是由$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$所決定，請問從$R^2$到$R^2$的線性映射的像空間$\mathrm{Im}f$，核空間$\mathrm{Ker}f$為何？

範例2：求像空間，核空間？

- 若映射f是由$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$所決定，請問從$R^2$到$R^2$的線性映射的像空間Im$f$，核空間Ker$f$為何？
- (1). $[T]=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，有降階，空間被壓縮到零空間
- (2). Rank=1 => dim:Imf=1, dim:Kerf=1
  - Det($\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$)=0，無限多解，或無解
- (3). 像空間Imf=$\left\{\begin{bmatrix} y1 \\ y2 \end{bmatrix} \middle| \dots \right\}$
  - $=\left\{\begin{bmatrix} y1 \\ y2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} y1 \\ y2 \end{bmatrix} = x1\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2x2\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} R^2$
  - $=\left\{\begin{bmatrix} y1 \\ y2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} y1 \\ y2 \end{bmatrix} = (x1 + 2x2)\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} R^2$
  - $=\left\{c1\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| c1\text{為任意實數}\right\} R^2$

像空間維度=1

範例2：求像空間，核空間？

- (4). 核空間Ker $f=\left\{\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} \middle| \ldots \right\}$
- $=\left\{\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \boldsymbol{R}^2$
- $=\left\{\begin{bmatrix} x1 \\ \mathrm{x2} \end{bmatrix} \middle| x1\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2x2\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \boldsymbol{R}^2 = \left\{\begin{bmatrix} x1 \\ \mathrm{x2} \end{bmatrix} \middle| (x1 + 2x2)\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \boldsymbol{R}^2$
- 因為x1=−2x2，所以(x1, x2)=（−2, 1）向量
- $=\left\{c1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| c1\text{為任意實數}\right\} \boldsymbol{R}^2$
- 核空間$==\left\{c1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| c1\text{為任意實數}\right\}$

核空間維度=1

- (5). 輸入變數空間維度=2
- Rank=1 =>像空間維度= dim:Imf=1
- 核空間維度= dim:Kerf=1

範例2：Python程式碼

```
from sympy import *
M = Matrix([
    [3,6],
    [1,2]
    ])
M_nullsapce = M.nullspace()
M_columnspace = M.columnspace()
M_rank = M.rank()
M_dim = M.shape[1]
M_nullity = M_dim - M_rank
print('線性轉換後有壓縮空間 = 核空間向量集合 = null space=\n', M_nullsapce)
print('輸出空間的向量之線性組和= column space= \n', M_columnspace)
print('輸入空間維度 = input dimension of M=', M_dim)
print('輸出空間維度 = rank(M)=', M_rank)
print('核空間維度 = 被轉換壓縮的空間維度 = nullity=', M_nullity)
```

```
線性轉換後有壓縮空間 = 核空間向量集合 = null space=
 [Matrix([
[-2],
[ 1]])]
輸出空間的向量之線性組和= column space=
 [Matrix([
[3],
[1]])]
輸入空間維度 = input dimension of M= 2
輸出空間維度 = rank(M)= 1
核空間維度 = 被轉換壓縮的空間維度 = nullity= 1
```

範例3：求像空間，核空間？

- 若映射f是由$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$所決定，請問從$R^2$到$R^3$的線性映射的像空間Im$f$，核空間Ker$f$為何？

範例3：求像空間，核空間？

- 若映射f是由$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$所決定，請問從$R^2$到$R^2$的線性映射的像空間Im$f$，核空間Ker$f$為何？
- (1). $[T]=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$
- (2). Rank=2 => dim:Imf=2, dim:Kerf=0
- (3). 像空間Imf=$\left\{\begin{bmatrix}y1\\y2\\y3\end{bmatrix} \middle| \ldots\right\}$
  - $=\left\{\begin{bmatrix}y1\\y2\\y3\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}y1\\y2\\y3\end{bmatrix}=x1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+x2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\} R^2$
  - $=\left\{c1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \middle| c1c2\text{為任意實數}\right\} R^3$

