線性代數第二章
數學基礎，解聯立方程式，高斯喬丹消去法

陳擎文老師

線性代數授課的兩條線

- (1). 了解線性代數的本質
  - 了解其背後的物理意義
  - 了解關鍵重點
- (2). 學習如何計算
  - 了解數學的定義，公式，定理，證明
  - 練習計算

線性代數的學習重點與探討主題

觀念

- 數學符號的意義

基礎

- 向量
- 行列式
- 聯立方程式
- 矩陣

主題

- 線性映射
- 坐標轉換
- 特徵向量

線性代數的學習重點

觀念

- 數學符號的意義

基礎

- 向量，張量
- 行列式
- 矩陣

主題

- 線性映射（坐標轉換）
- 特徵向量，特徵值

線性代數的最後所要探討的主題

線性轉換

Linear transform

基底座標轉換

Basis vector transform

線性映射

特徵向量

Eigen vector

特徵值

Eigen value

座標轉換有兩種

- 線性轉換
- 基底轉換

兩種轉換關係

- （1）基底變換：(x1, x2⋯xn) vs (y1, y2⋯yn)

Q1 基底變換：若 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$，$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$ 且 $\mathbf{y} = c_1\mathbf{w}_1 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n$，向量 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 有甚麼關係？

- （2）座標變換：(c1, c2⋯cn) vs (d1, d2⋯dn)

Q2 座標變換：若 $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$，$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = d_1\mathbf{w}_1 + \cdots + d_n\mathbf{w}_n$，座標 $(c_1, \ldots, c_n)$ 和 $(d_1, \ldots, d_n)$ 有甚麼關係？

集合，元素，屬於，子集合

- (1) 屬於(∈)
  - 集合X = {2, 4, 6, 8, 10}
  - 元素x = 6
  - 關係：x屬於X = $x \in X$
- (2) 子集合(⊂)
  - 集合X = {2, 4, 6, 8, 10}
  - 子集合Y = {2, 4, 6}
  - 關係：Y是X的子集合 = $Y \subset X$

解聯立方程式
本章重點摘要

重要

解聯立方程式的重點摘要-1

- 3. 計算聯立方程式的方法有三種：
  - (1). 高斯消去法
  - (2). Cramer’s rule克拉瑪法則
  - (3). 反矩陣法

重要

解聯立方程式的重點摘要-2

4. 計算聯立方程式的方法有三種：

- (1). 高斯消去法（用擴展矩陣）
- (2). 反矩陣法
  - $A^{-1} = \frac{伴隨矩陣}{det(A)} = \frac{餘因子矩陣^T}{det(A)}$ （餘因子矩陣要注意正負號）
  - 解聯立方程式：$\vec{x} = A^{-1}\vec{v}$
- (3). Cramer’s rule克拉瑪法則

用高斯喬丹消去法，結果

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

解聯立方程式的重點摘要-3

- 1.解聯立方程式之前要先判斷是否有唯一解 => det(A)≠0
  - 因為克拉瑪法則解x1,x2..的公式為

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}, \qquad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},$$

  - 若是det(A)=0，則系統無解，或是無限多組解
- 2.求解聯立方程式，求解反矩陣，都是要先判斷det(A)≠0，才有唯一解

重要

判別是否有唯一解的方法有兩種

- (1). 方法1：用增廣矩陣，將之化簡：簡化列梯形，然後評估每個變數是否存在？
  - 缺點：速度慢，高斯消去法，計算到最後才知道
  - 優點：可以判別是無解，還是無限多組解

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1} \end{bmatrix}$$

無解

$$(b)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \end{bmatrix}$$

無限多組解

- (2). 方法2：用原始矩陣A的行列式det(A)判別
  - 解聯立方程式之前要先判斷是否有唯一解=> det(A)≠
  - 若det(A)≠0，則系統有唯一解
  - 若det(A)＝0，則系統可能無解，可能無限多組解
    - 若det(A)＝0，且det(A|B)=0，則無限多組解
    - 若det(A)＝0，且det(A|B)≠0，則無解

以下介紹課本的
數學定理，公式，範例

線性方程式

- 通式：　　　　　　　　（page. 2）

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

- 二元方程式 $a_1x + a_2y = b$ （a_1, a_2 不全為 0）
- 三元方程式 $a_1x + a_2y + a_3z = b$ （a_1, a_2, a_3 不全為 0）

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

判斷是否是線性方程式？

- 是線性方程式　　　　(page. 3)

$$x + 3y = 7 \qquad x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$$

$$\tfrac{1}{2}x - y + 3z = -1 \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

