



# 線性代數第5章

## 行列式 (determinant)

### Cramer' s rule 克拉瑪求反矩陣

陳擎文老師

# 線性代數的學習重點與探討主題

## 觀念

數學符號的意義

## 基礎

向量

行列式

聯立方程式

矩陣

## 主題

線性映射

坐標轉換

特徵向量

# 線性代數的學習重點

## 觀念

- 數學符號的意義

## 基礎

- 向量，張量
- 行列式
- 矩陣

## 主題

- 線性映射（坐標轉換）
- 特徵向量，特徵值

# 線性代數的最後所要探討的主題

線性轉換

Linear transform

基底座標轉換

Basis vector transform

線性映射

特徵向量

Eigen vector

特徵值

Eigen value



# 行列式的重點摘要-1

- ➡ 1. 行列式非常實用，且重要
- ➡ 2. 行列式功用1：預先判斷聯立方程式是否有唯一解
  - ➡ 若 $\det(A) \neq 0$ ，則系統有唯一解，即可用高斯消去法求解
- ➡ 3. 行列式功用2：預先判斷反矩陣是否存在
  - ➡ 若 $\det(A) \neq 0$ ，則反矩陣存在，即可用公式計算反矩陣
- ➡ 4. 矩陣A的行列式值 $\det(A)$ 所代表的物理意義
  - ➡ 2D矩陣：代表座標轉換後，面積的縮放率
  - ➡ 3D矩陣：代表座標轉換後，體積的縮放率



# 行列式的重點摘要-2

## ➡ 5. 2D行列式特殊公式：

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

## ➡ 6. 3D行列式特殊公式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = [45 + 84 + 96] - [105 - 48 - 72]$$



# 行列式的重點摘要-3

## 7. 4D以上行列式公式：餘因子法

找任何一列（有0的最好，因為可以省略計算）

→ = 
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

方法二：任何一行或一列展开

→ = 
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第一行展开}} a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$





# 判別是否有唯一解的方法有兩種

➡ (1). 方法1：用增廣矩陣，將之化簡：簡化列梯形，然後評估每個變數是否存在？

➡ 缺點：速度慢，高斯消去法，計算到最後才知道

➡ 優點：可以判別是無解，還是無限多組解

➡ (2). 方法2：用原始矩陣A的行列式 $\det(A)$ 判別

➡ 解聯立方程式之前要先判斷是否有唯一解 $\Rightarrow \det(A) \neq 0$

➡ 若 $\det(A) \neq 0$ ，則系統有唯一解

➡ 若 $\det(A) = 0$ ，則系統可能無解，可能無限多組解

➡ 若 $\det(A) = 0$ ，且 $\det(A|B) = 0$ ，則無限多組解

➡ 若 $\det(A) = 0$ ，且 $\det(A|B) \neq 0$ ，則無解

(a) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

無解

(b) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

無限多組解





# 解聯立方程式的重點摘要-1

- ➡ 1. 解聯立方程式之前要先判斷是否有唯一解

⇒  $\det(A) \neq 0$

- ➡ 因為克拉瑪法則解 $x_1, x_2, \dots$ 的公式為

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},$$

- ➡ 若是 $\det(A)=0$ ，則系統無解，或是無限多組解

- ➡ 2. 求解聯立方程式，求解反矩陣，都是要先判斷 $\det(A) \neq 0$ ，才有唯一解





# 解聯立方程式的重點摘要-2

- ➡ 3. 計算聯立方程式的方法有三種：
  - ➡ (1). 高斯消去法
  - ➡ (2). Cramer' s rule 克拉瑪法則
  - ➡ (3). 反矩陣法



# 解聯立方程式的重點摘要-3

## ➡ 4. 計算聯立方程式的方法有三種：

➡ (1). 高斯消去法 (用擴展矩陣)

➡ (2). 反矩陣法

➡  $A^{-1} = \frac{\text{伴隨矩陣}}{\det(A)} = \frac{\text{餘因子矩陣}^T}{\det(A)}$  (餘因子矩陣要注意正負號)

➡ 解聯立方程式： $\vec{x} = A^{-1}\vec{v}$

➡ (3). Cramer's rule 克拉瑪法則

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

用高斯喬丹消去法，結果

$$A^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

# 線性代數授課的兩條線

## ➡ (1). 了解線性代數的本質

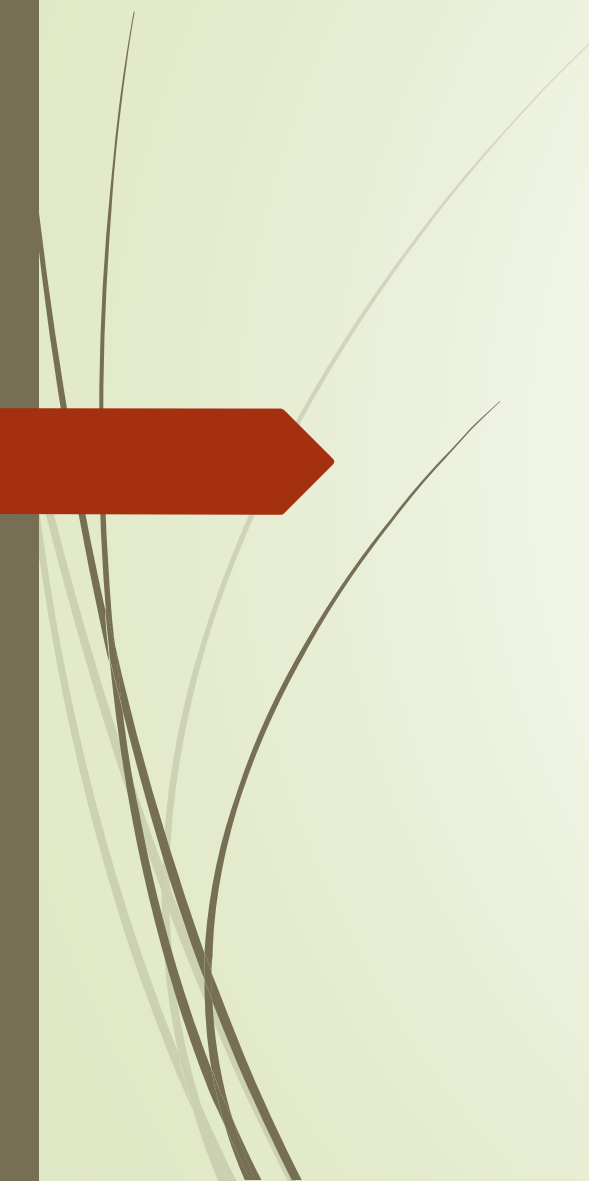
➡ 了解其背後的物理意義

➡ 了解關鍵重點

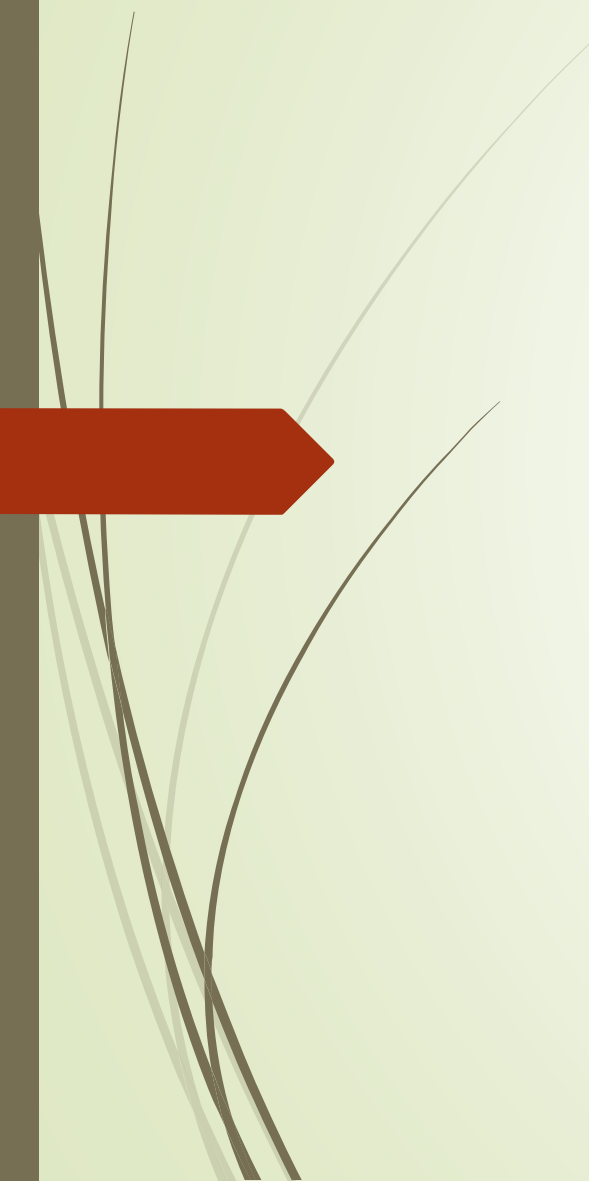
## ➡ (2). 學習如何計算（課本）

➡ 了解數學的定義，公式，定理，證明

➡ 練習計算



# 以下介紹課本的 數學定理，公式，範例



# 1.行列式值 $\det(A)$ 的用途



# 二元聯立方程式的解：分母是行列式

## 二元聯立方程式

(page. 87)

$$ax + by = h$$

$$cx + dy = k$$

## 求解(x, y)

$$x = \frac{hd - kb}{ad - bc}, y = \frac{ka - hc}{ad - bc}$$

$$x = \frac{hd - kb}{\det(A)}, y = \frac{ka - hc}{\det(A)}$$

## 求解(x, y)公式裡面的分母=行列式值= $\det(A)$

# 矩陣A行列式的用途

- ➡ 1. 行列式值
  - ➡ Determinant
  - ➡  $\text{Det}(A)$
- ➡ 2. 行列式可以用來解聯立方程式
  - ➡ 是求解公式的分母 =  $\text{det}(A)$

# 聯立方程式解：克拉瑪法(分母是行列式)

## ➡ (1). 二元聯立方程式解：

二元聯立方程式

$$ax + by = h$$

$$cx + dy = k$$

➡ 若  $\det(A) \neq 0$ ，則系統有唯一解 ➡

$$x = \frac{hd - kb}{ad - bc}, y = \frac{ka - hc}{ad - bc}$$
$$x = \frac{hd - kb}{\det(A)}, y = \frac{ka - hc}{\det(A)}$$