雖然是3d
但像空間維度=2

範例3：求像空間，核空間？

- (4). 核空間Ker f=$\left\{\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} \middle| \ldots \right\}$
  - =$\left\{\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} R^2$
  - =$\left\{\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} \middle| x1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$
  - 因為 (1,0,0)與 (0,1,0)為線性獨立，所以，只有x1=0,x2=0一種可能
  - =$\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| c1\text{為任意實數} \right\} R^2$
  - 核空間==$\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \text{零空間} \right\}$

核空間維度=0

- (5). 輸入變數空間維度=2
  - Rank=2 =>像空間維度= dim:Imf=2
  - 核空間維度= dim:Kerf=0

範例3：Python程式碼

```python
from sympy import *
M = Matrix([
    [1,0],
    [0,1],
    [0,0]    ])
M_nullsapce = M.nullspace()
M_columnspace = M.columnspace()
M_rank = M.rank()
M_dim = M.shape[1]
M_nullity = M_dim - M_rank
print('線性轉換後有壓縮空間 = 核空間向量集合 = null space=\n', M_nullsapce)
print('輸出空間的向量之線性組和= column space= \n', M_columnspace)
print('輸入空間維度 = input dimension of M=', M_dim)
print('輸出空間維度 = rank(M)=', M_rank)
print('核空間維度 = 被轉換壓縮的空間維度 = nullity=', M_nullity)
```

```
線性轉換後有壓縮空間 = 核空間向量集合 = null space=
 []
輸出空間的向量之線性組和= column space=
 [Matrix([
[1],
[0],
[0]]), Matrix([
[0],
[1],
[0]])]
輸入空間維度 = input dimension of M= 2
輸出空間維度 = rank(M)= 2
核空間維度 = 被轉換壓縮的空間維度 = nullity= 0
```

範例4：求像空間，核空間？

- 若映射f是由$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$所決定，請問從$R^4$到$R^2$的線性映射的像空間Im$f$，核空間Ker$f$為何？

範例4：求像空間，核空間？

- 若映射f是由$\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 1\\0 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$所決定，請問從$R^2$到$R^2$的線性映射的**像空間**$\mathrm{Im}f$，核空間$\mathrm{Ker}f$為何？
- (1). $[T]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 1\\0 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$
- (2). Rank=2 => dim:Imf=2, dim:Kerf=4-2 =2然
- (3). 像空間Imf=$\left\{\begin{bmatrix}y1\\y2\end{bmatrix} \middle| \ldots\right\}=\left\{\begin{bmatrix}y1\\y2\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}y1\\y2\end{bmatrix}=x1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+x2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+x3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+x4\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$
    - $=\left\{\begin{bmatrix}y1\\y2\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}y1\\y2\end{bmatrix}=c1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$
    - $=\left\{c1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \middle| c1c2\text{為任意實數}\right\}R^3$

雖是4d
但像空間維度=2

範例4：求像空間，核空間？

- (4). 核空間Ker f=$\left\{\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} \middle| \ldots \right\}$
  - =$\left\{\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} R^2$
  - =$\left\{\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} \middle| x1 + 3x3 + x4 = 0, x2 + x3 + 2x4 = 0 \right\}$
  - 無限多可能(x1, x2, x3, x4)=(−3s−t, −s−2t, s, t)=s(−3, −1, 1, 0)+t(−1, −2, 0, 1)
  - =核空間==$\left\{ s\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| st\text{為任意實數} \right\}$