- 不是線性方程式

$$x + 3y^2 = 4 \qquad 3x + 2y - xy = 5$$

$$\sin x + y = 0 \qquad \sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 = 1$$

- 包含變數的乘積或開根號。二次方，三角函數、對數函數或指數函數

線性方程系統

- 一 m 個方程式、n 個未知數 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的一般化線性系統可以寫為(page. 3)

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\tag{7}
$$

- n 個未知數，就會有 n 個變數線性系統的解

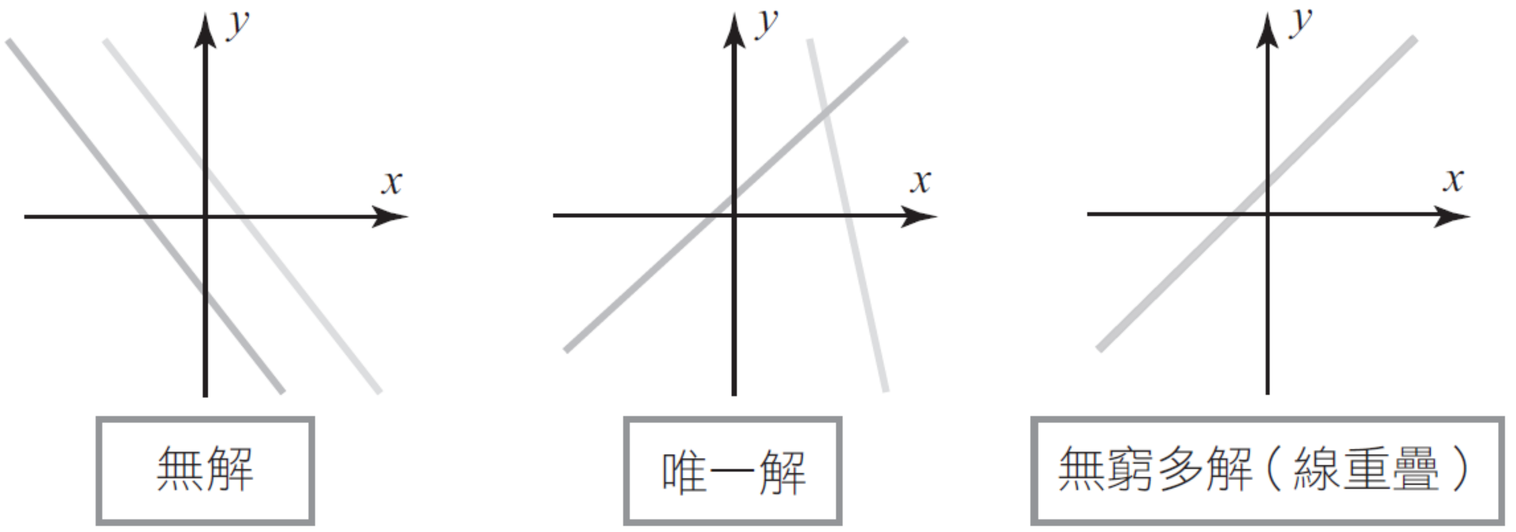
$$x_1 = s_1, \quad x_2 = s_2, \ldots, \quad x_n = s_n$$

- 可寫成 $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$

二元線性方程系統求解

- page. 4
- 二元線性系統
  - 直線

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$



➲ 圖 1.1.1

- 若至少**有一個解**，我們稱此線性系統是**一致性的**(consistent)
- 若**無解**，我們稱此線性系統是**非一致性的**（inconsistent）

三元方程式線性系統求解

- Page. 5
- 三元線性系統
  - 平面

$$
\begin{aligned}
a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\
a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\
a_3x + b_3y + c_3z &= d_3
\end{aligned}
$$