## ➡ (2). 多元聯立方程式解：

➡  $Ax = b$  為  $n$  個方程式、 $n$  個變數的線性系統

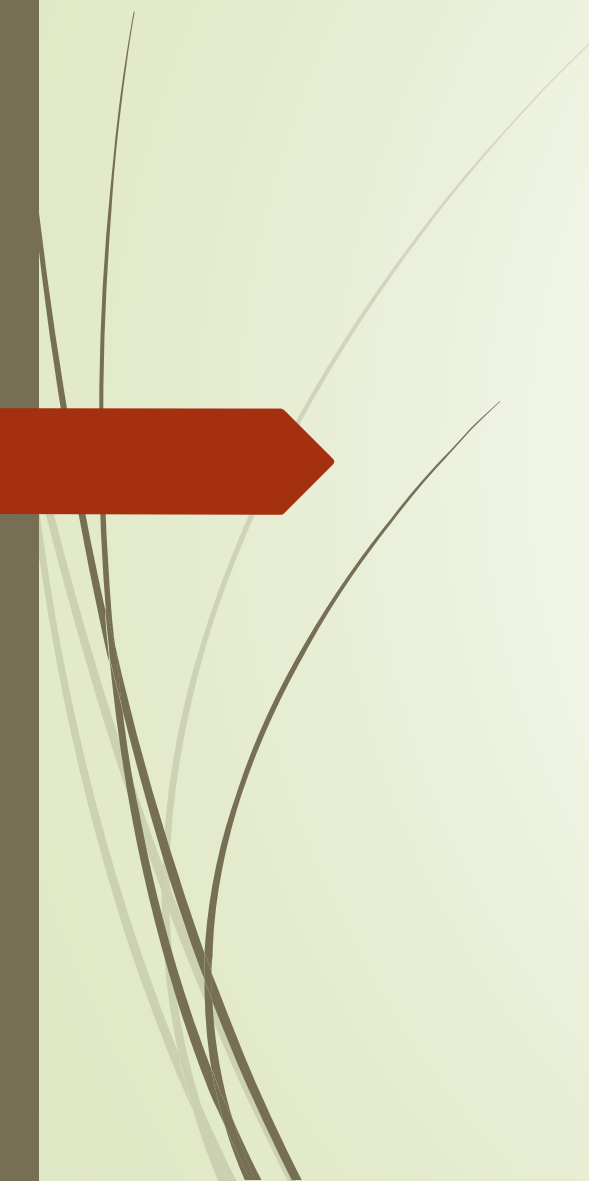
➡ 若  $\det(A) \neq 0$ ，則系統有唯一解為：

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$



# 判別是否有唯一解的方法有兩種

- ➡ (1). 方法1：用增廣矩陣，將之化簡：簡化列梯形，然後評估每個變數是否存在？
  - ➡ 缺點：速度慢，高斯消去法，計算到最後才知道
  - ➡ 優點：可以判別是無解，還是無限多組解
- ➡ (2). 方法2：用原始矩陣A的行列式 $\det(A)$ 判別
  - ➡ 解聯立方程式之前要先判斷是否有唯一解 $\Rightarrow \det(A) \neq 0$
  - ➡ 若 $\det(A) \neq 0$ ，則系統有唯一解
  - ➡ 若 $\det(A) = 0$ ，則系統可能無解，可能無限多組解
    - ➡ 若 $\det(A) = 0$ ，且 $\det(A|B) = 0$ ，則無限多組解
    - ➡ 若 $\det(A) = 0$ ，且 $\det(A|B) \neq 0$ ，則無解

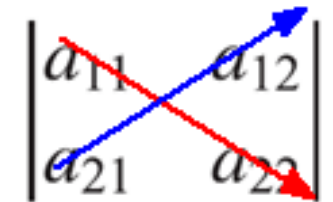


## 2. 如何計算行列式值 $\det(A)$ 2x2, 3x3 矩陣

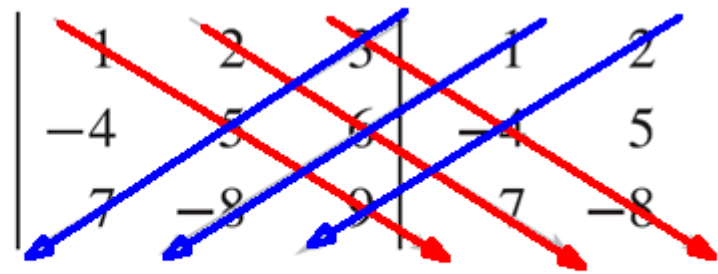


# 2x2 , 3x3行列式的計算

## ➡ 5. 2D行列式特殊公式： (page. 93)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$
A diagram showing a 2x2 matrix with elements a11, a12, a21, and a22. A red arrow points from a11 to a22, and a blue arrow points from a12 to a21, illustrating the subtraction of the product of the anti-diagonal from the product of the main diagonal.

## ➡ 6. 3D行列式特殊公式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = [45 + 84 + 96] - [105 - 48 - 72]$$
A diagram showing a 3x3 matrix with elements 1, 2, 3, -4, 5, 6, 7, -8, 9. Red arrows point from the top-left to the bottom-right along three diagonals (1 to 5 to 9, 2 to 6 to 7, 3 to -8 to -4). Blue arrows point from the top-right to the bottom-left along three diagonals (3 to 5 to 7, 2 to -8 to -4, 1 to 6 to -8). This illustrates the Sarrus rule for calculating the determinant of a 3x3 matrix.



# 範例7-1：2×2矩陣行列式值

➡ (1). 計算

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

(page. 93)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (3)(-2) - (1)(4) = -10$$

# 範例7-1：Python程式碼

```
import numpy as np
A = np.array([
    [3, 1],
    [4, -2]
])
A_det = np.linalg.det(A)
print("A的行列式值=", A_det)
```

A的行列式值= -10.00000000000000002

A的行列式值(四捨五入)= -10.0

## 範例7-2：3×3矩陣行列式值

➡ (1). 計算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}$$

(page. 93)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= [45 + 84 + 96] - [105 - 48 - 72] = 240$$

## 範例7-2：Python程式碼

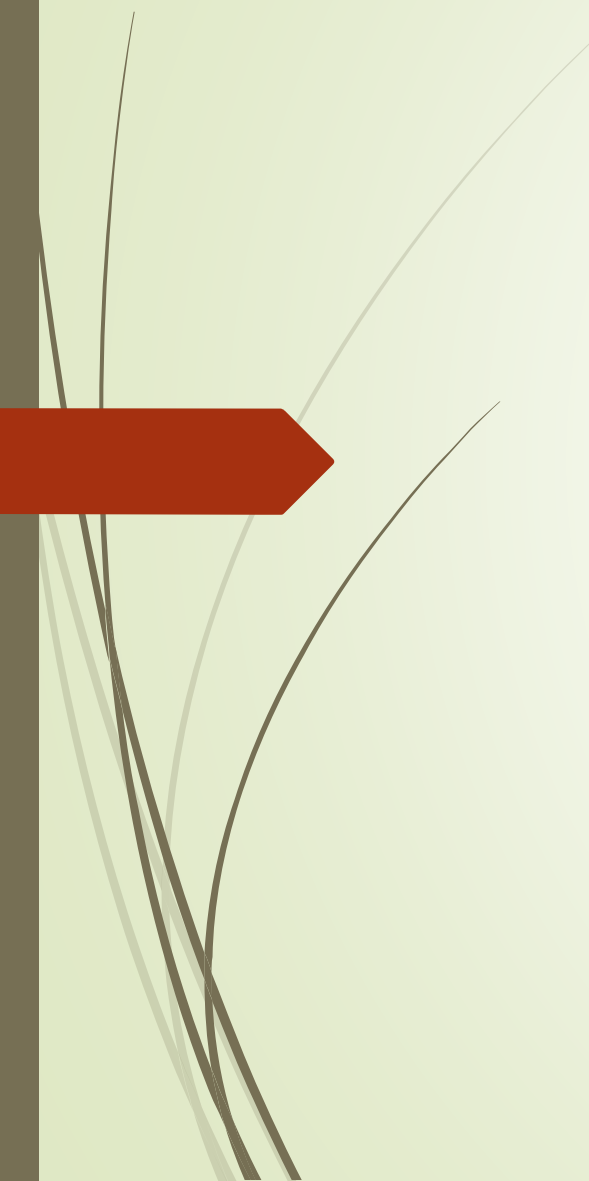
```
import numpy as np
```

```
A = np.array([  
    [1, 2, 3],  
    [-4, 5, 6],  
    [7, -8, 9],  
])
```

```
A_det = np.linalg.det(A)
```

```
print("A的行列式值=", A_det)
```

```
A的行列式值(四捨五入)= 240.0
```



3.如何計算行列式值 $\det(A)$

$n \times n$  多元矩陣

方法：餘因子法



# 行列式的通用公式：餘因子法

➡ 1. 任何維度的行列式值公式：餘因子法

➡ 找任何一列（有0的最好，因為可以省略計算）

➡ =

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

方法二：任何一行或一列展开

➡ =

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第一行展开}} a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$



# 何謂：餘因子

- 若  $A$  為一方陣，則元素  $a_{ij}$  的子行列式值記作  $M_{ij}$  (page. 88)
- 餘因子 (cofactor) 定義：
  - 其定義為刪除  $A$  矩陣的第  $i$  列和第  $j$  行後的子矩陣之行列式值。
  - $(-1)^{i+j} M_{ij}$  的值，記作  $C_{ij}$ ，
  - $C_{ij}$  稱為元素  $a_{ij}$  的餘因子

# 餘因子正負號的特殊記憶法

- 餘因子正負號
- 公式： $(-1)^{i+j}$
- 特殊記憶法

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| + | - | + | - | + |
| - | + | - | + | - |
| + | - | + | - | + |
| - | + | - | + | - |

# 範例1：餘因子範例 (page. 89)

令

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$a_{11}$  的子行列式值為

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$$

$a_{11}$  的餘因子  $C_{11}$  為 (注意：  $C_{11}$  要判被正負號)

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 16$$

# 請求出 $a_{32}$ 的餘因子 (page. 89)

同樣地，  $a_{32}$  的子行列式值為

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26$$

$a_{32}$  的餘因子為 (注意：  $C_{11}$  要判被正負號)

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -26$$

## 範例2：2×2矩陣行列式值的餘因子公式

➡ 任選一行，一列都可以

(page. 90)