核空間維度=2

- (5). 輸入變數空間維度=4
  - Rank=2 =>像空間維度= dim:Imf=2
  - 核空間維度= dim:Kerf=2

範例4：Python程式碼

```
from sympy import *
M = Matrix([
    [1,0],
    [0,1],
    [0,0]    ])
M_nullsapce = M.nullspace()
M_columnspace = M.columnspace()
M_rank = M.rank()
M_dim = M.shape[1]
M_nullity = M_dim - M_rank
print('線性轉換後有壓縮空間 = 核空間向
print('輸出空間的向量之線性組和= colu
print('輸入空間維度 = input dimension
print('輸出空間維度 = rank(M)=', M_ra
print('核空間維度 = 被轉換壓縮的空間維
```

```
線性轉換後有壓縮空間 = 核空間向量集合 = null space=
 [Matrix([
[-3],
[-1],
[ 1],
[ 0]]), Matrix([
[-1],
[-2],
[ 0],
[ 1]])]
輸出空間的向量之線性組和= column space=
 [Matrix([
[1],
[0]]), Matrix([
[0],
[1]])]
輸入空間維度 = input dimension of M= 4
輸出空間維度 = rank(M)= 2
核空間維度 = 被轉換壓縮的空間維度 = nullity= 2
```

3. 線性映射與矩陣的關係

線性映射與矩陣的關係

「若 f 爲從 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^m$ 的線性映射的話，

f 就等同於 $m \times n$ 矩陣 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

線性映射與矩陣的關係：完整數學表示法

設 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 為 R^n 的任意元素。f 為從 R^n 到 R^m 的映射。

f 為從 R^n 到 R^m 的線性映射 $\Leftrightarrow f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

是成立的。

4. 一對一轉換（one to one）

映成轉換（onto）

同構轉換（isomorphism）

碩士班考題

例 20： $T: R^2 \to R^2$，$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$，$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$

(1) $T\left(\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}\right)=$?

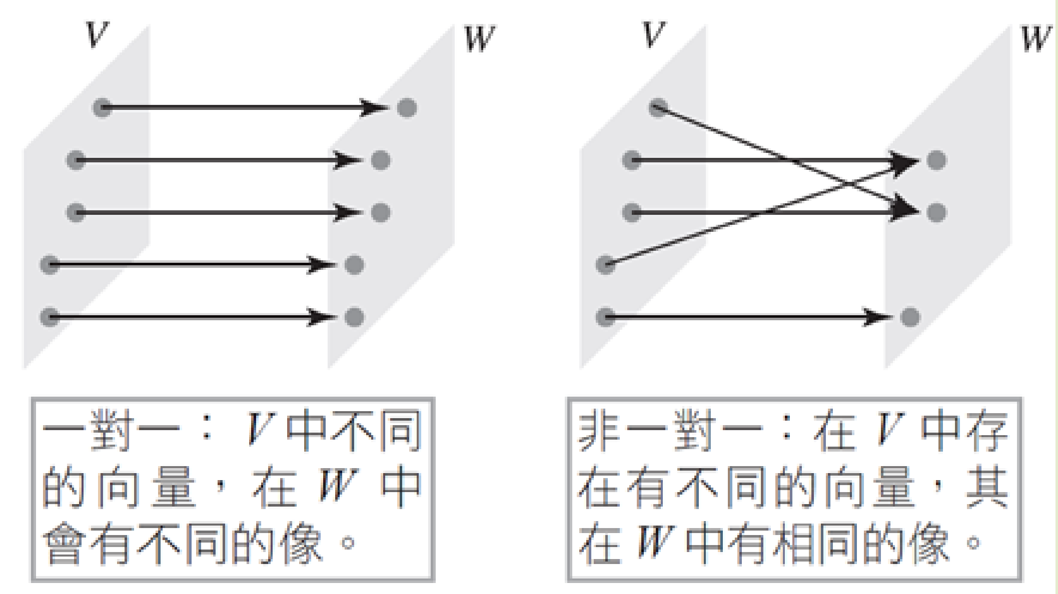
(2) $\ker(T)=$?

(3) $\mathrm{Im}(T)=$?

