

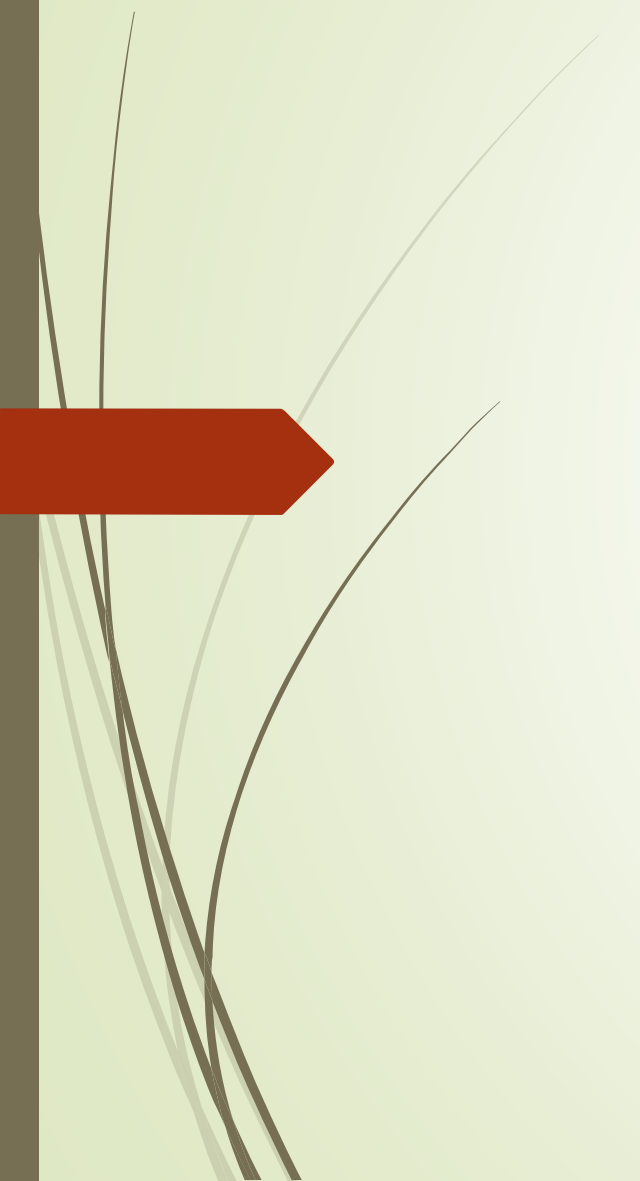
線性代數第6章

反矩陣inverse

LU分解算聯立方程式

判別解有一致性consistent

陳擎文老師



1. 典型範例

碩士班考題

Find the **LU** decomposed of $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(84 中興應數)

碩士班考題

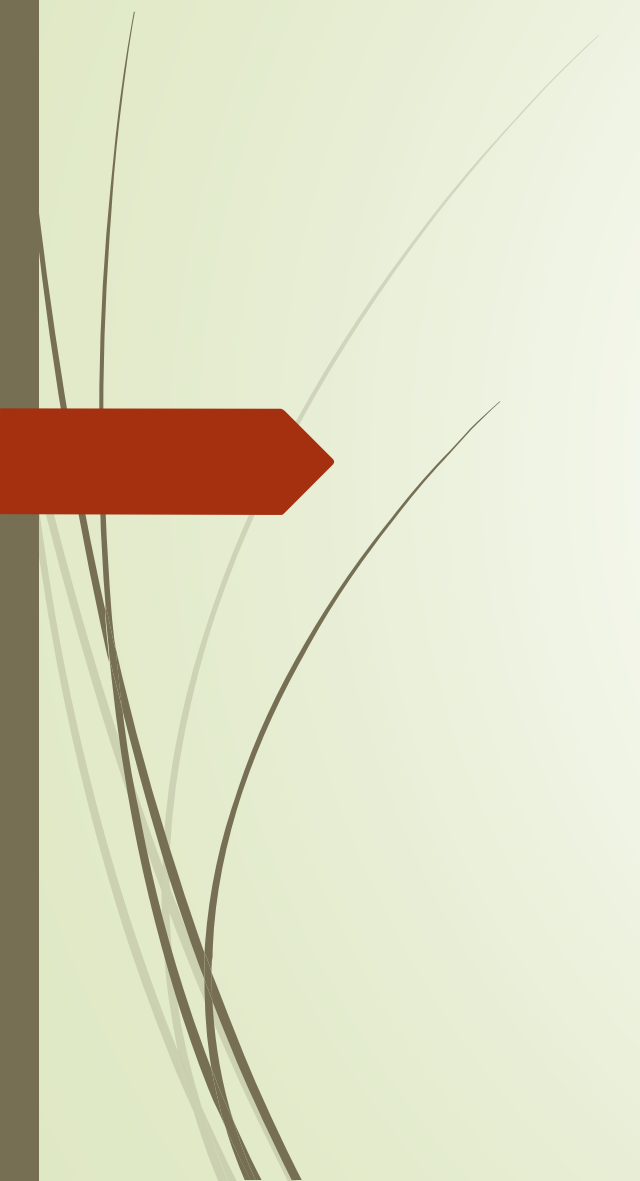
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ -4 & -8 & -10 & -2 \end{bmatrix}, \text{ 進行 } \mathbf{P}^T \mathbf{A} = \mathbf{LU} \text{ 之分解}$$

(交大資訊)

碩士班考題

Find an LU factorization of $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

(95 台科大電機)



