線性代數第4章
矩陣代數運算
2x2反矩陣

陳擎文老師

線性代數的學習重點與探討主題

觀念

- 數學符號的意義

基礎

- 向量
- 行列式
- 聯立方程式
- 矩陣

主題

- 線性映射
- 坐標轉換
- 特徵向量

線性代數的學習重點

觀念

- 數學符號的意義

基礎

- 向量，張量
- 行列式
- 矩陣

主題

- 線性映射（坐標轉換）
- 特徵向量，特徵值

線性代數的最後所要探討的主題

線性轉換 Linear transform	基底座標轉換 Basis vector transform
特徵向量 Eigen vector	特徵值 Eigen value

線性映射

重要

行列式的重點摘要-1

- 1. 行列式非常實用，且重要
- 2. 行列式功用1：預先判斷聯立方程式是否有唯一解
  - 若det(A)≠0，則系統有唯一解，即可用高斯消去法求解
- 3. 行列式功用2：預先判斷反矩陣是否存在
  - 若det(A)≠0，則反矩陣存在，即可用公式計算反矩陣
- 4. 矩陣A的行列式值det(A)所代表的物理意義
  - 2D矩陣：代表座標轉換後，面積的縮放率
  - 3D矩陣：代表座標轉換後，體積的縮放率

行列式的重點摘要-2

重要

- 5. 2D行列式特殊公式：

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- 6. 3D行列式特殊公式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{matrix}$$

$$= [45 + 84 + 96] - [105 - 48 - 72]$$

重要

行列式的重點摘要-3

- 7. 4D以上行列式公式：餘因子法
  - 找任何一列（有0的最好，因為可以省略計算）
  - $= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$
  - =

方法二：任何一行或一列展开

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第一行展开}}$$

$$= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

重要

判別是否有唯一解的方法有兩種

- (1). 方法1：用增廣矩陣，將之化簡：簡化列梯形，然後評估每個變數是否存在？
  - 缺點：速度慢，高斯消去法，計算到最後才知道
  - 優點：可以判別是無解，還是無限多組解
- (2). 方法2：用原始矩陣A的行列式det(A)判別
  - 解聯立方程式之前要先判斷是否有唯一解=> $\det(A)\neq 0$
  - 若$\det(A)\neq 0$，則系統有唯一解
  - 若$\det(A)=0$，則系統可能無解，可能無限多組解

解聯立方程式的重點摘要-1

- 1. 解聯立方程式之前要先判斷是否有唯一解 => det(A)≠0
  - 因為克拉瑪法則解x1, x2..的公式為

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},$$

  - 若是det(A)=0，則系統無解，或是無限多組解
- 2. 求解聯立方程式，求解反矩陣，都是要先判斷det(A)≠0，才有唯一解

重要

解聯立方程式的重點摘要-2

- 3.計算聯立方程式的方法有三種：
  - (1).高斯消去法
  - (2).Cramer’ s rule克拉瑪法則
  - (3).反矩陣法

重要

解聯立方程式的重點摘要-3

4. 計算聯立方程式的方法有三種：

- (1). 高斯消去法（用擴展矩陣）

用高斯喬丹消去法，結果

$$A^{-1}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-40&16&9\\0&1&0&13&-5&-3\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}\right]$$

- (2). 反矩陣法
  - $A^{-1}=\dfrac{\text{伴隨矩陣}}{det(A)}=\dfrac{\text{餘因子矩陣}^T}{det(A)}$ （餘因子矩陣要注意正負號）
  - 解聯立方程式：$\vec{x}=A^{-1}\vec{v}$
- (3). Cramer’s rule克拉瑪法則

$$x_1=\frac{\det(A_1)}{\det(A)},\quad x_2=\frac{\det(A_2)}{\det(A)},\ldots,\quad x_n=\frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

線性代數授課的兩條線

- (1). 了解線性代數的本質
  - 了解其背後的物理意義
  - 了解關鍵重點
- (2). 學習如何計算（課本）
  - 了解數學的定義，公式，定理，證明
  - 練習計算

