線性代數第3章

矩陣基本運算

加法，乘法，轉置，跡

陳擎文老師

線性代數的學習重點與探討主題

觀念
- 數學符號的意義

基礎
- 向量
- 行列式
- 聯立方程式
- 矩陣

主題
- 線性映射
- 坐標轉換
- 特徵向量

線性代數的學習重點

觀念

- 數學符號的意義

基礎

- 向量，張量
- 行列式
- 矩陣

主題

- 線性映射（坐標轉換）
- 特徵向量，特徵值

線性代數的最後所要探討的主題

線性轉換 Linear transform	基底座標轉換 Basis vector transform
特徵向量 Eigen vector	特徵值 Eigen value

線性映射

重要

行列式的重點摘要-1

- 1. 行列式非常實用，且重要
- 2. 行列式功用1：預先判斷聯立方程式是否有唯一解
  - 若det(A)≠0，則系統有唯一解，即可用高斯消去法求解
- 3. 行列式功用2：預先判斷反矩陣是否存在
  - 若det(A)≠0，則反矩陣存在，即可用公式計算反矩陣
- 4. 矩陣A的行列式值det(A)所代表的物理意義
  - 2D矩陣：代表座標轉換後，面積的縮放率
  - 3D矩陣：代表座標轉換後，體積的縮放率

重要

行列式的重點摘要-2

- 5. 2D行列式特殊公式：

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- 6. 3D行列式特殊公式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{matrix}$$

$$= [45 + 84 + 96] - [105 - 48 - 72]$$

重要

行列式的重點摘要-3

- 7. 4D以上行列式公式：餘因子法
  - 找任何一列（有0的最好，因為可以省略計算）
  - $= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$
  - =

方法二：任何一行或一列展开

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第一行展开}}$$

$$= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

重要

判別是否有唯一解的方法有兩種

- (1). 方法1：用增廣矩陣，將之化簡：簡化列梯形，然後評估每個變數是否存在？
  - 缺點：速度慢，高斯消去法，計算到最後才知道
  - 優點：可以判別是無解，還是無限多組解
- (2). 方法2：用原始矩陣A的行列式det(A)判別
  - 解聯立方程式之前要先判斷是否有唯一解=> det(A)≠
  - 若det(A)≠0，則系統有唯一解
  - 若det(A)=0，則系統可能無解，可能無限多組解
    - 若det(A)=0，且det(A|B)=0，則無限多組解
    - 若det(A)=0，且det(A|B)≠0，則無解

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

無解

$$(b)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

無限多組解

解聯立方程式的重點摘要-1

- **1. 解聯立方程式之前要先判斷是否有唯一解 => det(A)≠0**
  - 因為克拉瑪法則解x1, x2..的公式為

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},$$

  - 若是det(A)=0，則系統無解，或是無限多組解

- **2. 求解聯立方程式，求解反矩陣，都是要先判斷det(A)≠0，才有唯一解**

解聯立方程式的重點摘要-2

- 3.計算聯立方程式的方法有三種：
  - (1).高斯消去法
  - (2).Cramer’s rule克拉瑪法則
  - (3).反矩陣法

重要

解聯立方程式的重點摘要-3

4. 計算聯立方程式的方法有三種：

- (1). 高斯消去法（用擴展矩陣）

用高斯喬丹消去法，結果

$$A^{-1}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-40&16&9\\0&1&0&13&-5&-3\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}\right]$$

- (2). 反矩陣法
  - $A^{-1}=\dfrac{\text{伴隨矩陣}}{det(A)}=\dfrac{\text{餘因子矩陣}^T}{det(A)}$ （餘因子矩陣要注意正負號）
  - 解聯立方程式：$\vec{x}=A^{-1}\vec{v}$
- (3). Cramer’s rule克拉瑪法則

$$x_1=\frac{\det(A_1)}{\det(A)},\quad x_2=\frac{\det(A_2)}{\det(A)},\ldots,\quad x_n=\frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

線性代數授課的兩條線

- (1). 了解線性代數的本質
  - 了解其背後的物理意義
  - 了解關鍵重點
- (2). 學習如何計算（課本）
  - 了解數學的定義，公式，定理，證明
  - 練習計算

以下介紹課本的
數學定理，公式，範例

矩陣定義

- 一個 $m \times n$ 矩陣的通式可寫成 (page. 24)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩陣的對角線

- A 的**主對角線**（main diagonal）　　(page. 25)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

矩陣之相加、相減

- (page. 26)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- 矩陣相加，相減

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad 且 \quad A - B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

Python 程式碼

```
import numpy as np
A = np.array([
    [2, 1, 0, 3],
    [-1, 0, 2, 4],
    [4, -2, 7, 0]
])
B = np.array([
    [-4, 3, 5, 1],
    [2, 2, 0, -1],
    [3, 2, -4, 5]
])
print(A + B)
print(A - B)
print(2*A)
```

```
(1).A+B =
 [[-2  4  5  4]
 [ 1  2  2  3]
 [ 7  0  3  5]]
(2).A-B =
 [[ 6 -2 -5  2]
 [-3 -2  2  5]
 [ 1 -4 11 -5]]
(3).2A =
 [[ 4  2  0  6]
 [-2  0  4  8]
 [ 8 -4 14  0]]
```