2. 重點摘要



反矩陣，逆矩陣的重點摘要-1

- ➡ 1. 2x2矩陣的反矩陣算法，有特殊公式(常用)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- ➡ 2. 算反矩陣之前，要先驗證『有沒有反矩陣存在』，這個很重要
- ➡ 3. 驗證有沒有反矩陣的方法= $\det(A)$ =算行列式值
 - ➡ 只要 $\det(A) \neq 0$ ，就會有反矩陣存在

$$\det(A) = ad - bc$$

- ➡ 4. 計算反矩陣的方法有三種：



反矩陣，逆矩陣的重點摘要-2

- 4. 計算反矩陣的方法有三種：
 - (1). 2×2 矩陣的反矩陣算法，有特殊公式(常用)
 - (2). 高斯消去法 (擴展矩陣)
 - (3). 餘因子方法



反矩陣，逆矩陣的重點摘要-3

➡ 4. 計算反矩陣的方法有三種：

➡ (1). 2x2矩陣的反矩陣算法，有特殊公式(常用)

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

➡ (2). 高斯消去法

➡ 擴展矩陣

用高斯喬丹消去法，結果

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

➡ (3). 餘因子法

➡ 公式：

$$A^{-1} = \frac{\text{伴隨矩陣}}{\det(A)} = \frac{\text{餘因子矩陣的轉置矩陣}}{\det(A)}$$



反矩陣，逆矩陣的重點摘要-4

➡ 5. 反矩陣的用途有二種：

➡ (1). 解聯立方程式

➡ 聯立方程式： $A\vec{x}=\vec{v}$

➡ 解聯立方程式： $\vec{x}=A^{-1}\vec{v}$

➡ (2). 座標轉換（逆轉換矩陣）

➡ $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ = 原本座標網格被轉換後的轉換矩陣

➡ $A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ = 逆轉回到原位置的轉換矩陣



解聯立方程式的重點摘要-1

- ➡ 1. 解聯立方程式之前要先判斷是否有唯一解

⇒ $\det(A) \neq 0$

- ➡ 因為克拉瑪法則解 $x_1, x_2, \dots$ 的公式為

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},$$

- ➡ 若是 $\det(A)=0$ ，則系統無解，或是無限多組解

- ➡ 2. 求解聯立方程式，求解反矩陣，都是要先判斷 $\det(A) \neq 0$ ，才有唯一解





解聯立方程式的重點摘要-2

- ➡ 3. 計算聯立方程式的方法有四種：
 - ➡ (1). 高斯消去法
 - ➡ (2). Cramer' s rule 克拉瑪法則
 - ➡ (3). 反矩陣法
 - ➡ (4). LU分解法



解聯立方程式的重點摘要-3

➡ 4. 計算聯立方程式的方法有三種：

➡ (1). 高斯消去法 (用擴展矩陣)

➡ (2). 反矩陣法

➡ $A^{-1} = \frac{\text{伴隨矩陣}}{\det(A)} = \frac{\text{餘因子矩陣}^T}{\det(A)}$ (餘因子矩陣要注意正負號)

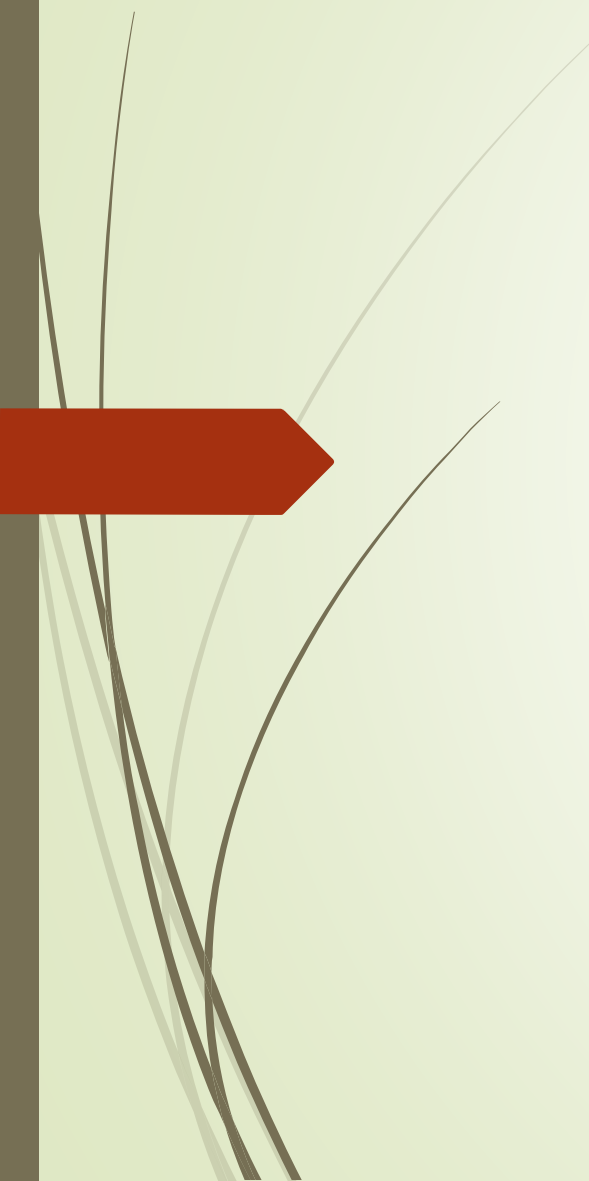
➡ 解聯立方程式： $\vec{x} = A^{-1}\vec{v}$

➡ (3). Cramer's rule 克拉瑪法則

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

用高斯喬丹消去法，結果

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$



以下介紹課本的 數學定理，公式，範例



1. 反矩陣inverse的定理

$$A A^{-1} = I$$

單位矩陣 (identity matrix)

➡ 單位矩陣記作 I

(page. 38)

$$[1], \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

矩陣A與單位矩陣相乘=A

➡ (page. 39)

$$AI_n = A \quad \text{且} \quad I_m A = A$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$