- 有交集，有解
- 沒有交集，無解

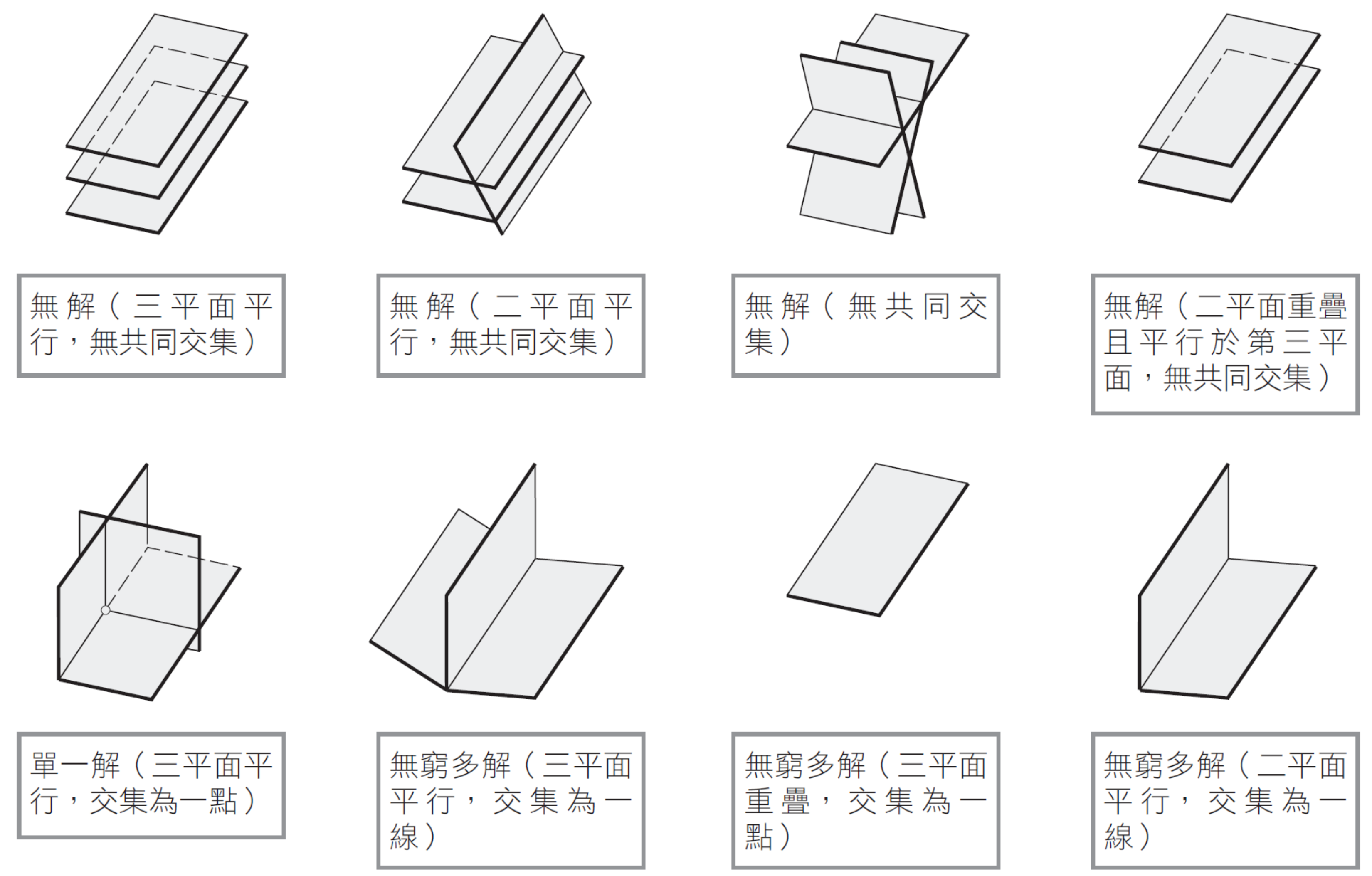


圖 1.1.2

範例2：一個解的線性系統

- 求解(page. 5)

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x + y &= 6 \end{aligned}$$

第一個方程式乘以 –2 倍，加到第二個方程式的方式削去 x。

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 3y &= 4 \end{aligned}$$

- x=7/3
- y=4/3

範例2:Python 程式碼

```
from sympy import *
x1,x2 = symbols('x1 x2')
A = Matrix([
    [1,-1,1,],
    [2,1,6]
    ])
ans = solve_linear_system(A, x1, x2)
print('X=', ans)
```

```
X= {x: 7/3, y: 4/3}
```

範例3：無解的線性系統

(page. 6)

- 求解

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 3x + 3y &= 6 \end{aligned}$$

第一個方程式乘以 –3 倍，加到第二個方程式的方式削去 x，

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 0 &= -6 \end{aligned}$$

- 0=–6
- 不可能，無解

範例3:Python 程式碼

```
from sympy import *
x1,x2 = symbols(’x1 x2’)
A = Matrix([
    [1, 1,4,],
    [3,3,6]
    ])
ans = solve_linear_system(A, x1, x2)
print(’X=’, ans)
```

```
X= None
```

範例4：無窮多解的線性系統

- 求解

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 16x - 8y &= 4 \end{aligned}$$

(page. 6)