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} \\ &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} \\ &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} \\ &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22}\end{aligned}$$

(4)

# 矩陣 $A$ 的餘因子展開式 (cofactor expansions)

➡ 矩陣  $A$  的餘因子展開式 (page. 91)

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \quad (5)$$

[ 根據第  $j$  行的餘因子展開式 ]

➡ 或是

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \quad (6)$$

[ 根據第  $i$  列的餘因子展開式 ]



# 範例3：根據第1列的餘因子展開式

➡ 矩陣A=

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

(page. 91)

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3(-4) - (1)(-11) + 0 = -1 \end{aligned}$$

# 範例5：聰明地選擇列或行來計算行列式

➡ 計算行列式  $\det(A)$

(page. 92)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# 範例5：聰明地選擇列或行來計算行列式

➡ 計算行列式  $\det(A)$  (page. 92)

➡ 聰明方法：擁有最多0的行列

➡ 可選擇第2行，因其有最多的0

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

➡ 再選擇第2行，因其有最多的0

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2(1 + 2) \\ &= -6 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

## 範例5：Python程式碼

```
import numpy as np
A = np.array([
    [1, 0, 0, -1],
    [3, 1, 2, 2],
    [1, 0, -2, 1],
    [2, 0, 0, 1]
])
A_det = np.linalg.det(A)
print("A的行列式值=", A_det)
print("A的行列式值(四捨五入)=", A_det.round())
```

A的行列式值= -6.0000000000000001

A的行列式值(四捨五入)= -6.0

4.如何計算行列式值 $\det(A)$

$n \times n$  多元矩陣

方法：餘因子法

特殊方法：三角矩陣

# 範例6：下三角矩陣的行列式值

- ➡ 發現：計算下三角矩陣的行列式值 (page. 92)
- ➡ 就是對角線元素的乘積

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ = a_{11} a_{22} a_{33} |a_{44}| = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$$



# 三角矩陣(上三角矩陣、下三角矩陣、對角矩陣) 的行列式值

- 發現：所有的三角矩陣的行列式值
  - (上三角矩陣、下三角矩陣、對角矩陣)
  - 就是對角線元素的乘積
  - $\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$



## 5.由行列式值判別

唯一解，無解，無限多組解



# 判別是否有唯一解的方法有兩種

- ➡ (1). 方法1：用增廣矩陣，將之化簡：簡化列梯形，然後評估每個變數是否存在？
  - ➡ 缺點：速度慢，高斯消去法，計算到最後才知道
  - ➡ 優點：可以判別是無解，還是無限多組解
- ➡ (2). 方法2：用原始矩陣 $A$ 的行列式 $\det(A)$ 判別
  - ➡ 解聯立方程式之前要先判斷是否有唯一解 $\Rightarrow \det(A) \neq 0$
  - ➡ 若 $\det(A) \neq 0$ ，則系統有唯一解
  - ➡ 若 $\det(A) = 0$ ，則系統可能無解，可能無限多組解
    - ➡ 若 $\det(A) = 0$ ，且 $\det(A|B) = 0$ ，則無限多組解
    - ➡ 若 $\det(A) = 0$ ，且 $\det(A|B) \neq 0$ ，則無解

# 範例3：無解的線性系統

➡ 求解

(page. 6)

$$x + y = 4$$

$$3x + 3y = 6$$

第一個方程式乘以  $-3$  倍，加到第二個方程式的方式消去  $x$

$$x + y = 4$$

$$0 = -6$$

➡  $0 = -6$

➡ 不可能，無解

# 範例3：無解的線性系統

➡ 求解

(page. 6)

$$\begin{aligned}x + y &= 4 \\ 3x + 3y &= 6\end{aligned}$$

➡  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

➡  $A|B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

➡  $\text{Det}(A)=0$ ，可能無解，或無限多組解

➡  $\text{Det}\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right) = -6 \neq 0$ ，所以是無解

➡ 若  $\text{det}(A)=0$ ，且  $\text{det}(A|B)=0$ ，則無限多組解

➡ 若  $\text{det}(A)=0$ ，且  $\text{det}(A|B) \neq 0$ ，則無解

## 範例3：Python 程式碼

```
from sympy import *  
x1, x2 = symbols(' x1 x2' )  
A = Matrix([  
    [1, 1, 4, ],  
    [3, 3, 6]  
])  
ans = solve_linear_system(A, x1, x2)  
print(' X=' , ans)
```

X= None



## 範例3：Python 程式碼

```
import numpy as np
```

```
A = np.array([  
    [1, 1],  
    [3, 3]  
])
```

#注意：y矩陣，是以row為單位

```
Y = np.array([  
    [4], [6]  
])
```

#計算行列式det(A)

```
AY= np.array([  
    [1, 4],  
    [3, 6]  
])
```

```
A_det = np.linalg.det(A)
```

```
AY_det = np.linalg.det(AY)
```

```
if A_det !=0:
```

```
    X = np.linalg.solve(A, Y)
```

```
    print('方程式，有唯一解，  
X=\n', X)
```

```
elif A_det ==0 and AY_det==0:
```

```
    print('方程式，無限多解')
```

```
elif A_det ==0 and AY_det !=0:
```

```
    print('方程式，無解')
```

方程式，無解



# 範例4：無窮多解的線性系統

➡ 求解

$$\begin{aligned}4x - 2y &= 1 \\16x - 8y &= 4\end{aligned}$$

(page. 6)

第一個方程式乘以  $-4$  倍，加到第二個方程式的方式消去  $x$

$$\begin{aligned}4x - 2y &= 1 \\0 &= 0\end{aligned}$$

➡  $0=0$

➡ 幾何意義：直線重疊

➡ 兩個方程式是係數倍率

➡ 無限多組解

# 範例4：無窮多解的線性系統

➡ 求解

$$4x - 2y = 1$$

(page. 6)

$$16x - 8y = 4$$

➡  $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 16 & -8 \end{bmatrix}$

➡  $A|B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 16 & -8 & 4 \end{bmatrix}$

➡  $\text{Det}(A)=0$ ，可能無解，或無限多組解

➡  $\text{Det}\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}\right)=0$ ，無限多組解

➡ 若 $\det(A)=0$ ，且 $\det(A|B)=0$ ，則無限多組解

➡ 若 $\det(A)=0$ ，且 $\det(A|B) \neq 0$ ，則無解

## 範例4：Python 程式碼

```
from sympy import *  
x1, x2 = symbols(' x1 x2' )  
A = Matrix([  
    [4, -2, 1],  
    [16, -8, 4]  
])  
ans = solve_linear_system(A, x1, x2)  
print(' X=' , ans)
```

$$X = \{x1: x2/2 + 1/4\}$$

# Python 程式碼

```
import numpy as np
A = np.array([
    [4, -2],
    [16, -8]
])
```

#注意：y矩陣，是以row為單位

```
Y = np.array([
    [1], [4]
])
```

#計算行列式det(A)

```
AY= np.array([
    [-2, 1],
    [-8, 4]
])
```

```
A_det = np.linalg.det(A)
```

```
AY_det = np.linalg.det(AY)
```

```
if A_det !=0:
```

```
    X = np.linalg.solve(A, Y)
```

```
    print('方程式，有唯一解，  
X=\n', X)
```

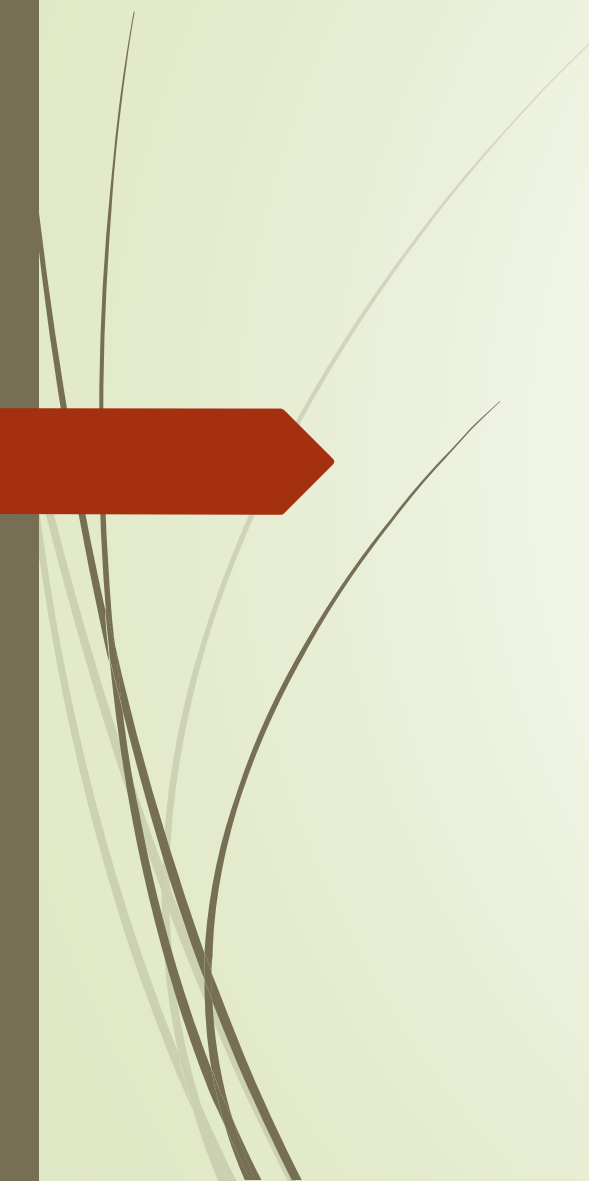
```
elif A_det ==0 and AY_det==0:
```

```
    print('方程式，無限多解')
```

```
elif A_det ==0 and AY_det !=0:
```

```
    print('方程式，無解')
```

方程式，無限多解



## 6. 行列式值的許多特性定理

### 轉置矩陣 $A^T$ 、列計算， 高斯消去法

# 行列式值 $\det(A) = \det(A^T)$

- ➡  $A$  為方陣，則行列式值  $\det(A) = \det(A^T)$
- ➡  $A$  的行列式值 = 轉置矩陣  $A^T$  的行列式值

(page. 94)