矩陣的純量倍數

- 矩陣的純量倍數（scalar multiple） （page.26）
- 矩陣A的每一元素均乘上c = 矩陣 cA

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad (-1)B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \tfrac{1}{3}C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

範例5：矩陣相乘

- (page. 27)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

- 算AB相乘=

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \boxed{26} & \square \end{bmatrix}$$

$$(2 \cdot 4) + (6 \cdot 3) + (0 \cdot 5) = 26$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \boxed{13} \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

$$(1 \cdot 3) + (2 \cdot 1) + (4 \cdot 2) = 13$$

範例5：矩陣相乘

- 算AB相乘= (page. 27)

$$
\begin{aligned}
(1 \cdot 4) + (2 \cdot 0) + (4 \cdot 2) &= 12 \\
(1 \cdot 1) - (2 \cdot 1) + (4 \cdot 7) &= 27 \\
(1 \cdot 4) + (2 \cdot 3) + (4 \cdot 5) &= 30 \\
(2 \cdot 4) + (6 \cdot 0) + (0 \cdot 2) &= 8 \\
(2 \cdot 1) - (6 \cdot 1) + (0 \cdot 7) &= -4 \\
(2 \cdot 3) + (6 \cdot 1) + (0 \cdot 2) &= 12
\end{aligned}
$$

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

範例5：Python 程式碼

```
import numpy as np
A = np.array([
    [1, 2, 4],
    [2, 6, 0]
])
B = np.array([
    [4, 1, 4, 3],
    [0, -1, 3, 1],
    [2, 7, 5, 2]
])
Print(A.dot(B))
print(np.dot(A,B))
print(A @ B)
```

```
(1).AB = A.dot(B)=
 [[12 27 30 13]
 [ 8 -4 26 12]]
(2)AB = dot(A,B)=
 [[12 27 30 13]
 [ 8 -4 26 12]]
(3)AB = A @ B=
 [[12 27 30 13]
 [ 8 -4 26 12]]
```

矩陣相乘後的維度

$$\underset{m \times r}{A} \qquad \underset{r \times n}{B} = \underset{m \times n}{AB}$$

內側

外側

A	B	C
3×4	4×7	7×3

- 範例：
- AB 乘積的結果為 3×7 的矩陣，
- BC 乘積的結果為 4×3 的矩陣，
- CA乘積的結果為 7×4 的矩陣

(page. 28)

矩陣分割

- 分割矩陣 (page. 28)

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3 \quad \mathbf{c}_4]$$

矩陣乘積與線性組合

- 矩陣乘積=多矩陣的**線性組合**：　　(page. 30)
  - $c_1A_1+c_2A_2+\ldots+c_rA_r$的展開形式稱為矩陣$A_1, A_2, \ldots$的**線性組合**
  - $A_1, A_2, \ldots A_r$ 為相同大小的矩陣
  - $c_1, c_2, \ldots c_r$為純量
- 例如：矩陣乘積(=聯立方程式)

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

範例9：矩陣乘積AB的各行向量視為線性組合

- 矩陣乘積=多矩陣的**線性組合**：　　　　(page. 32)

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 30 \\ 26 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

範例5：Python 程式碼

```
import numpy as np
A = np.array([
    [1, 2, 4],
    [2, 6, 0]
])
B = np.array([
    [4, 1, 4, 3],
    [0, -1, 3, 1],
    [2, 7, 5, 2]
])
Print(A.dot(B))
print(np.dot(A,B))
print(A @ B)
```

```
(1).AB = A.dot(B)=
 [[12 27 30 13]
 [ 8 -4 26 12]]
(2)AB = dot(A,B)=
 [[12 27 30 13]
 [ 8 -4 26 12]]
(3)AB = A @ B=
 [[12 27 30 13]
 [ 8 -4 26 12]]
```

線性系統之矩陣形式

- 聯立方程式=矩陣AB乘積　　(page. 32)

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \rightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

矩陣的轉置A^T

- A為$m\times n$矩陣，則A的**轉置**(transpose)記作A^T (page. 33)
  - A的第1列就是A^T的第1行
  - A的第2列就是A^T 的第2行

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 3 \quad 5], \quad D = [4]$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad D^T = [4]$$

轉置A^T：Python 程式碼

```
import numpy as np
B = np.array([
      [2, 3],
      [1, 4],
      [5, 6]
])
C = np.array([
      [1, 3, 5]
])
print(B.T)
print(C.T)
```

```
(1).B.T =
 [[2 1 5]
 [3 4 6]]
(2).C.T =
 [[1]
 [3]
 [5]]
```

轉置的特性

- (1). $(A^T)^T = A$ (page. 34)
- (2). $(A+B)^T = A^T + B^T$
- (3). $(A-B)^T = A^T - B^T$
- (4). $(kA)^T = kA^T$
- (5). $(AB)^T = B^T A^T$

矩陣的跡trace=tr(A)

- 方陣的跡trace=tr(A)　　(page. 35)
  - ＝主對角線元素相加

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(B) = -1 + 5 + 7 + 0 = 11$$

Python 程式碼

```
#跡tracer=對角線值相乘指令=np.trace(A)
import numpy as np
A = np.array([
    [-1,2,7,0],
    [3,5,-8,4],
    [1,2,7,-3],
    [4,-2,1,0]
    ])
print('A的跡tracer=',np.trace(A))
```