第一個方程式乘以 –4 倍，加到第二個方程式的方式削去 x

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

- 0=0
- 幾何意義：直線重疊
- 兩個方程式是係數倍率
- 無限多組解

範例4:Python 程式碼

```
from sympy import *
x1,x2 = symbols('x1 x2')
A = Matrix([
    [4,-2,1],
    [16,-8,4]
    ])
ans = solve_linear_system(A, x1, x2)
print('X=', ans)
```

```
X= {x1: x2/2 + 1/4}
```

範例4:Python 程式碼

```
import numpy as np
A = np.array([
    [4,-2],
    [16,-8]
    ])
#注意：y矩陣，是以row為單位
Y = np.array([
    [1],[4]
    ])
#計算行列式det(A)
AY= np.array([
    [-2,1],
    [-8,4]
    ])
```

```
A_det = np.linalg.det(A)
AY_det = np.linalg.det(AY)
if A_det !=0:
    X = np.linalg.solve(A, Y)
    print('方程式，有唯一解，X=\n', X)
elif A_det ==0 and AY_det==0:
    print('方程式，無限多解')
elif A_det ==0 and AY_det !=0:
    print('方程式，無解')
```

```
方程式，無限多解
```

範例5：無窮多解的線性系統

- 求解

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 5 \\ 2x - 2y + 4z &= 10 \\ 3x - 3y + 6z &= 15 \end{aligned}$$

(page. 7)

- 觀察，因為第二和第三個方程式為第一個方程式的倍數。幾何上， 這意味著這三個平面重合
- 同一個程式，係數1，2，3
- 幾何意義：代表三個平面重疊
- 無限多組解

範例5:Python 程式碼

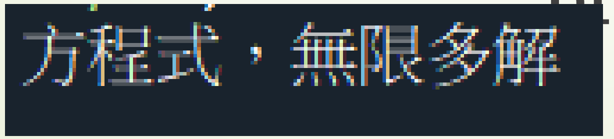
```
from sympy import *
x1,x2,x3 = symbols('x1 x2 x3')
A = Matrix([
    [1,-1,2,5],
    [2,-2,4,10],
    [3,-3,6,15]
    ])
ans = solve_linear_system(A, x1, x2, x3)
print('X=', ans)
```

```
X= {x1: x2 - 2*x3 + 5}
```

範例5：Python 程式碼

```
import numpy as np
A = np.array([
    [1,-1,2],
    [2,-2,4],
    [3,-3,6]
    ])
#注意：y矩陣，是以row為單位
Y = np.array([
    [5],[10],[15]
    ])
#計算行列式det(A)
AY= np.array([
    [-1,2,5],
    [-2,4,10],
    [-3,6,15],
    ])
```

```
A_det = np.linalg.det(A)
AY_det = np.linalg.det(AY)
if A_det !=0:
    X = np.linalg.solve(A, Y)
    print('方程式，有唯一解，X=\n', X)
elif A_det ==0 and AY_det==0:
    print('方程式，無限多解')
elif A_det ==0 and AY_det !=0:
    print('方程式，無解')
```



線性方程系統，增廣矩陣表示

- 線性方程系統 (page. 7)

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

- 增廣矩陣表示（把常數項也增廣加入）

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{bmatrix}
$$

用擴展矩陣的消去來求解

- 上面的幾個範例的求解，都是用乘以係數，消去法
- 下面的做法：
- (1). 先把方程式，轉成矩陣形式
- (2). 再在矩陣裡面，進行消去法

範例6：求解線性方程系統，增廣矩陣表示

- Page. 8

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

第 1 個方程式乘以 –2 倍加到第 2 個方程式

第 1 列乘以 –2 倍加到第 2 列

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

第 1 個方程式乘以 –3 倍加到第 3 個方程式

第 1 列乘以 –3 倍加到第 3 列

範例6：求解線性方程系統，增廣矩陣表示

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

第 2 個方程式乘以 $\frac{1}{2}$

第 2 列乘以 $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

第 2 個方程式乘以 –3 倍加到第 3 個方程式

第 2 列乘以 –3 倍加到第 3 列

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ -\tfrac{1}{2}z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

第 3 個方程式乘以 –2

第 3 列乘以 –2

範例6：求解線性方程系統，增廣矩陣表示

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ -\tfrac{1}{2}z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

第 3 個方程式乘以 –2

第 3 列乘以 –2

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

第 2 個方程式乘以 –1 倍加到第 1 個方程式

第 2 列乘以 –1 倍加到第 1 列

$$\begin{aligned} x \qquad + \tfrac{11}{2}z &= \tfrac{35}{2} \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