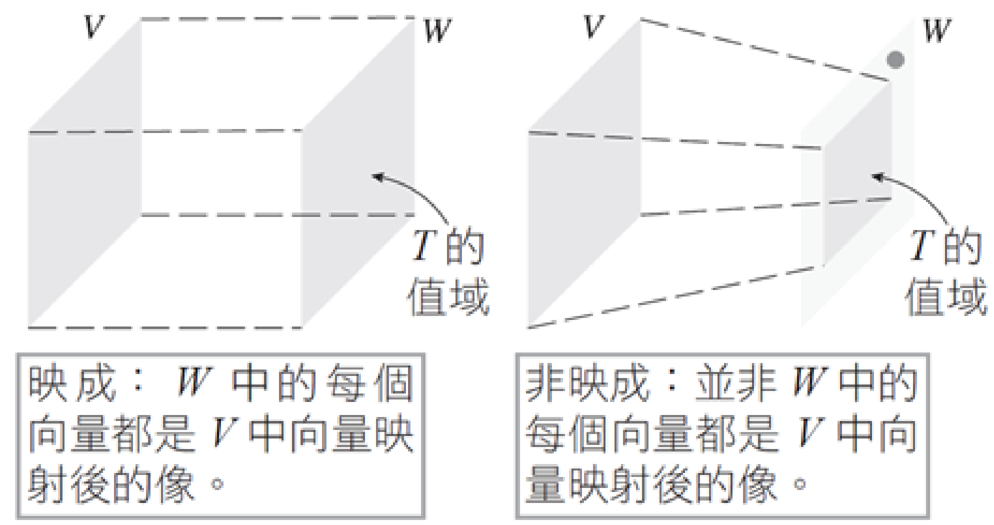
(4) T是否為一對一映射？ （交大電子）

一對一轉換，映成轉換

- 一對一轉換（one to one）



- 映成轉換（onto）



一對一轉換，映成轉換

- 若 $T: V \to U$

- 關鍵定理

6. 定理 6：

(1) 設 $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$，則

① T 爲映成，則 $n \geq m$；

② T 爲一對一，則 $n \leq m$；

③ T 爲一對一且映成，則 $n = m$；

④ $\boxed{T \text{ 爲一對一} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(T) = \{0\}}$

$\Leftrightarrow \mathrm{nullity}(T) = \{0\}$

$\Leftrightarrow \mathrm{rank}(T) = \dim(V) = n$；

⑤ T 爲映成 $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(T) = U = \mathbb{R}^m$

$\boxed{\Leftrightarrow \mathrm{rank}(T) = \dim(U) = m}$

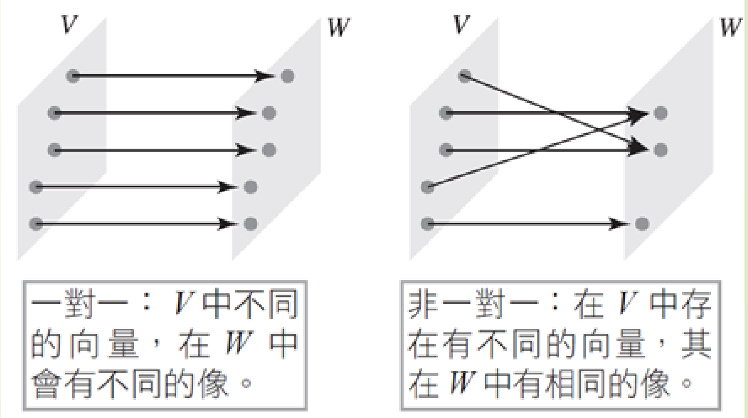
$\Leftrightarrow \mathrm{nullity}(T) = \dim(V) - \dim(U) = n - m$。