若 A 有反矩陣 A^{-1}

則稱呼 A 為： 可逆矩陣invertible

若A沒有反矩陣 A^{-1}

則稱呼A為：奇異矩陣singular

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

反矩陣B，可逆矩陣A，奇異矩陣A

➡ $AB = BA = I$ (page. 40)

➡ 若A為方陣，且B矩陣的大小與A相同

➡ (1). 稱B為A的反矩陣 (inverse)，或逆矩陣

➡ (A). 若B存在，則A為可逆的invertible，或稱非奇異的nonsingular

➡ (B). 若B不存在，則A稱為奇異的singular

範例5：A是可逆矩陣

令

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{且} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(page.40)

則

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

因此， A 、 B 都是可逆矩陣，且互為反矩陣。

奇異矩陣singular

➡ 奇異矩陣

(page. 40)

- ➡ 1. 無法找到B 矩陣(令 $AB=I$)，則A 稱為**奇異**
- ➡ 2. 有任一**列為零**或任一**行為零**的方陣，是奇異矩陣

➡ 範例：

- ➡ 無法找到 $AB=I$
- ➡ 因為列為零，對角線必有一個為零

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

反矩陣 A^{-1}

- ➡ 若是存在可逆矩陣，就是反矩陣，我們將之記作 A^{-1} (page. 41)

$$AA^{-1} = I \quad \text{且} \quad A^{-1}A = I$$

2.計算反矩陣方法(1)

2×2矩陣的反矩陣算法，有特殊公式(常用)

2x2矩陣A的反矩陣 A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- ➡ 若 $ad - bc \neq 0$ ，則其反矩陣公式為 (page. 42)

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- ➡ 所以算反矩陣前，要先驗證反矩陣是否存在？

- ➡ 方法： $\det(A) \neq 0$ ，行列式值 $\neq 0$

- ➡ 行列式值1： $\det(A) = ad - bc$

- ➡ 行列式值2： $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

範例7-1：計算 2×2 的反矩陣

- 先決定是否為可逆矩陣，若是，則求其反矩陣： (page. 42)

$$(a) A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

- (1). 是否為可逆矩陣： $\det(A) \neq 0$

- Det(A) = $12 - 5 = 7 \neq 0$ ，所以，有唯一解，可逆，有反矩陣

- (2). 反矩陣公式：

- $$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}}{7}$$

範例7-1：Python程式碼

```
import numpy as np
```

```
A = np.array([
```

```
    [6, 1],
```

```
    [5, 2]
```

```
])
```

```
A_inv = np.linalg.inv(A)
```

```
print(' 反矩陣=\n', A_inv)
```

反矩陣=

```
[[ 0.28571429 -0.14285714]
```

```
[-0.71428571  0.85714286]]
```

範例7-2：計算 2×2 的反矩陣

- 先決定是否為可逆矩陣，若是，則求其反矩陣：（page. 42）

$$(b) A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

- (1). 是否為可逆矩陣： $\det(A) \neq 0$

- $\det(A) = 6 - 6 = 0$ ，

- 所以，沒有唯一解，不可逆，奇異，沒有反矩陣

- A不可逆

- A沒有反矩陣

範例7-2：Python程式碼

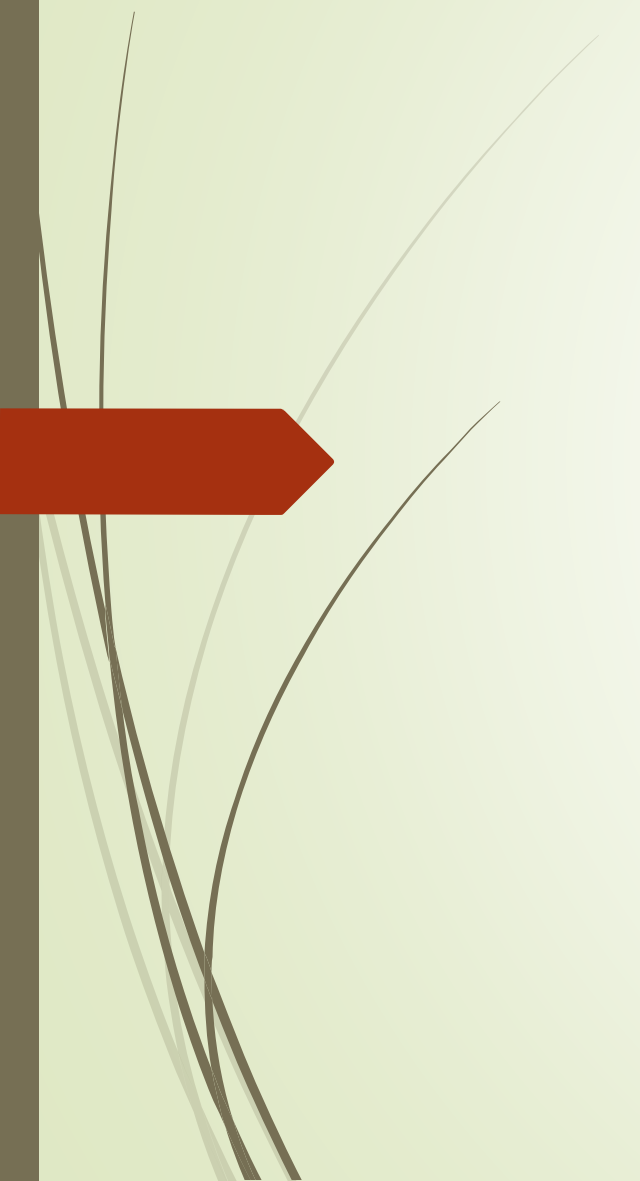
```
import numpy as np
```

```
A = np.array([  
    [-1, 2],  
    [3, -6]  
])
```

```
A_inv = np.linalg.inv(A)
```

```
print(' 反矩陣=\n', A_inv)
```

```
raise_linalgerror_singular  
raise LinAlgError("Singular matrix")  
  
LinAlgError: Singular matrix
```