# 基本列運算的行列式值 (page. 92)

► 表 1

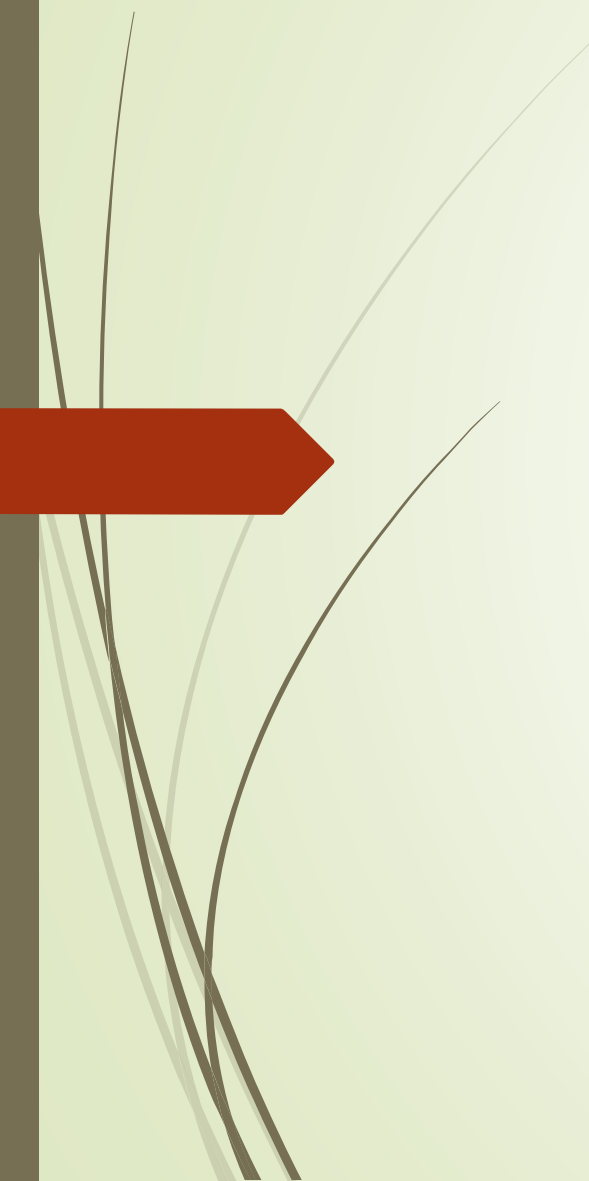
| 關係                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 運算                                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| $\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = k\det(A)$                                                                                | 矩陣 $B$ 等於矩陣 $A$ 的第 1 列乘上 $k$ 倍         |
|  $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = -\det(A)$ | 矩陣 $B$ 等於矩陣 $A$ 的第 1、2 列交換             |
| 關係                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 運算                                     |
| $\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = \det(A)$                                                        | 矩陣 $B$ 等於矩陣 $A$ 的第 2 列乘上 $k$ 倍加到第 1 列去 |

所以，高斯消去法後，行列式值不變

# 利用列簡化求行列式值-1

- ➡  $A$  為  $n \times n$  的矩陣， (page. 95)
- ➡ (a) 若  $B$  矩陣為  $A$  矩陣之一列（或行）乘上一純量  $k$  倍的結果，則  $\det(B) = k \det(A)$ 。
- ➡ (b) 若  $B$  矩陣為  $A$  矩陣之兩列（或兩行）交換的結果，則  $\det(B) = -\det(A)$ 。
- ➡ (c) 若  $B$  矩陣為  $A$  矩陣之一列（或行）乘上某倍數再加到另一列（或行）的結果，則  $\det(B) = \det(A)$

所以，高斯消去法後，行列式值不變



## 7. 行列式值的許多特性定理

### 基本矩陣(近似單位矩陣)

# 基本矩陣=單位矩陣經過簡單運算

基本矩陣 = 單位矩陣經過簡單運算 (page. 46)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

↑  
 $I_2$  的第 2 列乘以 -3 倍

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

↑  
 $I_4$  的第 2 列和第 4 列相互交換

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↑  
 $I_3$  的第 3 列乘以 3 倍後，加到第 1 列去

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↑  
 $I_3$  的第 1 列乘以 1 倍

# 範例1:基本矩陣的行列式值

➡ (page. 96)

➡ 三角矩陣

➡  $\text{Det}(A) =$  乘積

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$I_4$  的第 2 列乘上 3 倍

# 範例1:基本矩陣的行列式值

➡ (page. 96)

➡ 交換後變成

➡ 單位矩陣

➡  $\text{Det}(A) = -1$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$I_4$  的第 1 列和最後一  
列交換



# 範例1:基本矩陣的行列式值

➡ (page. 96)

➡ 近似單位矩陣

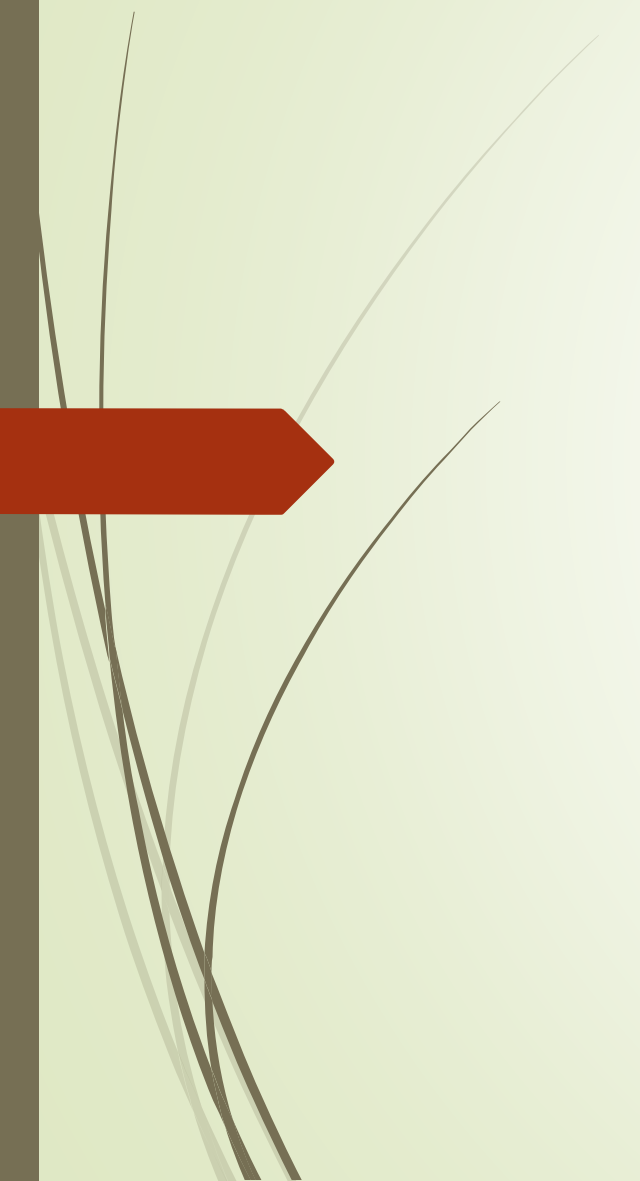
➡ 雖然有特異數字

➡  $\text{Det}(A) = 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$I_4$  的最後一列乘上 7  
倍加到第 1 列去





## 8. 特殊矩陣的行列式值 列或行成比例

# 列或行成比例的矩陣-2

- 若  $A$  為有二列成比例（或二行成比例）的方陣  
(page. 96)

則  $\det(A) = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix},$$

- 原理：高斯消去法，會造成一列是0

# 範例2-1：求行列式值

➡ 求行列式值

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

(page. 96)

# 範例2-1：求行列式值

➡ 求行列式值

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

(page. 96)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

第2列為第1列的2倍，所以第1列乘以-2加到第2列去，可產生一零列。

➡ 有一列為全0，行列式值=0

➡ 原理：餘因子算法

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26$$

# 範例2-2：求行列式值

➡ 求行列式值

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ -9 & 3 & -12 & 15 \end{bmatrix}$$

(page. 96)

## 範例2-2：求行列式值

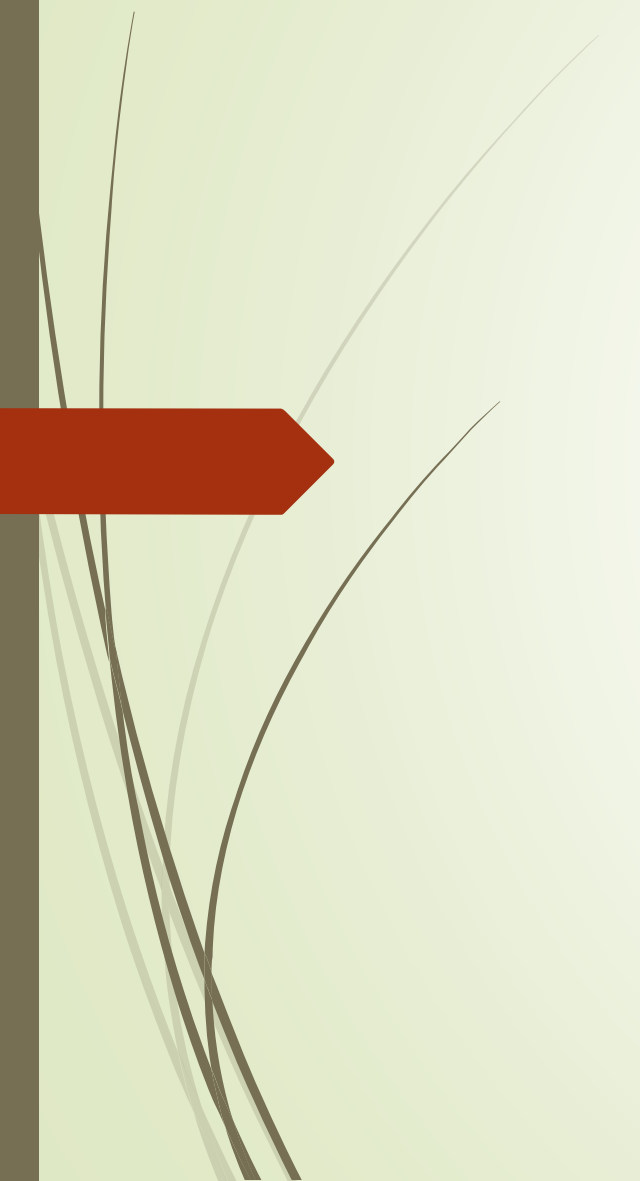
➡ 求行列式值

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ -9 & 3 & -12 & 15 \end{bmatrix}$$

(page. 96)