必須要 nullity=0，才是一對一轉換

必須要 dim(U)=rank(T)，才是映成onto轉換

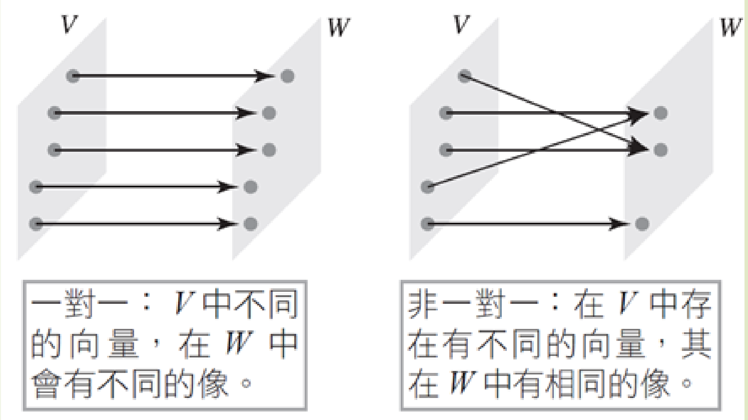
一對一轉換

- 若 $T: V \to W$ 為線性轉換，則以下為等價敘述：
  - (a) T 為一對一轉換
  - (b) $\ker(T) = \{0\}$
- 一對一轉換（one to one）
  - （V只有{0}，會轉換成{0}）
  - Nullity = 0，表示一對一轉換
  - n= rank，表示一對一轉換
  - Det(A) ≠ 0，表示一對一轉換
  - 只有唯一解，表示一對一轉換



一對一轉換

- 若 V 和 W 為有限維度、且相同維度的向量空間，
- 如果 $T: V \to W$ 為線性轉換，則以下為等價敘述：
  - (a) T 為一對一轉換
  - (b) $\ker(T) = \{0\}$
  - (c) T 為映成 [亦即，$R(T) = W$]



範例30：是否為一對一轉換？

第七章，習題30（page.381）

30. 試問左乘以下矩陣 A，是否為一對一的矩陣轉換？

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

範例(a)：是否為一對一轉換？

- 輸入變數量n=2個
- $T: V \to W$ 為線性轉換
- V的維度=3
- 簡化列梯形 $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- Rank = 2
- Nullity = n-rank = 2-2 =0
- 所以，kerT = {0}，核空間= {0}，只有{0}轉換到{0}
- 故為一對一轉換
  - 若kerT $\neq$ {0}，表示無限多解，多個V會降階映射W={0}

$$\text{(a)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

必須要 nullity=0，才是一對一轉換

範例(b)：是否為一對一轉換？

$$\text{(b)}\ \ A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

- 輸入變數量n=3個
- $T: V \to W$ 為線性轉換
- V的維度=2
- 簡化列梯形 $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$
- Rank = 2
- Nullity = n-rank = 3-2 =1
- 故不是一對一轉換
- 例如：除了{0}→{0}外，另外 $A\begin{bmatrix} -33 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 也會→{0}
- 故不是一對一轉換

必須要 **nullity=0**，才是一對一轉換

範例(c)：是否為一對一轉換？

- 輸入變數量n=3個
- $T: V \rightarrow W$ 為線性轉換
- V的維度=4
- 簡化列梯形 $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- Rank = 2
- Nullity = n-rank = 3-2 =1
- 故不是一對一轉換
- 例如：除了{0}→{0}外，另外 $A\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 也會→{0}
- 故不是一對一轉換

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

必須要 nullity=0，才是一對一轉換

範例63：是否為一對一轉換，是否為映成轉換onto？

第七章，習題63（page.383）

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 15 & 15 & 21 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

範例(a)：是否為一對一轉換？

$$(a)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

- 輸入變數量n=3個
- $T: V \to W$ 為線性轉換
- V的維度=2
- 簡化列梯形 = $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Rank = 1
- Nullity = n-rank = 3-1 =2
- 故不是一對一轉換

必須要 **nullity=0**，才是一對一轉換

範例(a)：是否為映成轉換onto？

- $T: V \to W$ 為線性轉換

(domain) → (codomain)

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

- V的維度=2
- 簡化列梯形 =

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Rank = 1
- Nullity = n-rank =
- 輸入變數量n=3個
- Domian的維度=3
- codomain的維度=2（W的維度）
- （因為A是2x3矩陣，輸入向量維度=3，輸出向量維度=2）
- 因為dimW ≠ rank(T)

2 ≠ 1

- 所以，A的轉換不是映成onto轉換

必須要 dim(W)=rank(T)，才是映成onto轉換

範例(b)：是否為一對一轉換？

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 15 & 15 & 21 \end{bmatrix}$

- 輸入變數量n=3個
- $T: V \rightarrow W$ 為線性轉換
- V的維度=2
- 簡化列梯形 =
- Rank = 2
- Nullity = n-rank = 3-2 =1
- 故不是一對一轉換