範例6：求解線性方程系統，增廣矩陣表示

- 最後形成：<u>對角線矩陣</u>，就會解出x, y, z

第 3 個方程式乘以 $-\frac{11}{2}$ 倍加到第 1 個方程式，且第 3 個方程式乘以 $\frac{7}{2}$ 倍加到第 2 個方程式

$$\begin{aligned} x \quad\quad\quad &= 1 \\ y \quad\quad &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

第 3 列乘以 $-\frac{11}{2}$ 倍加到第 1 列，且第 3 列乘以 $\frac{7}{2}$ 倍加到第 2 列

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

範例6:Python 程式碼

```python
from sympy import *
M = Matrix([
    [1,1,2,9],
    [2,4,-3,1],
    [3,6,-5,0]
    ])
print('簡化的梯形矩陣的echelon form =\n', M.rref())
```

```
簡化的梯形矩陣的echelon form =
 (Matrix([
[1, 0, 0, 1],
[0, 1, 0, 2],
[0, 0, 1, 3]]), (0, 1, 2))
```

解聯立方程式的方法：化簡成：簡化列梯形

- 增廣矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

唯一解

- 將之化簡：簡化列梯形

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 5 \end{aligned}$$

列梯形矩陣

- 1. 若有不全為零所構成的列，則該列中第一個非零的數為 1。我們稱之為**前導壹** （page.10）

2. 若有全為零所構成的列，則它們必須被群組在矩陣的底部。

3. 在有不全為零所構成的連續二個列之情形下，較低列的前導壹需在較高列的前導壹的右方。

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

簡化列梯形

- 一個簡化列梯形矩陣，每一前導壹下方和上方都為零

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

如何由簡化列梯形來判斷有唯一解、無解，無限解

聯立方程式的唯一解

- 增廣矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} & & & \boxed{1 \quad 5} & \end{bmatrix}$$

唯一解

- 將之化簡：簡化列梯形

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 3 \\ x_2 \qquad &= -1 \\ x_3 \quad &= 0 \\ x_4 &= 5 \end{aligned}$$

- 此系統有唯一解為 $x_1 = 3,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 5$

範例4：求解

- 求解　　(page. 12)

$$
\text{(a)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

- 最後一行：0x+0y+0z=1
- 不可能
- 無解

$$
\text{(a)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

無解

範例4：求解

- 求解(page. 12)

$$(b)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 0x+0y+0z=0
- 無限多組解
- Z=t(1, 2, 3, 4, 5‧‧‧.)，可以算出(x, y)

$$(b)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

無限多組解

範例4：求解

- 求解(page.12)

$$(c)\begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 0x+0y+0z=0
- 無限多組解
- z=t(1,2,3,4,5….)，可以算出(x)
- z=r(1,2,3,4,5….)，可以算出(x)

結論：由簡化列梯形來判斷有唯一解、無解，無限解

- 1. 有唯一解：

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &= \ \ 3 \\ x_2 \qquad\qquad &= -1 \\ x_3 \qquad &= \ \ 0 \\ x_4 &= \ \ 5 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{5} \end{bmatrix}$$

唯一解

- 2. 無解：0x+0y+0z=1

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

無解

- 3. 無限多解：　0x+0y+0z=0

$$\text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{bmatrix}$$

無限多組解

重要

判別是否有唯一解的方法有兩種

- (1). 方法1：用增廣矩陣，將之化簡：簡化列梯形，然後評估每個變數是否存在？
  - 缺點：速度慢，高斯消去法，計算到最後才知道
  - 優點：可以判別是無解，還是無限多組解

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

無解

$$(b)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

無限多組解

- (2). 方法2：用原始矩陣A的行列式det(A)判別
  - 解聯立方程式之前要先判斷是否有唯一解=> det(A)≠0
  - 若det(A)≠0，則系統有唯一解
  - 若det(A)＝0，則系統可能無解，可能無限多組解

重要

解聯立方程式的重點摘要-1

- 1.解聯立方程式之前要先判斷是否有唯一解 => det(A)≠0
  - 因為克拉瑪法則解x1,x2..的公式為

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},$$

  - 若是det(A)=0，則系統無解，或是無限多組解

重要

- <u>2.求解聯立方程式，求解反矩陣，都是要先判斷det(A)≠0，才有唯一解</u>

解聯立方程式的重點摘要-2

- 3.計算聯立方程式的方法有三種：
  - (1).高斯消去法
  - (2).Cramer’s rule克拉瑪法則
  - (3).反矩陣法

重要

解聯立方程式的重點摘要-3

4. 計算聯立方程式的方法有三種：

- (1). 高斯消去法（用擴展矩陣）

用高斯喬丹消去法，結果

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

- (2). 反矩陣法
  - $A^{-1} = \dfrac{\text{伴隨矩陣}}{det(A)} = \dfrac{\text{餘因子矩陣}^{T}}{det(A)}$ （餘因子矩陣要注意正負號）
  - 解聯立方程式：$\vec{x} = A^{-1}\vec{v}$
- (3). Cramer’s rule克拉瑪法則