3. 計算反矩陣方法(2)

高斯消去法（擴展矩陣）

證明：高斯喬丹消去法

最後的右方參數是反矩陣

- ➡ $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ ，求 A^{-1} ：
- ➡ (課本 page. 49) 是證明過程
- ➡ $AX=Y$ ，求解 X ？
- ➡ 擴增矩陣 = $\begin{bmatrix} A & Y \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{ccccc} \begin{bmatrix} -1 & 3 & \vdots & 1 & 0 \\ 1 & -4 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\text{高斯-喬登消去法}} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & -4 & -3 \\ 0 & 1 & \vdots & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ A & & I_n & & A^{-1} \end{array}$$

範例1： A^{-1} 求法的原理

➡ $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ ，求 A^{-1} ：

(page. 48)

➡ 已知， $A A^{-1} = I$

➡ 所以 $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 & y1 \\ x2 & y2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

➡ 所以只要解出聯立方程式 $\begin{bmatrix} x1 & y1 \\ x2 & y2 \end{bmatrix}$ ，就知道 A^{-1}

➡ 用高斯喬丹法，解 $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 & y1 \\ x2 & y2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

A^{-1} 求法的原理

➡ $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ ，求 A^{-1} ：

(page. 48)

➡ 解 $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 & y1 \\ x2 & y2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

➡ 先轉成擴增矩陣 $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

➡ 用高斯喬丹消去法，結果

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} \begin{bmatrix} -1 & 3 & \vdots & 1 & 0 \\ 1 & -4 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\text{高斯 - 喬登消去法}} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & -4 & -3 \\ 0 & 1 & \vdots & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ A & & I_n & & A^{-1} \end{array}$$

Python 程式碼

```
import numpy as np
A = np.array([
    [-1, 3],
    [1, -4]
])
A_inv = np.linalg.inv(A)
print('反矩陣=\n', A_inv)
```

反矩陣=

$$\begin{bmatrix} -4. & -3. \\ -1. & -1. \end{bmatrix}$$



範例 4: 使用列運算求 A^{-1}

➡ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ ，求 A^{-1} ：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

(page. 50)

➡ 已知， $A A^{-1} = I$

➡ 所以 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 & y1 & z1 \\ x2 & y2 & z2 \\ x3 & y3 & z3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

➡ 所以只要解出聯立方程式 $\begin{bmatrix} x1 & y1 & z1 \\ x2 & y2 & z2 \\ x3 & y3 & z3 \end{bmatrix}$ ，就知道 A^{-1}

➡ 先轉成擴增矩陣，解 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



範例 4: 使用列運算求 A^{-1}

➡ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, 求 A^{-1} :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

➡ 先轉成擴增矩陣，解 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

➡ 用高斯喬丹消去法，結果

➡ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

範例 4: Python 程式碼

```
import numpy as np
A = np.array([
    [1, 2, 3],
    [2, 5, 3],
    [1, 0, 8]
])
A_inv = np.linalg.inv(A)
print(' 反矩陣=\n', A_inv)
```

反矩陣=

```
[[-40.   16.    9.]
 [ 13.   -5.   -3.]
 [  5.   -2.   -1.]]
```



反矩陣，逆矩陣的重點摘要-1

- ➡ 1. 2x2矩陣的反矩陣算法，有特殊公式(常用)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- ➡ 2. 算反矩陣之前，要先驗證『有沒有反矩陣存在』，這個很重要
- ➡ 3. 驗證有沒有反矩陣的方法= $\det(A)$ =算行列式值
 - ➡ 只要 $\det(A) \neq 0$ ，就會有反矩陣存在

$$\det(A) = ad - bc$$

- ➡ 4. 計算反矩陣的方法有三種：



反矩陣，逆矩陣的重點摘要-2

- 4. 計算反矩陣的方法有三種：
 - (1). 2×2 矩陣的反矩陣算法，有特殊公式(常用)
 - (2). 高斯消去法 (擴展矩陣)
 - (3). 餘因子方法



反矩陣，逆矩陣的重點摘要-3

➡ 4. 計算反矩陣的方法有三種：

➡ (1). 2x2矩陣的反矩陣算法，有特殊公式(常用)

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

➡ (2). 高斯消去法

➡ 擴展矩陣

用高斯喬丹消去法，結果

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

➡ (3). 餘因子法

➡ 公式：
$$A^{-1} = \frac{\text{伴隨矩陣}}{\det(A)} = \frac{\text{餘因子矩陣的轉置矩陣}}{\det(A)}$$

4. 計算反矩陣前的判斷

先判斷 A 是否可逆
(是否有反矩陣)



反矩陣，逆矩陣的重點摘要-4

➡ 5. 反矩陣的用途有二種：

➡ (1). 解聯立方程式

➡ 聯立方程式： $A\vec{x}=\vec{v}$

➡ 解聯立方程式： $\vec{x}=A^{-1}\vec{v}$

➡ (2). 座標轉換（逆轉換矩陣）

➡ $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ = 原本座標網格被轉換後的轉換矩陣

➡ $A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ = 逆轉回到原位置的轉換矩陣



範例 5: 使用列運算求 A^{-1}

➡ $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, 求 A^{-1} :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

➡ 先判斷是否可逆

➡ $\Rightarrow \det(A) = 20 + 6 + 16 + 16 + 2 - 60 = 0$

➡ 所以，沒有唯一解，不可逆，奇異，沒有反矩陣

➡ $\det(A) = 0$, 不可逆

➡ 沒有反矩陣

➡

(page. 51)