必須要 **nullity=0**，才是一對一轉換

範例(b)：是否為映成轉換onto？

- $T: V \to W$ 為線性轉換

(domain) → (codomain)

- 簡化列梯形 =

```
簡化的梯形矩陣的echelon form =
 (Matrix([
[1, 0, 5/2, 7/2],
[0, 1, 5/6, 7/6]]), (0, 1))
```

$$(b)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 15 & 15 & 21 \end{bmatrix}$$

- Rank = 2
- Nullity = n-rank = 4-2 =2
- 輸入變數量n=4個
- Domian的維度=4
- codomain的維度=3 （W的維度）
- （因為A是3x4矩陣，輸入向量維度=4，輸出向量維度=3）
- 所以，A的轉換不是映成onto轉換
- 因為dimW ≠ rank(T)

  3 ≠ 2

- 所以，A的轉換不是映成onto轉換

必須要 dim(W)=rank(T)，才是映成onto轉換

課本的解答錯誤，作者算錯rank(=3)

範例(c)：是否為一對一轉換？

$$(c)\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- $T: V \to W$ 為線性轉換
- 輸入變數量n=2個
- 簡化列梯形 =
- （因為A是3x2矩陣，輸入向量維度=2，輸出向量維度=3）
- Rank = 2
- Nullity = n-rank = 2-2 =0
- 故是一對一轉換

必須要 nullity=0，才是一對一轉換

範例(c)：是否為映成轉換onto？

- $T: V \to W$ 為線性轉換

(domain) → (codomain)

- 簡化列梯形 =
- Rank = 2
- Nullity = n-rank = 2-2 =0
- 輸入變數量n=2個
- Domian的維度=2
- codomain的維度=3（R3）（W的維度）
- （因為A是3x2矩陣，輸入向量維度=2，輸出向量維度=3）

$$(c)\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- 因為dimW ≠ rank(T)

3 ≠ 2

必須要 dim(W)=rank(T)，才是映成onto轉換

- 所以，A的轉換不是映成onto轉換

典型題庫1：線性映射是否為一對一轉換

- 典型研究所考試題目

設 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 爲線性運算子，且 $T(1,1)=(1,0,2)$，$T(2,3)=(1,-1,4)$，則

(1) $T(8,11)=$？ (2) T 是否爲一對一？

典型題庫：線性映射是否為一對一轉換

- 解法1：

(1) 因 $T\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\\2 & 4\end{bmatrix}$，故 $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\\2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & -1\\2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-y\\x-y\\2x\end{bmatrix}$

故 $T(x, y)=(2x-y, x-y, 2x)$，

因此 $T(8, 11)=(5, -3, 16)$。

(2) 設 $\forall(x, y)\in N(T)$，則

$T(x, y)=(2x-y, x-y, 2x)=\boldsymbol{0}$。

比較可得 $\begin{cases}2x-y=0\\x-y=0\\2x=0\end{cases}$ ①

解①式可得 $x=0$、$y=0$，故 $N(T)=\{\boldsymbol{0}\}$，即 T 爲 1-1。

典型題庫1：線性映射是否為一對一轉換

- 解法2：

典型題庫2：線性映射是否為一對一轉換

- 典型研究所考試題目

8. 試決定下列變換是否爲一對一，映成，或兩者皆非：

(1) $T_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$，$T(x,y)=(x+y,x-y)$；

(2) $T_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$，$T(x,y,z)=(x+2y,y-z)$；

(3) $T_3:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$，$T(x,y)=(x-3y,y,0)$；

(4) $T_4:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$，$T(x,y,z)=(x+2y,y+z,0)$。

典型題庫2：線性映射是否為一對一轉換

8. 試決定下列變換是否爲一對一，映成，或兩者皆非：

(1) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，$T(x, y) = (x + y, x - y)$；

(2) $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$，$T(x, y, z) = (x + 2y, y - z)$；

(3) $T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$，$T(x, y) = (x - 3y, y, 0)$；

(4) $T_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，$T(x, y, z) = (x + 2y, y + z, 0)$。