以下介紹課本的
數學定理，公式，範例

矩陣算術運算特性

- 一個 $m \times n$ 矩陣的通式可寫成 (page. 24)
- (a) $A + B = B + A$ （矩陣加法交換律）
- (b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ （矩陣加法結合律）
- (c) $A(BC) = (AB)C$ （矩陣乘法結合律）
- (d) $A(B + C) = AB + AC$ （矩陣乘法對矩陣加法之左分配律）
- (e) $(B + C)A = BA + CA$ （矩陣乘法對矩陣加法之右分配律）

注意：沒有
乘法交換律
AB=BA

矩陣算術運算特性

- (f) $A(B-C)=AB-AC$ (page. 36)
- (g) $(B-C)A=BA-CA$
- (h) $a(B+C)=aB+aC$ (矩陣**純量乘法**對矩陣加法之分配律)
- (i) $a(B-C)=aB-aC$
- (j) $(a+b)C=aC+bC$
- (k) $(a-b)C=aC-bC$
- (l) $a(bC)=(ab)C$
- (m) $a(BC)=(aB)C=B(aC)$

範例1：矩陣乘法結合律

- (page. 36)

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\0&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&5\\20&13\\2&1\end{bmatrix}$$

且 $$BC=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&9\\4&3\end{bmatrix}$$

$$(AB)C=\begin{bmatrix}8&5\\20&13\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18&15\\46&39\\4&3\end{bmatrix}$$

$$A(BC)=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10&9\\4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18&15\\46&39\\4&3\end{bmatrix}$$

- 所以，$(AB)C=A(BC)$

注意：沒有乘法交換律AB=BA

- (page. 37) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 和 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \text{ 且 } BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

- 因此，$AB \neq BA$

零矩陣

- (page. 37)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [0]$$

零矩陣的特性

- (a) $A + 0 = 0 + A = A$
- (b) $A - 0 = A$
- (c) $A - A = A + (-A) = 0$
- (d) $0A = 0$
- (e) 若 $cA = 0$，則 $c = 0$ 或 $A = 0$

(page. 38)

單位矩陣（identity matrix）

- 單位矩陣記作 I　　　　（page. 38）

$$[1],\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

矩陣A與單位矩陣相乘=A

- (page. 39)

$$AI_n = A \quad 且 \quad I_m A = A$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- $$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

反矩陣B，可逆矩陣A，奇異矩陣A

- $AB = BA = I$ (page. 40)
  - 若A為方陣， 且B矩陣的大小與 A 相同
  - (1). 稱B為A的反矩陣（inverse），或逆矩陣
  - (1). 稱A為可逆的invertible，或稱非奇異的 nonsingular
  - (3). 若無法找到此種B 矩陣，則 A 稱為奇異的 singular

範例5：A是可逆矩陣

(page.40)

令

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad 且 \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

則

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

因此，A、B 都是可逆矩陣，且互為反矩陣。

奇異矩陣singular

- 奇異矩陣 (page. 40)
  - 1.無法找到B 矩陣(令AB=I)，則A 稱為奇異
  - 2.有任一列為零或任一行為零的方陣，是奇異矩陣
- 範例：
  - 無法找到AB=I
  - 因為列為零，對角線必有一個為零

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

反矩陣A^{-1}

- 若是存在可逆矩陣，就是反矩陣，我們將之記作 A^{-1} (page. 41)

$$AA^{-1} = I \quad 且 \quad A^{-1}A = I$$

2x2矩陣A的反矩陣A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- 若$ad - bc \neq 0$，則其反矩陣公式為(page. 42)

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- 所以算反矩陣前，要先驗證反矩陣是否存在？
  - 方法：det(A)≠0，行列式值≠ 0
  - 行列式值1：$\det(A) = ad - bc$
  - 行列式值2：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

範例7-1：計算 2 × 2 的反矩陣

- 先決定是否為可逆矩陣，若是，則求其反矩陣： (page. 42)

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

- (1). 是否為可逆矩陣： det(A)≠0
  - Det(A)=12−5 =7 ≠0
- (2). 反矩陣公式：
- $A^{-1} = \dfrac{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}}{7}$