範例 5: Python 程式碼

```
import numpy as np
A = np.array([
    [1, 6, 4],
    [2, 4, -1],
    [-1, 2, 5]
])
A_inv = np.linalg.inv(A)
print(' 反矩陣=\n', A_inv)
```

```
_raise_linalgerror_singular
raise LinAlgError("Singular matrix")
```

```
LinAlgError: Singular matrix
```

範例 5: Python 程式碼

```
from sympy import *
```

```
A = Matrix([  
    [1, 6, 4],  
    [2, 4, -1],  
    [-1, 2, 5]
```

```
])
```

```
A_inv = A.inv()
```

```
print(' 矩陣A=\n', A_inv)
```

```
NonInvertibleMatrixError: Matrix det == 0; not invertible.
```

範例 6: 使用列運算求 A^{-1}

➡ 求 A^{-1}

➡ 先判斷是否可逆

➡ $\Rightarrow \det(A)=0$

➡ 所以，沒有唯一解，不可逆，奇異，沒有反矩陣

➡ $\det(A)=0$, 不可逆

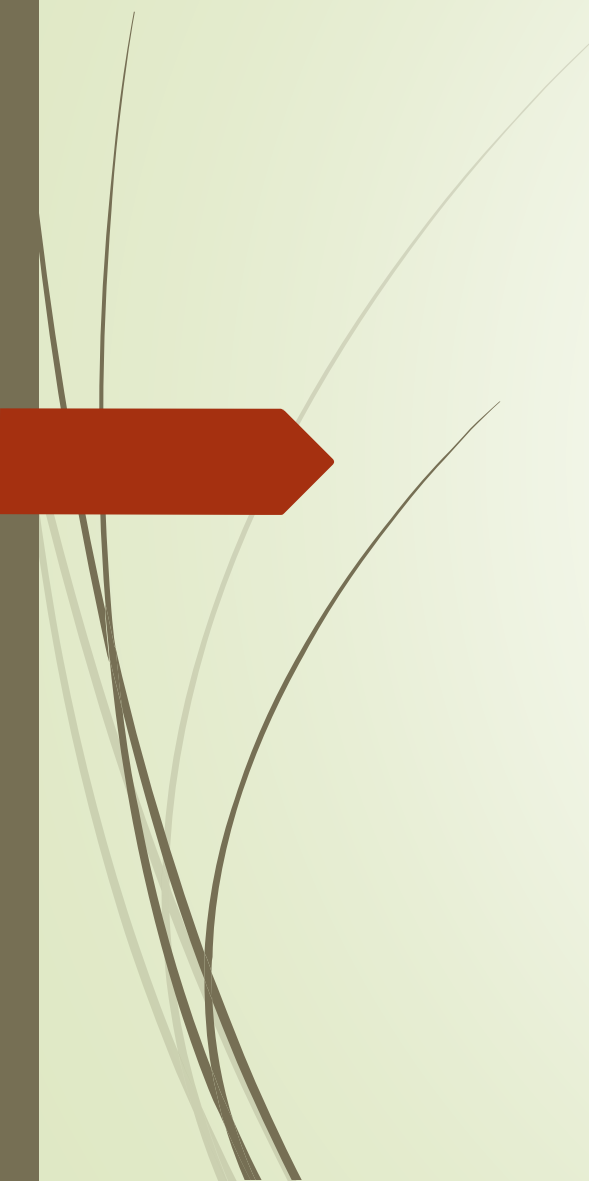
➡ 沒有反矩陣

$$x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 0$$

$$(b) \quad 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$$

$$-x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$$

(page. 52)



5.計算反矩陣方法(3)

用餘因子法



反矩陣，逆矩陣的重點摘要-3

➡ 4. 計算反矩陣的方法有三種：

➡ (1). 2x2矩陣的反矩陣算法，有特殊公式(常用)

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

➡ (2). 高斯消去法

➡ 擴展矩陣

用高斯喬丹消去法，結果

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

➡ (3). 餘因子法

➡ 公式：
$$A^{-1} = \frac{\text{伴隨矩陣}}{\det(A)} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} = \frac{\text{餘因子矩陣}^T}{\det(A)} = \frac{\text{餘因子矩陣的轉置矩陣}}{\det(A)}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

$$A^{-1} = \frac{\text{伴隨矩陣}}{\det(A)} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$$

要先認識

伴隨矩陣adj

餘因子矩陣 C_{ij}

餘因子矩陣

定義 1

(page. 103)