➡  $\text{Det}(A)=0$

$$\begin{bmatrix} \underline{3} & \underline{-1} & \underline{4} & \underline{-5} \\ 6 & -2 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ \underline{-9} & \underline{3} & \underline{-12} & \underline{15} \end{bmatrix}$$



## 9. 矩陣的行列式值 化簡成三角矩陣



# 範例4：簡化成下三角矩陣計算行列式值 =對角線數字相乘

- ➡ 求  $\det(A)$ ，將A化為列梯形（下三角矩陣）（page. 97）
- ➡ 原理：因為矩陣上方很多0，只要再把3, 6消除即可變成上三角矩陣
- ➡  $\det(A)$ =對角線數字相乘

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

# 範例4：簡化成下三角矩陣計算行列式值

➡ 以將第1行乘上 - 3倍加到第4行後（其行列式值不變）

➡ (page. 97)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

➡ 將A變為下三角矩陣,  $\det(A)$ =對角線相乘

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{bmatrix} = (1)(7)(3)(-26) = -546$$

# 範例3：簡化成上三角矩陣算行列式值=對角線乘積

➡ 求  $\det(A)$ ，將A化為列梯形（上三角矩陣）（page. 96）

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

# 範例3：簡化成下三角矩陣計算行列式值

➡ 求  $\det(A)$ ，將  $A$  化為列梯形（下三角矩陣）（page. 96）

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

← 將  $A$  的第 1 列和第 2 列交換

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

← 將  $A$  的第 1 列的共同倍數 3 提出

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$

← 將  $A$  的第 1 列乘上 -2 倍加到第 3 列

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$$

← 將  $A$  的第 2 列乘上 -10 倍加到第 3 列



10. 矩陣的行列式值  
若矩陣都沒有特殊性

方法：高斯消去法矩陣降一維度

# 範例5：用列運算和餘因子展開算行列式值

➡ 矩陣  $A$ ，求行列式值

(page. 98)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

# 範例5：用列運算和餘因子展開算行列式值

- 將第2列使用適當的倍數加到其他列去，(page. 98)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

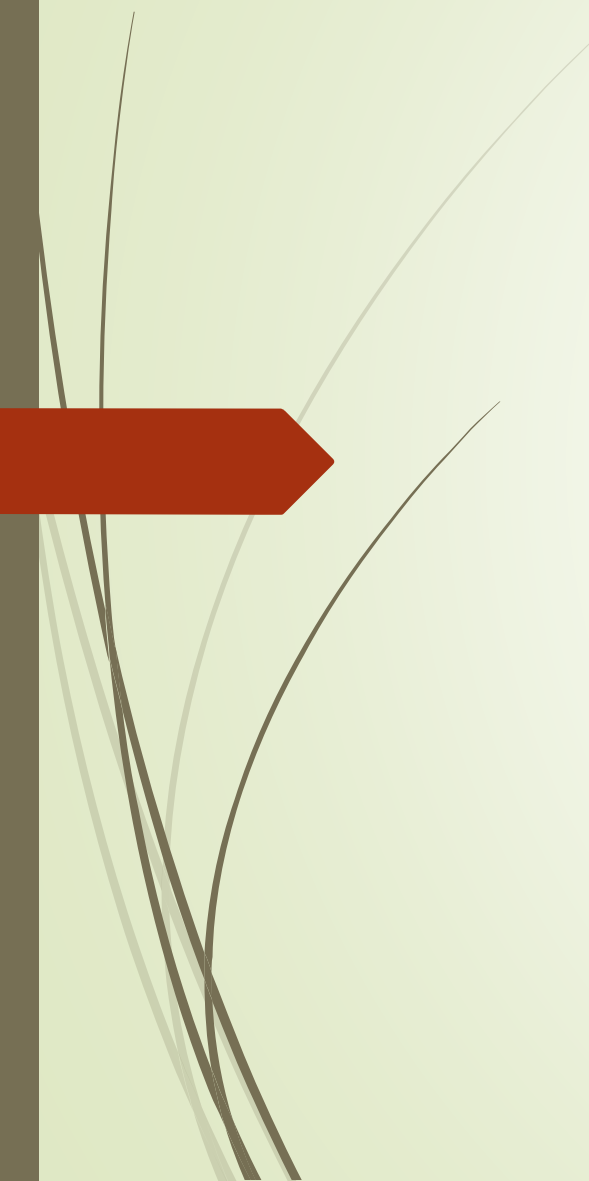
$$= -(-1) \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} \\ = -18$$

以第 1 行做  
餘因子展開

將 A 的第 1 列  
加到第 3 列

以第 1 行做  
餘因子展開





# 11. 總結：矩陣的行列式值 各種方法摘要



# 總結：矩陣的行列式值各種方法

## ➡ 1. 特殊矩陣：2x2, 3x3，特殊公式

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = [45 + 84 + 96] - [105 - 48 - 72]$$

## ➡ 2. 特殊矩陣：找最多0列或行降維

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## ➡ 3. 特殊矩陣：列或行成比例的矩陣， $\det(A)=0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix},$$



# 總結：矩陣的行列式值各種方法

➡ 4. 特殊矩陣：三角矩陣的行列式值=對角線元素相乘

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{bmatrix} = (1)(7)(3)(-26) = -546$$

➡ 5. 特殊矩陣：基本(近似單位)矩陣的行列式值

➡ 近似單位矩陣, 雖然有特異數字

➡  $\text{Det}(A) = 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$I_4$  的最後一列乘上 7  
倍加到第 1 列去



# 總結：矩陣的行列式值各種方法

## ➡ 6. 沒有特殊性的矩陣(1)：餘因子法，降一個維度

➡ 步驟1：任選一行，任選一列

➡ 步驟2：計算餘因子

➡ 步驟3：正負號

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

## ➡ 7. 沒有特殊性的矩陣(2)：列運算(高斯消去法)，降一個維度

➡ 步驟1：列運算(高斯消去法)

➡ 步驟2：餘因子法（三步驟）

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

# 你要如何解這一題的行列式值

➡ 求行列式值

(page. 109, 習題16)

$$16. \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

# 你要如何解這一題的行列式值

➡ 求行列式值

(page. 109, 習題18)

**18.** 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

# 你要如何解這一題的行列式值

➡ 求行列式值

(page. 108, 習題15)

$$15. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# 你要如何解這一題的行列式值

➡ 求行列式值

(page. 108, 習題9)

9. 
$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

# 你要如何解這一題的行列式值

➡ 求行列式值

(page. 96, 範例1)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



## 12. 行列式值的許多特性定理

列有共同倍數 $k$ 、 $\det(A+B)$ 、  
 $\det(AB)$ 、反矩陣

$kA$  中共有  $n$  個列有共同倍數  $k$  的行列式值

➡  $kA$  中共有  $n$  個列有共同倍數  $k$  的行列式值 (page. 99)

$$\det(kA) = k^n \det(A)$$

➡ 例如：

$$\text{➡ } A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 * 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{➡ } \det(2*3A) = 2*3*\det(A)$$

# 範例1： $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

➡ 證明： $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$  (page. 99)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A + B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1$$

$$\det(B) = 8$$

$$\det(A + B) = 23$$

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

# 同維度方陣，

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

➡ 範例證明：

(page. 100)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

➡  $\det(A) = 1$

➡  $\det(B) = -23$

➡  $\det(AB) = -23$

➡ 所以，  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

# 反矩陣的行列式=1/det(A)

- ➡ 若A是可逆矩陣，證明： (page. 102)

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

- ➡ 或是： $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$





## 14. 行列式值的應用：解聯立方程式

### **Cramer's rule**克拉瑪法



# 解聯立方程式方法2：克拉瑪法則

- 3. 計算聯立方程式的方法有三種：
  - (1). 高斯消去法
  - (2). Cramer's rule 克拉瑪法則
  - (3). 反矩陣法

# Cramer's rule 克拉瑪法則

- ➡  $Ax = b$  為  $n$  個方程式、 $n$  個變數的線性系統 (page. 105)
- ➡  $\det(A) \neq 0$ ，則系統有唯一解為：

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

- ➡ 其中， $A_j$  為將  $A$  矩陣第  $j$  行替換成下式  $b$  後的矩陣

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

# 範例8：使用克拉馬法則解線性系統

➡ 求解

(page. 107)

$$\begin{array}{rcl} x_1 + & & + 2x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{array}$$

# 範例8：使用克拉馬法則解線性系統

➤ 1. 解聯立方程式，要先判斷是否有唯一解？(page. 107)

➤ 若  $\det(A) \neq 0$ ，則有唯一解

➤  $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 6 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 12 + 0 + 12 + 8 + 12 - 0 = 44$ ，有唯一解

➤ 2. 克拉馬：  $x = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{\det\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 30 & 4 & 6 & 30 & 4 \\ 8 & -2 & 3 & 8 & -2 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{72 + 0 - 120 - 64 + 72 - 0}{44} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}$

➤  $y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 1 & 6 \\ -3 & 30 & 6 & -3 & 30 \\ -1 & 8 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{90 - 36 - 48 + 60 - 48 + 54}{44} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}$

➤  $z = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 30 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 8 & -1 & -2 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{32 + 0 + 36 + 24 + 60 - 0}{44} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$

1. 解聯立方程式，要先判斷是否有唯一解？(page. 107)  
 若  $\det(A) \neq 0$ ，則有唯一解  
 $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 6 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 12 + 0 + 12 + 8 + 12 - 0 = 44$ ，有唯一解  
 2. 克拉馬：  
 $x = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{\det\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 30 & 4 & 6 & 30 & 4 \\ 8 & -2 & 3 & 8 & -2 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{72 + 0 - 120 - 64 + 72 - 0}{44} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}$   
 $y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 1 & 6 \\ -3 & 30 & 6 & -3 & 30 \\ -1 & 8 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{90 - 36 - 48 + 60 - 48 + 54}{44} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}$   
 $z = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 30 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 8 & -1 & -2 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{32 + 0 + 36 + 24 + 60 - 0}{44} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$

# 習題37：使用克拉馬法則解線性系統

➡ 求解

(page. 110)

$$x + 2y - 3z = -4$$

$$4x - y + 2z = 8$$

$$2x + 2y - 3z = -3$$

# 範例8：Python程式碼

```
from sympy import *  
x1, x2, x3 = symbols(' x1 x2 x3' )  
A = Matrix([  
    [1, 0, 2, 6],  
    [-3, 4, 6, 30],  
    [-1, -2, 3, 8]  
])  
ans = solve_linear_system(A, x1, x2, x3)  
print(' X=', ans)
```

```
X= {x1: -10/11, x2: 18/11, x3: 38/11}
```