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

高斯消去法

消去法　（page13）

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

- 步驟 1、先找出最左邊不全為零的行。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

最左邊不全為零的行

高斯消去法-2

- **步驟** 2、需使步驟 1 中選定的直行，其最上方元素需不為零。因此必要時，需將最上方的列和另一列做交換。

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \longleftarrow \text{第 1 列和第 2 列交換}$$

- **步驟** 3、若步驟 1 中選定的直行，其上方的元素是 a，則第一列需乘上 $1/a$ 來獲得一個前導壹。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \longleftarrow \text{第 1 列乘以 } \tfrac{1}{2}$$

高斯消去法-3

- **步驟 4**、最上方的列乘上適合的倍數，加到下方的列，使得前導壹下方的所有元素都變為零。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \longleftarrow \text{第 1 列乘以 }-2\text{ 加到第 3 列}$$

- **步驟 5**、現在遮蓋矩陣最上方的列，對剩下的子矩陣（submatrix），再進行步驟 1 的動作。持續以這種方式，直到整個矩陣成為列梯形。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

子矩陣中最左邊非零的直行

高斯消去法-4

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

← 子矩陣中的第 1 列乘以 $-\frac{1}{2}$ 來獲一個前導壹。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

← 子矩陣中的第 1 列乘以 –5 倍加到子矩陣中的第 2 列，使得前導壹下方為 0。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

← 遮蓋子矩陣中最上方的列，回到步驟 1。

新子矩陣最左邊非零的行

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

← 新子矩陣的第 1 列乘以 2 倍來獲一個前導壹。

高斯消去法-5

現在已經成為列梯形。

- **步驟 6**、從最後一個非零列開始往上進行，將每一列乘上適合的倍數，加到上方的列去，使得**前導壹的上方全部都是 0**。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

上面矩陣的第 3 列乘以 $\frac{7}{2}$ 倍加到第 2 列。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

第 3 列乘以 –6 倍加到第 1 列。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

第 2 列乘以 5 倍加到第 1 列。

高斯消去法-6

- 最後的矩陣就成為簡化列梯形
- 將矩陣轉變為**簡化列梯形**（reduced row echelon form），這過程稱為**高斯- 喬登消去法**
- 此演算法包含兩部分：
  - **前向階段**（forward phase）是使得領導壹的**下方為零**；
  - **反向階段**（backward phase）是使得領導壹的**上方為零**
- 前向階段
  - 稱為**高斯消去法**（Gaussian elimination），產生**列梯形**

高斯– 喬登消去法

- 高斯– 喬登消去法（化簡成為簡化列梯形）

＝高斯消去法＋回代法

$$
\begin{array}{lllll}
x_{k_1} & & & & + \sum(\ ) = 0 \\
& x_{k_2} & & & + \sum(\ ) = 0 \\
& & \ddots & & \vdots \\
& & & x_{k_r} & + \sum(\ ) = 0
\end{array}
$$

結論：高斯– 喬登消去法的兩個步驟

- 最後的矩陣就成為簡化列梯形 reduced row echelon form
- (1). 前向階段：高斯消去法（Gaussian elimination）
  - 產生列梯形
  - 使得領導壹的下方為零；

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- (2). 反向階段（backward phase）
  - 回代法
  - 是使得領導壹的上方為零

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

範例4：高斯–喬登消去法

- 用擴展矩陣方式，求解聯立方程式

$3x+y=1$

$X+2y=0$

- 解答：
  - $X=2/5$
  - $Y=-1/5$

範例：高斯–喬登消去法

- $\begin{bmatrix} 3 & \mathbf{1} & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
- 交換 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
- Row1*3=3 6 0
- 用上方減下方= row1x3-row2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & -1 \end{bmatrix}$$

- 注意：不要下方減去上方

- 領導列=1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & -1/5 \end{bmatrix}$$

- 領導列上方清0
- R2*2=2 -2/5
- 用上方減下方=row1-R2*2

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{2/5} \\ \mathbf{0} & 1 & -1/5 \end{bmatrix}$$