➡ 若 A 為任意 $n \times n$ 矩陣， C_{ij} 為 a_{ij} 的餘因子，則

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

➡ 稱為 A 的餘因子矩陣 (matrix of cofactors) ，

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = 12$$

$$C_{12} = 6$$

$$C_{13} = -16$$

$$C_{21} = 4$$

$$C_{22} = 2$$

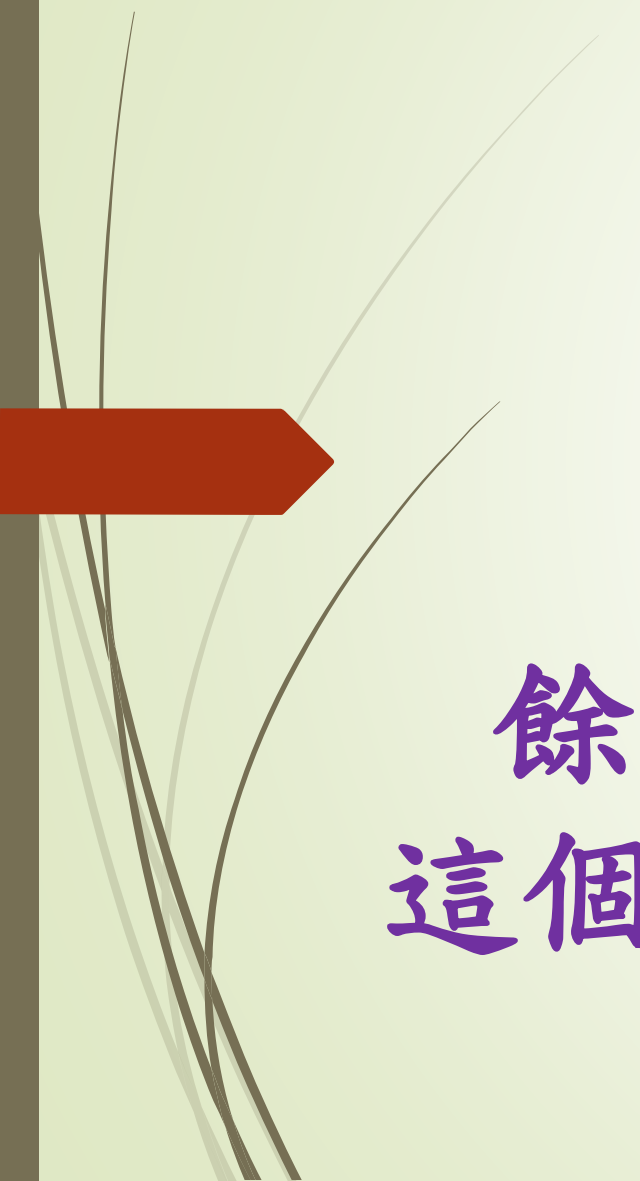
$$C_{23} = 16$$

$$C_{31} = 12$$

$$C_{32} = -10$$

$$C_{33} = 16$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$



注意：

餘因子矩陣 C_{ij} ，也需要正負號
這個與算行列式值的餘因子法相同

伴隨矩陣 (adj, adjoint matrix)

➡ 餘因子矩陣的轉置矩陣，稱為 A 的伴隨矩陣 (adjoint matrix)

➡ =記作 $\text{adj}(A)$

(page. 103)

➡ 範例：

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

➡ 1. 先算餘因子矩陣

$$C_{11} = 12$$

$$C_{12} = 6$$

$$C_{13} = -16$$

$$C_{21} = 4$$

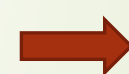
$$C_{22} = 2$$

$$C_{23} = 16$$

$$C_{31} = 12$$

$$C_{32} = -10$$

$$C_{33} = 16$$



$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

➡ 2. 再求轉置矩陣=

(方法：每一列以對角線元素翻轉)

➡ 3. 此為 $\text{adj}(A)$ 伴隨矩陣

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

計算反矩陣，會用到伴隨矩陣adj

➡ 若 A 為可逆矩陣，則

(page. 104)

➡ 反矩陣=

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

範例 7：使用伴隨矩陣求反矩陣

➡ 求A的反矩陣

(page. 105)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

範例 7：使用伴隨矩陣求反矩陣

➡ 1. 反矩陣公式=

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

(page. 105)

➡ 2. 先算 $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -4 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0 + 12 + 4 - (-12) - (-36) - 0 = 64$

➡ 3. 再算餘因子矩陣 = $\begin{bmatrix} 12 & 6 & 16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$ (注意：算餘因子一定考慮正負號)

➡ 4. 伴隨矩陣(再轉置矩陣) = $\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ 16 & 16 & 16 \end{bmatrix} =$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{64} & \frac{4}{64} & \frac{12}{64} \\ \frac{6}{64} & \frac{2}{64} & -\frac{10}{64} \\ -\frac{16}{64} & \frac{16}{64} & \frac{16}{64} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{12}{64} & \frac{4}{64} & \frac{12}{64} \\ \frac{6}{64} & \frac{2}{64} & -\frac{10}{64} \\ -\frac{16}{64} & \frac{16}{64} & \frac{16}{64} \end{bmatrix}$$

範例 7：Python程式碼

```
import numpy as np
```

```
A = np.array([  
    [3, 2, -1],  
    [1, 6, 3],  
    [2, -4, 0]  
])
```

```
A_inv = np.linalg.inv(A)
```

```
print(' 矩陣A=\n', A_inv)
```

矩陣A=

```
[[ 0.1875  0.0625  0.1875]  
 [ 0.09375 0.03125 -0.15625]  
 [-0.25    0.25    0.25   ]]
```

用餘因子法算反矩陣

➡ 用餘因子法算 A^{-1}

➡ 公式：
$$A^{-1} = \frac{\text{伴隨矩陣}}{\det(A)} = \frac{\text{餘因子矩陣}^T}{\det(A)} = \frac{\text{餘因子矩陣的轉置矩陣}}{\det(A)}$$

➡ 範例： $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ ，求 A^{-1} (page. 48)

➡ (1). $\det(A) = 4 - 3 = 1$

➡ (2). 餘因子矩陣 $= \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ (注意：餘因子矩陣的正負號 $(-1)^{i+j}$)

➡ (3). 伴隨矩陣 = 餘因子矩陣^T $= \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

➡ (3). $A^{-1} = \frac{\text{伴隨矩陣}}{\det(A)} = \frac{\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}{1}$



範例 7: 使用餘因子法算 A^{-1}

➡ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, 求 A^{-1} : (page. 50)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

➡ 公式: $A^{-1} = \frac{\text{伴隨矩陣}}{\det(A)} = \frac{\text{餘因子矩陣}^T}{\det(A)}$

➡ (1). $\det(A) = 40 + 6 + 0 - 15 - 0 - 32 = -1$

➡ (2). 餘因子矩陣 = $\begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ (注意: 餘因子矩陣的正負號 $(-1)^{i+j}$)

➡ (3). $A^{-1} = \frac{\text{餘因子矩陣}^T}{\det(A)} = \frac{\begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}}{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