15. Final: 有同學在問，  
學行列式有什麼用？

- 
- ➡ 學行列式有什麼用？
  - ➡ 就看你是管理統計學系？
  - ➡ 還是資訊電機學系？



# 管理統計學系的行列式

➡ 1. 用途：行列式可以求解聯立方程式

➡ Cramer' s rule 克拉瑪法則

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

➡ 2. 用途：求解聯立方程式前，先算行列式，判別是否有解

➡ 若  $\det(A) \neq 0$ ，表示系統有唯一解，即可用高斯消去法求解

➡ 3. 用途：算行列式，可判別：唯一解，無解，無限多解？

➡ 若  $\det(A) \neq 0$ ，則系統有唯一解

➡ 若  $\det(A) = 0$ ，則系統可能無解，可能無限多組解

➡ 若  $\det(A) = 0$ ，且  $\det(A|B) = 0$ ，則無限多組解

➡ 若  $\det(A) = 0$ ，且  $\det(A|B) \neq 0$ ，則無解



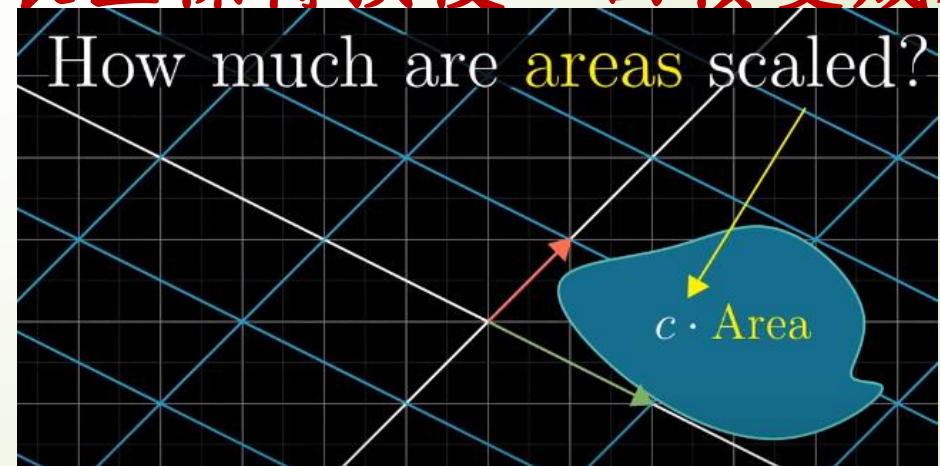
# 資訊電機學系的行列式

➡ 行列式值 = 線性映射(坐標轉換)後單位區域的變形率、縮放率

➡ 2D矩陣：代表座標轉換後，面積的縮放率

➡ 3D矩陣：代表座標轉換後，體積的縮放率

➡ 例如： $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$  行列式=2，代表坐標轉換後，面積變成2倍





# 資訊電機學系的行列式

- ➡ 行列式值=線性映射(坐標轉換)後單位區域的變形率、縮放率
- ➡ 解釋講義：
  - ➡ <https://acupun.site/lecture/linearAlgebra/pdfEssence/chp6-determinant.pdf>



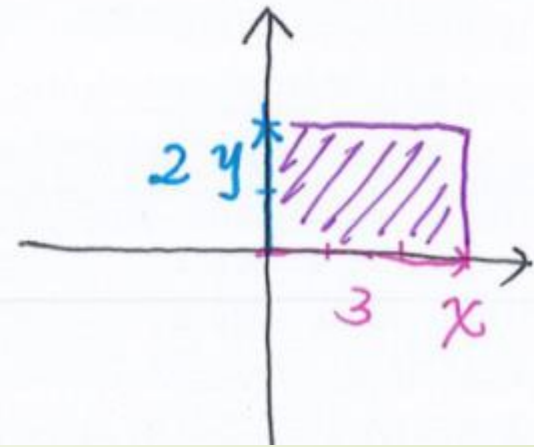
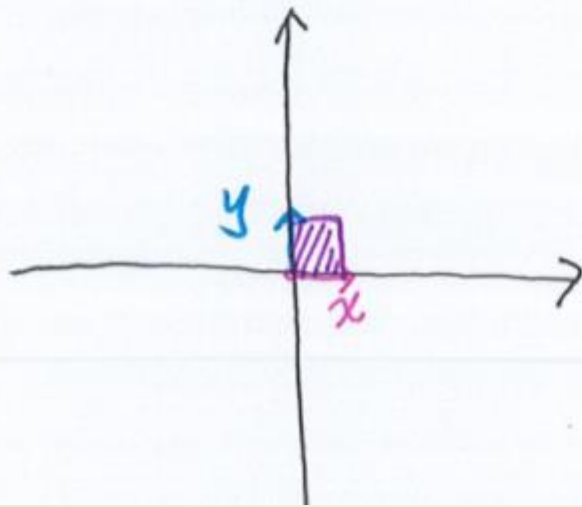
# 行列式值determinant>1代表的物理意義

8.

$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  代表座標轉換, 面積大6倍,

①  $\det(A) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 6.$

②



# 行列式值determinant=1代表的物理意義

9

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  代表轉換後, 面積不變.

①  $\det(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$  ②





# 行列式值determinant=0代表的物理意義

10

$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  代表轉換後，從面變成線，(沒有面積)。

①  $\det(A) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 0$       ② 

△代表降階：體積 → 面

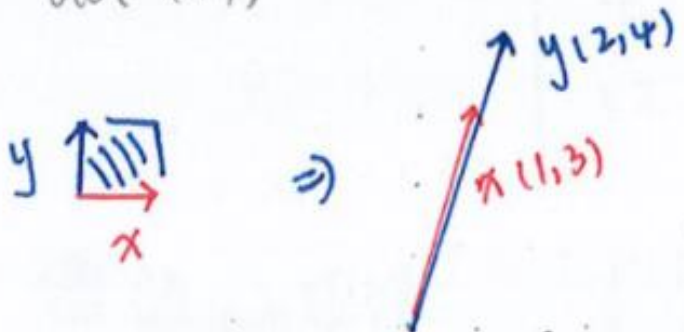
面 → 線

線 → 黑點

# 行列式值determinant<0代表的物理意義

- ➡ 原本(i, j)右手定則=i食指, j中指, 平面法向量=拇指
- ➡ 轉換後(i, j)右手定則
  - ➡ i食指, j中指, 平面法向量=拇指
  - ➡ 發現：拇指轉成另外一面
  - ➡ 代表意義：翻面

2.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$   
 $\det(A) = 4 - 6 = -2 \Rightarrow$  代表座標轉換後, 單位面積膨脹2倍, 但同時會被翻面

  $\Rightarrow$  會在遠方形成平行四邊形

2. 行列式值=0代表什麼物理意義？

A. 網格被壓縮到面積為0

B. 被壓縮到降階（面→線，線→點）

C. 無限多解，或是無解

### 範例3：行列式值determinant=0代表的物理意義

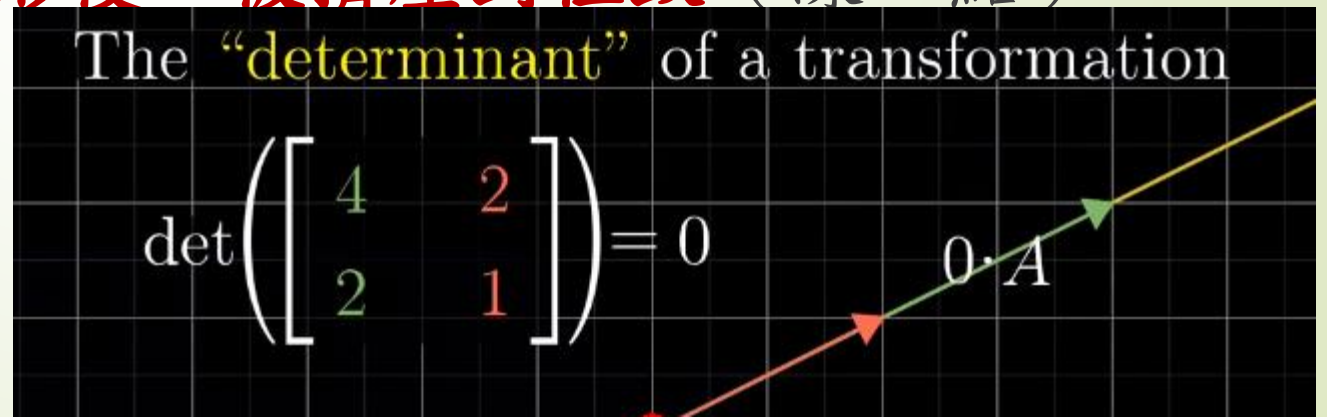
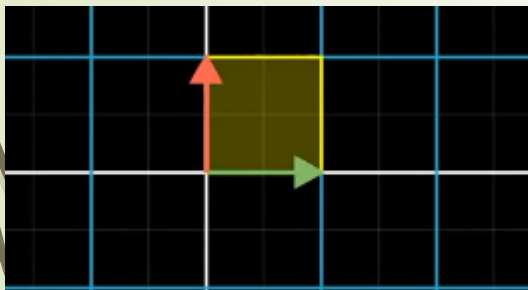
➡ 網格變換矩陣 =  $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

➡ 單位區域面積Area  $\rightarrow C \cdot \text{Area} = 0 \cdot \text{Area}$

➡ 轉換的行列式值 = 變形係數  $C = \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$

➡ 代表物理意義：網格變形後的區域**不是面積**，而是**直線**，或是一**點**（所以沒有面積）

➡ 代表物理意義：**網格變形後，被擠壓到極致**（線，點）



2. 行列式值=負，代表什麼意義？

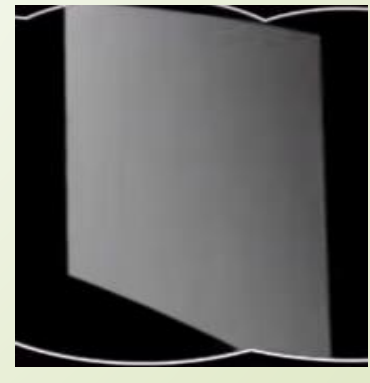
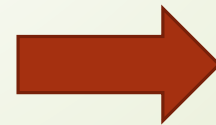
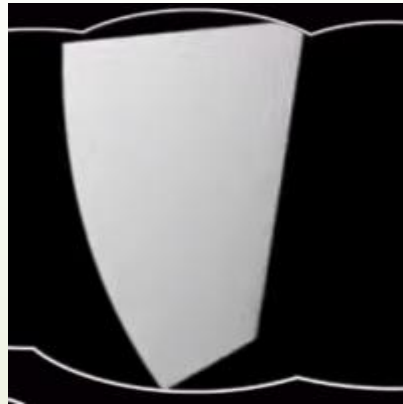
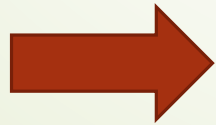
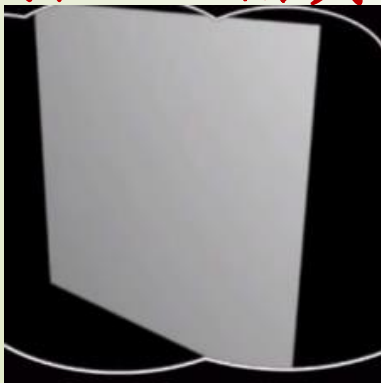
網格被壓縮到翻面