- 先決定是否為可逆矩陣，若是，則求其反矩陣：
- (1). 是否為可逆矩陣： det(A)≠0
  - Det(A)=12−5 =7 ≠0
- (2). 反矩陣公式：
- $A^{-1} = \dfrac{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}}{7}$

範例7-1：Python程式碼

```python
import numpy as np
A = np.array([
    [6,1],
    [5, 2]
])
A_inv = np.linalg.inv(A)
print('反矩陣=\n',A_inv)
```

```
反矩陣=
 [[ 0.28571429 -0.14285714]
 [-0.71428571  0.85714286]]
```

範例7-2：計算 2 × 2 的反矩陣

- 先決定是否為可逆矩陣，若是，則求其反矩陣：(page. 42)

$$\text{(b) } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

- (1). 是否為可逆矩陣： det(A)≠0
  - Det(A)=6 =6 =0
  - A不可逆
  - A沒有反矩陣

範例7-2：Python程式碼

```
import numpy as np
A = np.array([
        [-1,2],
        [3,  -6]
])
A_inv = np.linalg.inv(A)
print('反矩陣=\n',A_inv)
```

```
_raise_linalgerror_singular
    raise LinAlgError("Singular matrix")

LinAlgError: Singular matrix
```

反矩陣的乘積

- 若 A 和 B 為相同大小的可逆矩陣，則 AB 亦為可逆矩陣(page. 42)
  - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

可知

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}, \quad (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

且

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

因此，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$　（注意次序會顛倒）

矩陣的次方

- 矩陣A的n次方 (page. 43)

$$A^0 = I \quad 與 \quad A^n = AA\cdots A \quad [n\ 個因子]$$

- 矩陣A的-n次方

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1} \quad [n\ 個因子]$$

- 矩陣的指數運算

$$A^r A^s = A^{r+s} \quad 以及 \quad (A^r)^s = A^{rs}$$

反矩陣的代數運算

- (1) A^{-1} 為可逆的，且 $(A^{-1})^{-1} = A$。 (page. 43)
- (2) A^n 為可逆的，且 $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$。
- (3) 對任意非零純量 k， kA 為可逆的，且 $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$

範例9-1：求反矩陣的3次方A^{-3}

- 求A^{-3} =?　　　　(page. 43)

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix} \quad 和 \quad A^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^{-3}=(A^{-1})^3=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}41 & -30\\ -15 & 11\end{bmatrix}$$

範例9-2：求矩陣的3次方A^3

- 求A^3 =?　　　　　　　　(page. 43)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad 和 \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{bmatrix}$$

範例9-3：證明反矩陣的3次方A^{-3}方=矩陣A3次方的反矩陣$(A^3)^{-1}$ (page. 43)

- 求A^{-3} =?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad 和 \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-3} = (A^{-1})^3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{bmatrix}$$

$$(A^3)^{-1} = \frac{1}{(11)(41) - (30)(15)}\begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix} = (A^{-1}$$

範例9-2：Python程式碼

```
import numpy as np
A = np.array([
      [1,2],
      [1,3]
])
A_inv = np.linalg.inv(A)
A_inv_pow3 = np.linalg.matrix_power(A_inv,3)
print(’反矩陣的三次方=\n’,A_inv_pow3)
print(’反矩陣每個元素的三次方=\n’,A_inv**3)
```

```
反矩陣的三次方=
 [[ 41. -30.]
 [-15.  11.]]
反矩陣每個元素的三次方=
 [[27. -8.]
 [-1.  1.]]
```

矩陣多項式

- 一個多項式p => $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$
- 一個矩陣A => A為 $n \times n$ 方陣
- 把矩陣代入多項式內：矩陣多項式

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_m A^m$$

- 其中： I 為 $n \times n$ 的單位矩陣

(page. 44)

範例11：計算矩陣多項式p(A)

- 計算p(A) (page. 44)

$$p(x) = x^2 - 2x - 3 \quad 且 \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

範例11：計算矩陣多項式p(A)

- 計算p(A)　　(page. 44)

$$p(x) = x^2 - 2x - 3 \quad \text{且} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- 代入A

$$p(A) = A^2 - 2A - 3I$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 - 2\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$