(1)一對一且映成；(2)映成；
(3)一對一；(4)兩者皆非

典型題庫3：求線性映射的Ker(T)，nullity(T), R(T), rank(T)

- 典型研究所考試題目

7. 若 $T(X)=AX$ 爲線性變換，求 Ker(T)、nullity(T)、R(T)、rank(T)。

(1)$A=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$；(2)$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$；(3)$A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\\0&1\end{bmatrix}$；(4)$A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$；

$\boxed{(5)A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\-2&2&-4\end{bmatrix}}$；(6)$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\0&0&1\end{bmatrix}$；(7)$A=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\2&1&3&1\\-1&0&-2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$。

典型題庫3：求線性映射的Ker(T)，nullity(T), R(T), rank(T)

- 解答：

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ → (1) $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$，$\mathrm{nullity}(T) = 1$，

$\mathrm{R}(T) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$，$\mathrm{rank}(T) = 1$

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ → (2) $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$，$\mathrm{nullity}(T) = 0$，

$\mathrm{R}(T) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$，

$\mathrm{rank}(T) = 2$；

典型題庫3：求線性映射的Ker(T)，nullity(T), R(T), rank(T)

- 解答：

$$(3)A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\\0&1\end{bmatrix}$$

(3) $\mathrm{Ker}(T)=\{0\}$，$\mathrm{nullity}(T)=0$，

$$R(T)=\mathrm{span}\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\}，$$

$\mathrm{rank}(T)=2$；

$$(4)A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$$

(3) $\mathrm{Ker}(T)=\{0\}$，$\mathrm{nullity}(T)=0$，

$$R(T)=\mathrm{span}\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\}，$$

$\mathrm{rank}(T)=2$；

典型題庫3：求線性映射的Ker(T)，nullity(T), R(T), rank(T)

- 解答：

(5) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ →

(5) $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$，

$\mathrm{nullity}(T) = 2$，

$R(T) = \mathrm{span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\}$，$\mathrm{rank}(T) = 1$；

(6) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ →

(6) $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{span}\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$，

$\mathrm{nullity}(T) = 1$，

$R(T) = \mathrm{span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}\}$，

$\mathrm{rank}(T) = 2$；

典型題庫4：線性映射是否為一對一轉換

- 典型研究所考試題目

設 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 爲線性運算子，且 $T(1, 1) = (1, 0, 2)$，$T(2, 3) = (1, -1, 4)$，則

(1) $T(8, 11) = ?$

(2) T 是否爲一對一？

典型題庫4：線性映射是否為一對一轉換

設 T：$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 爲線性運算子，且 $T(1, 1) = (1, 0, 2)$，$T(2, 3) = (1, -1, 4)$，則

(1) $T(8, 11) = ?$

(2) T 是否爲一對一？

(1) $(5, -3, 16)$； (2) 是

典型題庫5：證明兩個的生成空間相同

- 典型研究所考試題目

Show that

$$\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$$

（交大資科

典型題庫5：證明兩個的生成空間相同

- 典型研究所考試題目

$$\because \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

又 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

得證

典型題庫6：求rank(A), dim(ker(A))

- 典型研究所考試題目

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 5 & 1\end{bmatrix},$$

(a) $\operatorname{rank}(A)=?$

(b) $\dim[\ker(A)]=?$

(c) 為 $\ker(A)$ 與 $\operatorname{Im}(A)$ 找出一組基底　　（交大控制）

典型題庫5：求rank(A),dim(ker(A))

- 典型研究所考試題目

先對A執行列運算以求出$r(A)$

$$\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\-1&1&1&2\\1&2&5&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&1&2&1\\0&2&4&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&1&2&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

顯然可得$r(A)=2$

$r(A)=\dim(CSP(A))=\dim(RSP(A))=\dim(Im(A))=2$

$\dim\ker(A)=n-\dim(Im(A))=2$

Im (A)之基底即為 CSP (A)中找出$r(A)$個 L.I.D.向量

如$\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$

已知$\ker(A)=\{x|Ax=0\}$

將已化簡的A代入，並在滿足$Ax=0$的所有x中找出二個

I.D.的向量即可；

如$\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-3\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$