原本 $(i, j, k)$ 右手定則= $i$ 食指,  $j$ 中指  
轉轉座標後，左手定則= $i$ 食指,  $j$ 中指



## 範例4：行列式值determinant=負值代表的意義

- ➡ 網格變換矩陣 =  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
- ➡ 單位區域面積Area  $\rightarrow C \cdot \text{Area} = -2 \cdot \text{Area}$
- ➡ 轉換的行列式值 = 變形係數  $C = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right) = -2$
- ➡ 代表物理意義：網格變形後，座標整個翻轉（翻面flipping，反面）
- ➡ 類似：翻頁



# 範例8：3D行列式值 $\det(M) < 0$ 代表的物理意義

## ■ 使用右手定則：

■ 食指： $i$ 軸方向

■ 中指： $j$ 軸方向

■ 拇指： $k$ 軸方向



■ (1). 若變形後， $i j k$ 符合右手三指方向， $\det(M)$ =正值

■ (2). 若變形後， $i j k$ 符合左手三指方向， $\det(M)$ =負值(被翻面)

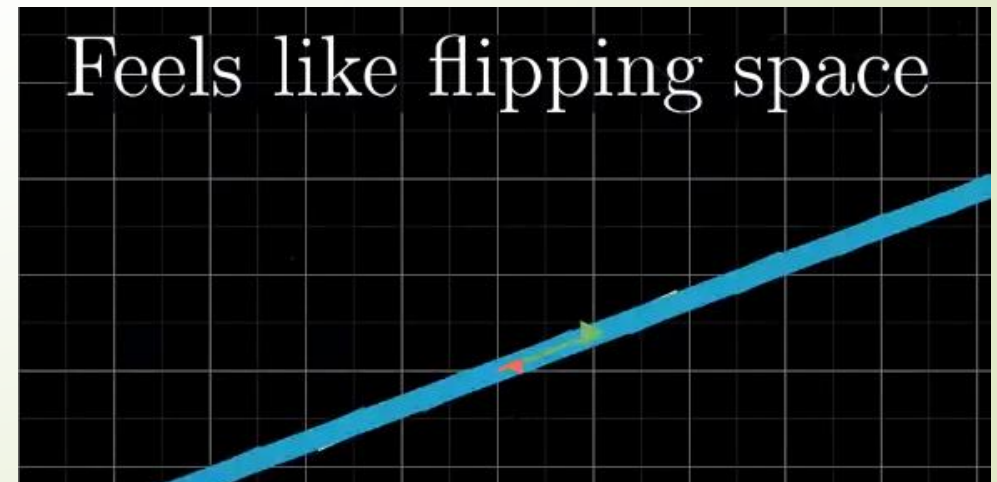
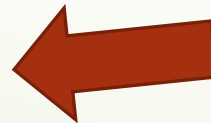
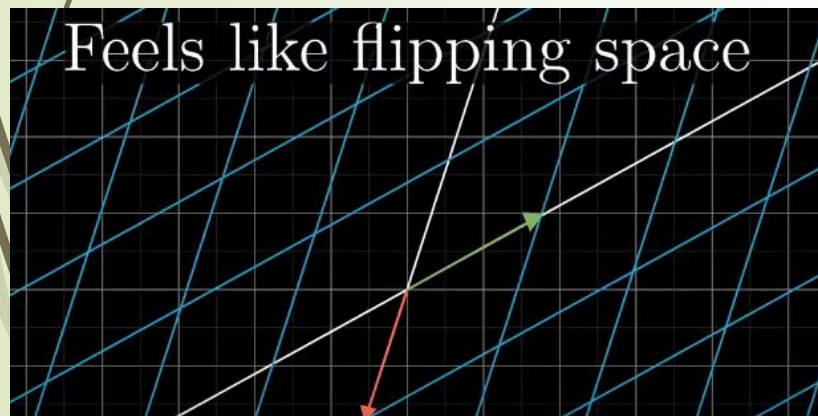
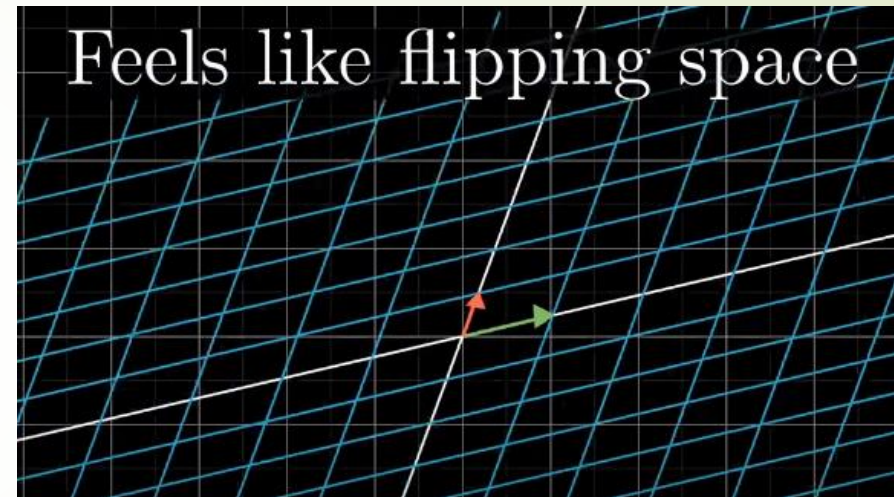
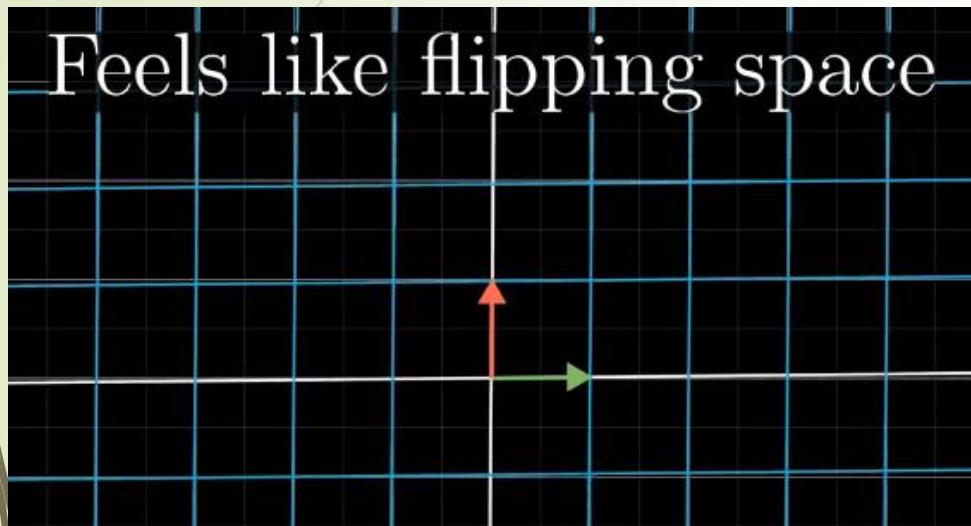
■ (3). 若變形後，被壓縮成點線面， $\det(M)=0$