範例4：Python 程式碼

```
from sympy import *
M = Matrix([
    [3,1,1],
    [1,2,0]
    ])
print('簡化的梯形矩陣的echelon form =\n', M.rref())
```

```
簡化的梯形矩陣的echelon form =
 (Matrix([
[1, 0,  2/5],
[0, 1, -1/5]]), (0, 1))
```

範例5：高斯-喬登消去法

- Page. 15

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\
5x_3 + 10x_4 + 15x_6 &= 5 \\
2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6
\end{aligned}
$$

- 結果：
  - x1=-3x2-4x4-2x5
  - x3=-2x4
  - x6=1/3

範例5：高斯–喬登消去法

使用高斯– 喬登消去法解齊次線性系統(page. 15)

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 \quad\quad\quad + 2x_5 \quad\quad\quad &= 0 \\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\
5x_3 + 10x_4 \quad\quad + 15x_6 &= 5 \\
2x_1 + 6x_2 \quad\quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6
\end{aligned} \qquad (4)$$

欲解對應的方程式系統

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 \quad\quad + 2x_5 \quad\quad &= 0 \\
x_3 + 2x_4 \quad\quad + 3x_6 &= 1 \\
x_6 &= \tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

範例5：高斯–喬登消去法

我們如下進行：

步驟 1、對方程式解出領導變數

$$x_1 = -3x_2 + 2x_3 - 2x_5$$
$$x_3 = 1 - 2x_4 - 3x_6$$
$$x_6 = \frac{1}{3}$$

步驟 2、從最底下的方程式開始往上進行，持續地將每一方程式代入上方的方程式。將 $x_6 = \frac{1}{3}$ 代入第 2 個方程式，得

$$x_1 = -3x_2 + 2x_3 - 2x_5$$
$$x_3 = -2x_4$$
$$x_6 = \frac{1}{3}$$

範例5：高斯–喬登消去法

將 $x_3 = -2x_4$ 代入第1 個方程式，得

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

步驟 3、若有自由變數，則配以任意值。

若我們現在對 $x_2,\ x_4\ x_5$ 分別配予任意值 $r,\ s$ 和 t，則通解為

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \frac{1}{3}$$

此與範例 5 所獲得的解完全相同。

結論：如何看出範例5是無限多解？

- 1. 有唯一解：
- 2. 無解：0x+0y+0z=1
- 3. 無限多解： 0x1+0x2+0x3+0x4+0x5+x06=0

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \end{bmatrix}$$

結論：由簡化列梯形來判斷有唯一解、無解，無限解

- 1. 有唯一解：

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &= 3 \\ x_2 \qquad\qquad &= -1 \\ x_3 \qquad &= 0 \\ x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

唯一解

- 2. 無解：0x+0y+0z=1

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

無解

- 3. 無限多解： 0x+0y+0z=0

$$\text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

無限多組解

範例5：Python 程式碼

```
from sympy import *
M = Matrix([
    [1, 3, -2, 0, 2, 0, 0],
    [2, 6, -5, -2, 4, -3, -1],
    [0, 0, 5, 10, 0, 15, 5],
    [2, 6, 0, 8, 4, 18, 6]
    ])
print('簡化的梯形矩陣的echelon form =\n', M.rref())
```

```
簡化的梯形矩陣的echelon form =
 (Matrix([
[1, 3, 0, 4, 2, 0,   0],
[0, 0, 1, 2, 0, 0,   0],
[0, 0, 0, 0, 0, 1, 1/3],
[0, 0, 0, 0, 0, 0,   0]]), (0, 2, 5))
```

範例5：Python 程式碼

```
from sympy import *
x1,x2,x3,x4,x5,x6 = symbols(’x1 x2 x3 x4 x5 x6’)
A = Matrix([
    [1,3,-2,0,2,0,0],
    [2,6,-5,-2,4,-3,-1],
    [0,0,5,10,0,15,5],
    [2,6,0,8,4,18,6]
    ])
ans = solve_linear_system(A, x1, x2, x3,x4,x5,x6)
print(’X=’, ans)
```

```
X= {x6: 1/3, x3: -2*x4, x1: -3*x2 - 4*x4 - 2*x5}
```

重要

判別是否有唯一解的方法有兩種

- (1). 方法1：用增廣矩陣，將之化簡：簡化列梯形，然後評估每個變數是否存在？
  - 缺點：速度慢，高斯消去法，計算到最後才知道
  - 優點：可以判別是無解，還是無限多組解
- (2). 方法2：用原始矩陣A的行列式det(A)判別
  - 解聯立方程式之前要先判斷是否有唯一解=> det(A)≠0
  - 若det(A)≠0，則系統有唯一解
  - 若det(A)=0，則系統可能無解，可能無限多組解