範例 7: Python 程式碼

```
import numpy as np
A = np.array([
    [1, 2, 3],
    [2, 5, 3],
    [1, 0, 8]
])
A_inv = np.linalg.inv(A)
print(' 反矩陣=\n', A_inv)
```

反矩陣=

```
[[-40.   16.    9.]
 [ 13.   -5.   -3.]
 [  5.   -2.   -1.]]
```



結論：算反矩陣重點摘要

➡ 4. 計算反矩陣的方法有三種：

➡ (1). 2x2矩陣的反矩陣算法，有特殊公式(常用)

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

➡ (2). 高斯消去法

➡ 擴展矩陣

用高斯喬丹消去法，結果

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

➡ (3). 餘因子法

➡ 公式：
$$A^{-1} = \frac{\text{伴隨矩陣}}{\det(A)} = \frac{\text{餘因子矩陣}^T}{\det(A)} = \frac{\text{餘因子矩陣的轉置矩陣}}{\det(A)}$$



反矩陣，逆矩陣的重點摘要-4

➡ 5. 反矩陣的用途有二種：

➡ (1). 解聯立方程式

➡ 聯立方程式： $A\vec{x}=\vec{v}$

➡ 解聯立方程式： $\vec{x}=A^{-1}\vec{v}$

➡ (2). 座標轉換（逆轉換矩陣）

➡ $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ = 原本座標網格被轉換後的轉換矩陣

➡ $A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ = 逆轉回到原位置的轉換矩陣

6. 反矩陣的用途1：

解聯立方程式

範例 1: 使用 A^{-1} 求線性方程式的解

➡ 聯立方程式： $A\vec{x}=\vec{v}$ (page. 53)

➡ 解聯立方程式： $\vec{x}=A^{-1}\vec{v}$

➡
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 \quad \quad + 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

➡ (1). 先判別是否有解 $\Rightarrow \det(A) = 40 + 6 + 0 - 15 - 0 - 32 = -1$

➡ (2). 餘因子矩陣 $= \begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ (算完後要加上正負號)

➡ (3). $A^{-1} = \frac{\text{餘因子矩陣}^T}{\det(A)} = -1 \begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

範例 1: 使用 A^{-1} 求線性方程式的解

➡ (3). $A^{-1} = \frac{\text{餘因子矩陣}^T}{\det(A)} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

➡ 解聯立方程式： $\vec{x} = A^{-1}\vec{v}$

➡ $\vec{x} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

➡ 結果： $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 + 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

範例 1: Python 程式碼

```
import numpy as np
A=np.array([
    [1, 2, 3],
    [2, 5, 3],
    [1, 0, 8]
])
A_inv = np.linalg.inv(A)
Y = np.array([
    [5], [3], [3]
])
X = A_inv @ Y
print(X)
X = np.linalg.solve(A, Y)
print(X)
```

(1).反矩陣`inv()`，求解 $X=$

`[[ -125.]`

`[ 41.]`

`[ 16.]]`

(2).`solve()`，求解 $X=$

`[[ -125.]`

`[ 41.]`

`[ 16.]]`

範例 2-1: 使用 A^{-1} 求線性方程式的解

➡ 聯立方程式： $A\vec{x}=\vec{v}$ (page. 54)

➡ 解聯立方程式： $\vec{x}=A^{-1}\vec{v}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

➡ (1). 與範例1的A矩陣相同

➡ (2). 所以 $A^{-1} = \frac{\text{餘因子矩陣}^T}{\det(A)} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

➡ 結果： $x_1=1, x_2=0, x_3=1$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ & 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 5 \\ & \quad \quad x_1 + 8x_3 = 9 \end{aligned}$$

範例 2-1: Python 程式碼

```
import numpy as np
A=np.array([
    [1, 2, 3],
    [2, 5, 3],
    [1, 0, 8]
])
A_inv = np.linalg.inv(A)
Y = np.array([
    [4], [5], [9]
])
X = A_inv @ Y
print(X)
X = np.linalg.solve(A, Y)
print(X)
```

(1).反矩陣`inv()`，求解 $X=$

```
[[1.]
 [0.]
 [1.]]
```

(2).`solve()`，求解 $X=$

```
[[ 1.]
 [-0.]
 [ 1.]]
```

範例 2-2: 使用 A^{-1} 求線性方程式的解

➡ 聯立方程式： $A\vec{x}=\vec{v}$ (page. 54)

➡ 解聯立方程式： $\vec{x}=A^{-1}\vec{v}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

➡ (1). 與範例1的A矩陣相同

➡ (2). 所以 $A^{-1} = \frac{\text{餘因子矩陣}^T}{\det(A)} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

➡ 結果： $x_1=2, x_2=1, x_3=-1$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_1 \quad \quad \quad + 8x_3 &= -6 \end{aligned}$$

範例 2-2: Python 程式碼

```
import numpy as np
```

```
A=np.array([  
    [1, 2, 3],  
    [2, 5, 3],  
    [1, 0, 8]  
])
```

```
A_inv = np.linalg.inv(A)
```

```
Y = np.array([  
    [1], [6], [-6]  
])
```

```
X = A_inv @ Y
```

```
print(X)
```

```
X = np.linalg.solve(A, Y)
```

```
print(X)
```

(1). 反矩陣`inv()`，求解 $X=$

```
[[ 2.]
```

```
[ 1.]
```

```
[-1.]]
```

(2). `solve()`，求解 $X=$

```
[[ 2.]
```

```
[ 1.]
```

```
[-1.]]
```



7. 如何判別系統 $Ax=b$ 的 解是否具有**一致性** **consistent**

方程式的解是否具有一致性??