## 範例4：行列式值determinant=負值代表的意義

- ➡ 代表：座標整個翻轉（翻面flipping，反面）
- ➡ 類似：翻頁



## 範例4：行列式值determinant=負值代表的意義

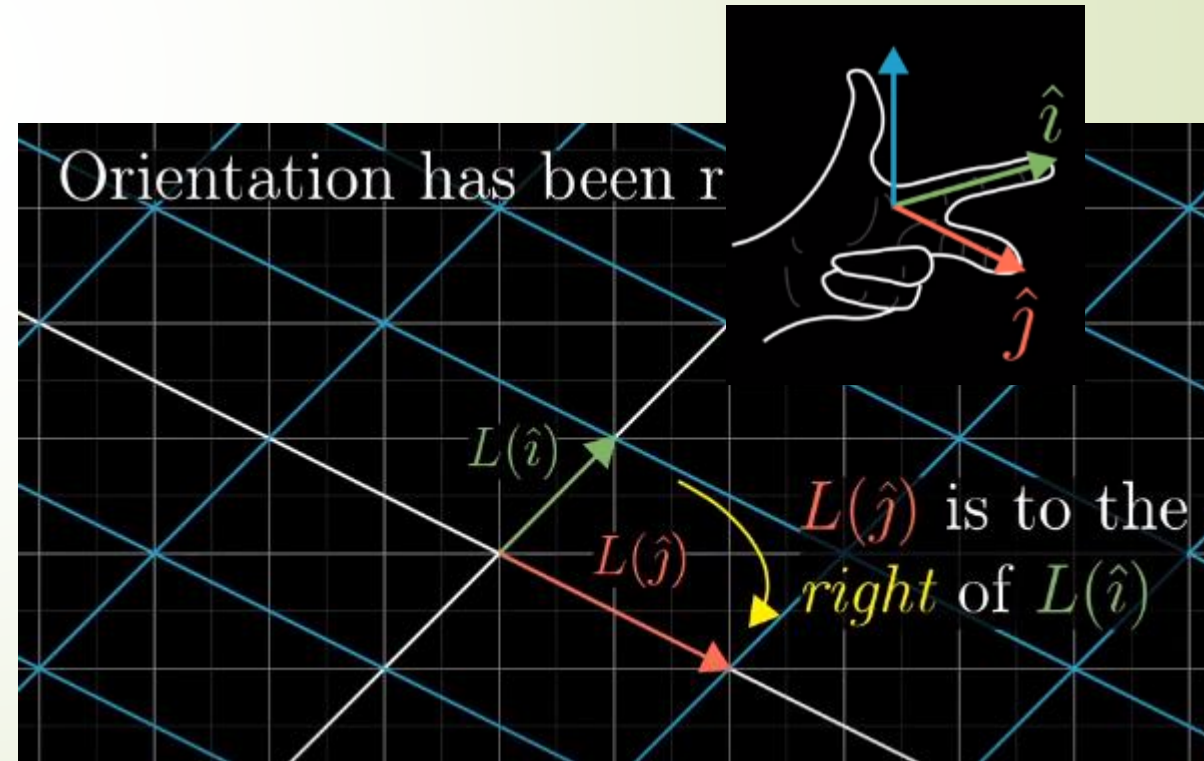
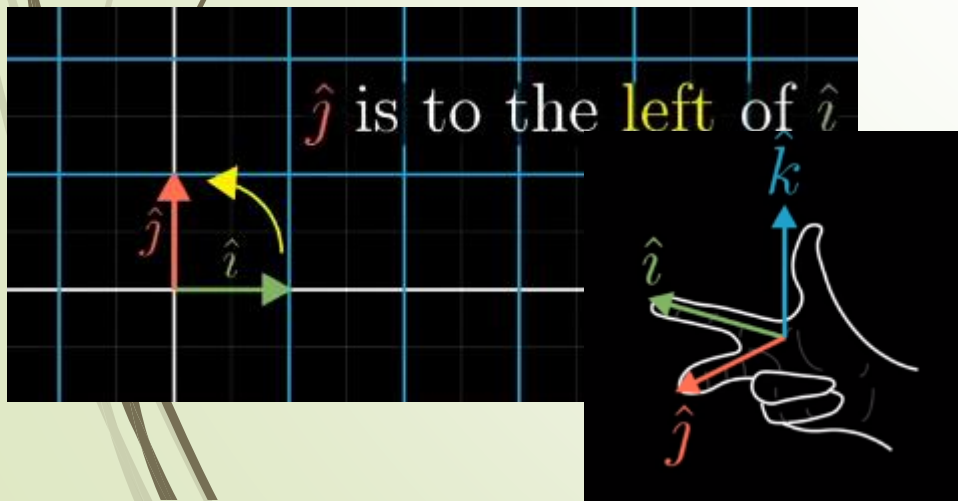
➡ 代表意義：原本座標*i*在*j*軸的右方，但是若是整個翻面，則*j*在*i*軸的右方

➡  $\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = -\text{負值}$

= 座標平面翻面flipping

= *j*在*i*軸的右方

原本(*i*, *j*, *k*)右手定則=*i*食指, *j*中指  
轉轉座標後，左手定則=*i*食指, *j*中指

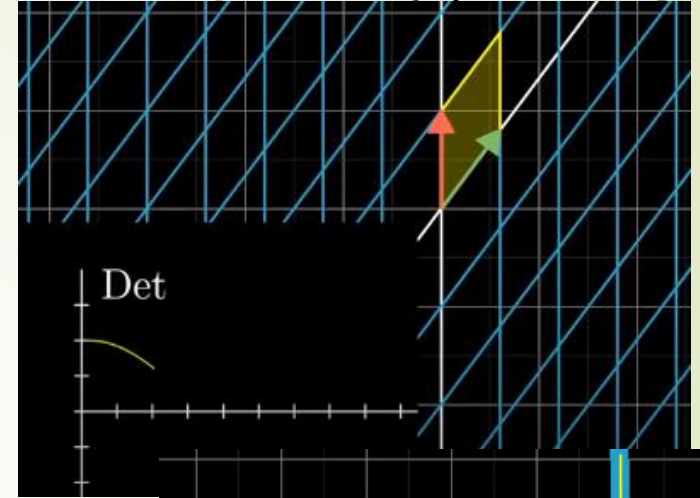


# 範例5：追蹤行列式值determinant值變化代表的意義

➡ 翻轉座標平面：

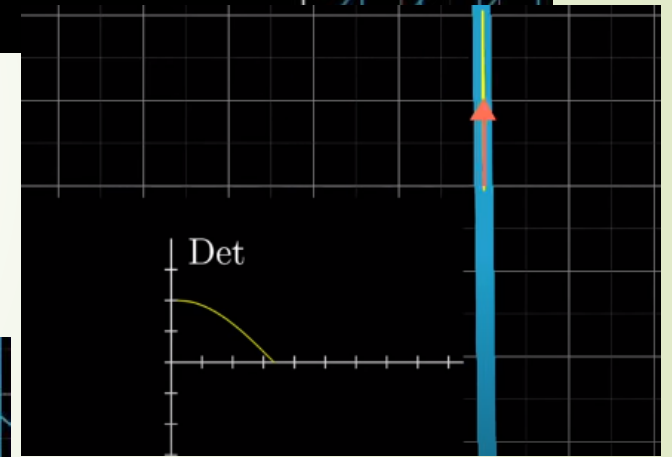
➡  $\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  = 正值

$\det() > 1$ ，被放大  
 $\det() < 1$ ，被壓縮

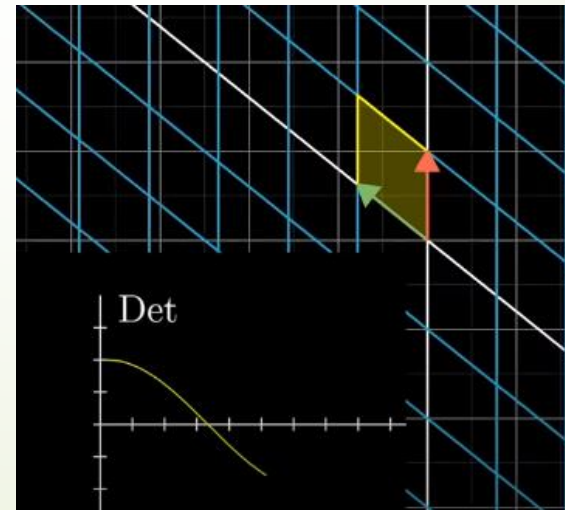


➡  $\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  = 0

$\det() = 0$   
被壓縮成一條線，



➡  $\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  = 負值  
 $\det() < 0$   
被翻面







# 16. Final: 本章行列式的 重點摘要



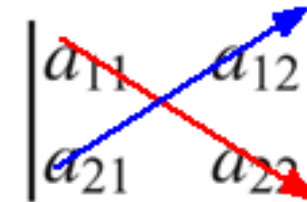
# 行列式的重點摘要-1

- ➡ 1. 行列式非常實用，且重要
- ➡ 2. 行列式功用1：預先判斷聯立方程式是否有唯一解
  - ➡ 若 $\det(A) \neq 0$ ，則系統有唯一解，即可用高斯消去法求解
- ➡ 3. 行列式功用2：預先判斷反矩陣是否存在
  - ➡ 若 $\det(A) \neq 0$ ，則反矩陣存在，即可用公式計算反矩陣
- ➡ 4. 矩陣A的行列式值 $\det(A)$ 所代表的物理意義
  - ➡ 2D矩陣：代表座標轉換後，面積的縮放率
  - ➡ 3D矩陣：代表座標轉換後，體積的縮放率

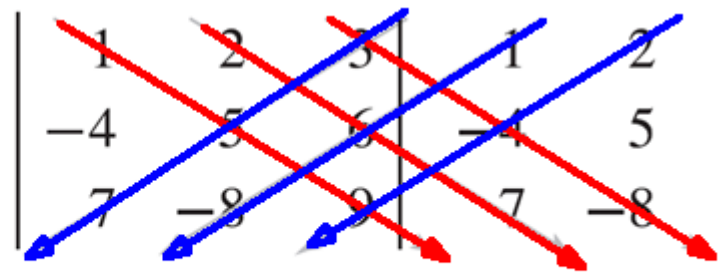


# 行列式的重點摘要-2

## ➡ 5. 2D行列式特殊公式：

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$


## ➡ 6. 3D行列式特殊公式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = [45 + 84 + 96] - [105 - 48 - 72]$$






# 行列式的重點摘要-3

## 7. 4D以上行列式公式：餘因子法

找任何一列（有0的最好，因為可以省略計算）

■ = 
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

方法二：任何一行或一列展开

■ = 
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第一行展开}} a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$



# 判別是否有唯一解的方法有兩種

➡ (1). 方法1：用增廣矩陣，將之化簡：簡化列梯形，然後評估每個變數是否存在？

➡ 缺點：速度慢，幾乎已經把高斯消去法，計算到最後才知道

(a) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

無解

(b) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

無限多組解

➡ (2). 方法2：用原始矩陣A的行列式 $\det(A)$ 判別

➡ 解聯立方程式之前要先判斷是否有唯一解 $\Rightarrow \det(A) \neq 0$

➡ 若 $\det(A) \neq 0$ ，則系統有唯一解



# 解聯立方程式的重點摘要-1

- ➡ 1. 解聯立方程式之前要先判斷是否有唯一解  
 $\Rightarrow \det(A) \neq 0$

➡ 因為克拉瑪法則解 $x_1, x_2, \dots$ 的公式為

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},$$

- ➡ 若是 $\det(A)=0$ ， $\det(A_1) \neq 0$ ，則系統無解
- ➡ 若是 $\det(A)=0$ ， $\det(A_1) = 0$ ，則系統無限多解

- ➡ 2. 求解聯立方程式，求解反矩陣，都是要先判斷 $\det(A) \neq 0$ ，才有唯一解





# 解聯立方程式的重點摘要-2

- ➡ 3. 計算聯立方程式的方法有三種：
  - ➡ (1). 高斯消去法
  - ➡ (2). Cramer' s rule 克拉瑪法則
  - ➡ (3). 反矩陣法



# 解聯立方程式的重點摘要-3

## ➡ 4. 計算聯立方程式的方法有三種：

➡ (1). 高斯消去法 (用擴展矩陣)

➡ (2). 反矩陣法

➡  $A^{-1} = \frac{\text{伴隨矩陣}}{\det(A)} = \frac{\text{餘因子矩陣}^T}{\det(A)}$  (餘因子矩陣要注意正負號)

➡ 解聯立方程式： $\vec{x} = A^{-1}\vec{v}$

➡ (3). Cramer's rule 克拉瑪法則

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

用高斯喬丹消去法，結果

$$A^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$