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

無解

$$(b)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

無限多組解

範例8(a)：線性系統解的存在性

- 求解x, y, z, p　(page. 20)

$$\text{(a)}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 0x+0y+0z+0p=1
- 不可能，所以無解

$$\text{(a)}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

範例8：線性系統解的存在性

- 求解x, y, z, p (page. 20)

$$
\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

- $0x+0y+0z+0p=1$
- 不可能，所以無解

$$
\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1} \end{bmatrix}
$$

範例8(b)：線性系統解的存在性

(page. 20)

- 求解x, y, z, p

$$(b)\ \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 0x+0y+0z+0p=0
- 無限多組可能

$$(b)\ \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

範例8(c)：線性系統解的存在性

- 求解x, y, z, p(page. 20)

$$
\text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

- p=0
- z=9
- y=1-18=-17
- 一組解

範例8：Python 程式碼

```
from sympy import *
x1,x2,x3,x4 = symbols('x1 x2 x3 x4')
A = Matrix([
        [1,3,7,2,5],
        [0,1,2,-4,1],
        [0,0,1,6,9],
        [1,0,0,0,1]
        ])
ans = solve_linear_system(A, x1, x2, x3, x4)
print('X=', ans)
```

```
X= {x1: 1, x2: -33, x3: 15, x4: -1}
```

習題8：高斯–喬登消去法

- 高斯–喬登消去法求解 (page. 82)

8.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

The augmented matrix for this system is $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Replace R_2 with $R_2 - 2R_1$ and replace R_3 with $R_3 - R_1$. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -11 \\ 0 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

Replace R_2 with $-\frac{1}{5}R_2$. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{11}{5} \\ 0 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

Replace R_3 with $R_3 + 3R_2$. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & -2 & \frac{18}{5} \end{pmatrix}$

Replace R_3 with $-\frac{1}{2}R_3$. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-9}{5} \end{pmatrix}$

The matrix is now in Reduced Echelon form. To get it into Reduced Row Echelon form, we replace R_2 with $R_2 + 2R_3$ and replace R_1 with $R_1 + 3R_3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-7}{5} \end{pmatrix}$$

習題8：高斯–喬登消去法求解（page. 82）

Finally, replace R_1 with $R_1 - 2R_2$. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-9}{5} \end{pmatrix}$.

The solution is $x_1 = \frac{17}{5}$, $x_2 = \frac{-7}{5}$, $x_3 = \frac{-9}{5}$.

習題8：Python 程式碼

```
from sympy import *
M = Matrix([
     [1,2,-3,6],
     [2,-1,4,1],
     [1,-1,1,3]
     ])
print(’簡化的梯形矩陣的echelon form =\n’， M.rref())
```

```
簡化的梯形矩陣的echelon form =
 (Matrix([
[1, 0, 0, 17/5],
[0, 1, 0, -7/5],
[0, 0, 1, -9/5]]), (0, 1, 2))
```

習題8：Python 程式碼

```
from sympy import *
x1,x2,x3 = symbols(’x1 x2 x3’)
A = Matrix([
     [1,2,-3,6],
     [2,-1,4,1],
     [1,-1,1,3]
     ])
ans = solve_linear_system(A, x1, x2, x3)
print(’X=’, ans)
```

```
X= {x1: 17/5, x2: -7/5, x3: -9/5}
```

練習9：高斯–喬登消去法求解

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{r_{12}^{(3)} r_{13}^{(-1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_{23}^{(-1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_2 + 7x_3 = 12 \\ -5x_3 = -10 \end{cases}$$

$x_3 = 2$，$x_2 = -1$，$x_1 = 1$。

練習9：Python 程式碼

```python
from sympy import *
M = Matrix([
    [-1,1,2,2],
    [3,-1,1,6],
    [-1,3,4,4]
    ])
print('簡化的梯形矩陣的echelon form =\n', M.rref())
```

```
簡化的梯形矩陣的echelon form =
 (Matrix([
[1, 0, 0,  1],
[0, 1, 0, -1],
[0, 0, 1,  2]]), (0, 1, 2))
```

練習9：Python 程式碼

```
from sympy import *
x1,x2,x3 = symbols('x1 x2 x3')
A = Matrix([
        [-1,1,2,2],
        [3,-1,1,6],
        [-1,3,4,4]
        ])
ans = solve_linear_system(A, x1, x2, x3)
print('X=', ans)
```

```
X= {x1: 1, x2: -1, x3: 2}
```