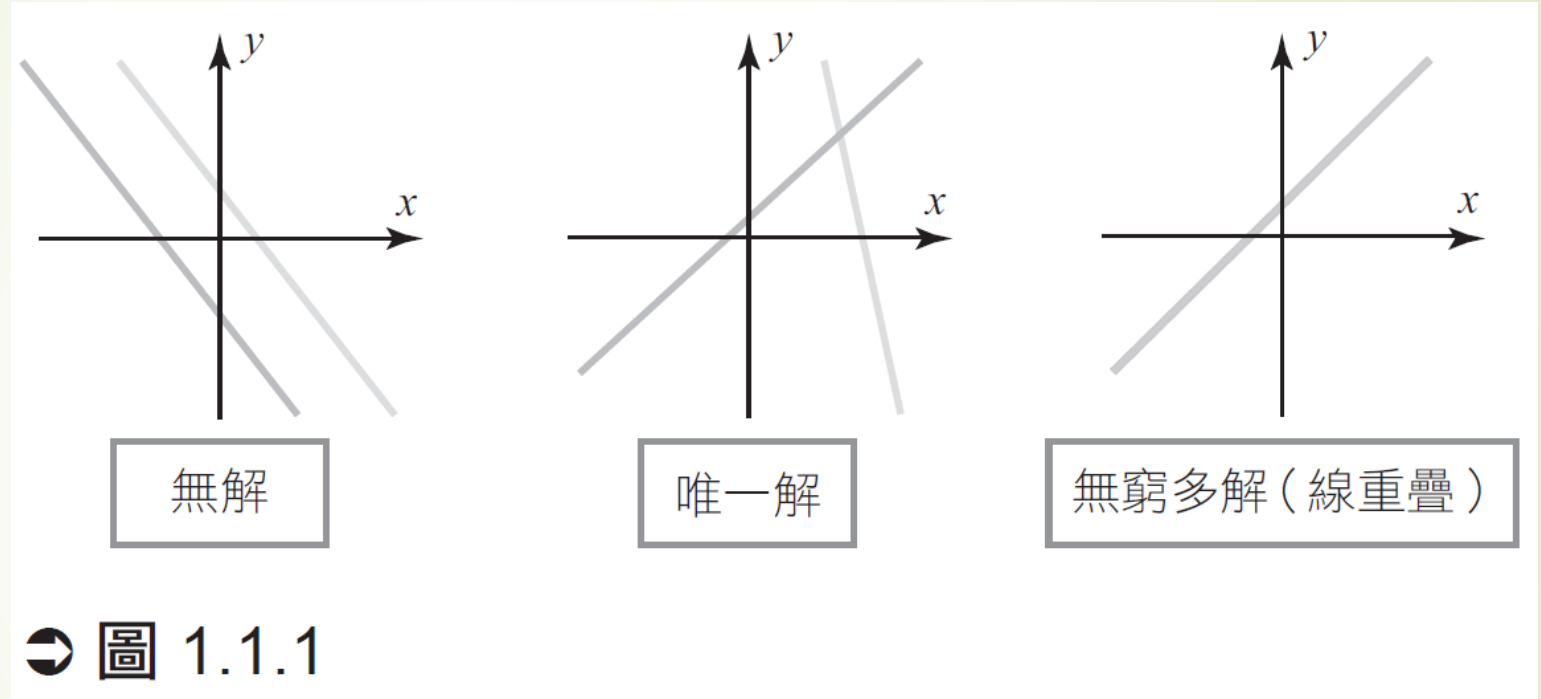
page. 4

二元線性系統

直線

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$



若至少有一個解(包括無限多解)，此線性系統是一致性(consistent)

若無解，我們稱此線性系統是非一致性的 (inconsistent)

7. $Ax=b$ 的解有一致性

consistent

表示，判別是否符合
有唯一解，或有無限多組解

$Ax=b$ 的解有一致性consistent

有唯一解，或有無限多組解

無法單純用 $\det(A)$ 來判別

必須用複合方法（兩個方法）



判別是否有唯一解的方法有兩種

➡ (1). 方法1：用增廣矩陣，將之化簡：簡化列梯形，然後評估每個變數是否存在？

➡ 缺點：速度慢，高斯消去法，計算到最後才知道

➡ 優點：可以判別是無解，還是無限多組解

➡ (2). 方法2：用原始矩陣A的行列式 $\det(A)$ 判別

➡ 解聯立方程式之前要先判斷是否有唯一解 $\Rightarrow \det(A) \neq 0$

➡ 若 $\det(A) \neq 0$ ，則系統有唯一解

➡ 若 $\det(A) = 0$ ，則系統可能無解，可能無限多組解

➡ 若 $\det(A) = 0$ ，且 $\det(A|B) = 0$ ，則無限多組解

➡ 若 $\det(A) = 0$ ，且 $\det(A|B) \neq 0$ ，則無解

(a)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

無解

(b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

無限多組解

範例 3：方程式的解是否具有有一致性（有解）：使用消去法

試問 b_1, b_2, b_3 必須滿足何種條件，才能使以下方程式系統具有一致性（有解）？ (page.56)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= b_1 \\ x_1 + x_3 &= b_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

➡ (1). 先判別是否有解 $\Rightarrow \det(A) = 0 + 2 + 2 - 0 - 1 - 3 = 0$ ，可能無解

➡ (2). 擴展矩陣 = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & 3 & b_3 \end{bmatrix}$

➡ (3). 消去法

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & -b_1 + b_2 \\ 0 & -1 & -1 & -2b_1 + b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & -b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 + b_2 - b_3 \end{bmatrix}$$

➡ 若有解（無限多）則必須 $b_1 + b_2 - b_3 = 0$, $b_3 = b_1 + b_2$

範例 4：方程式的解是否具有一致性（有解）：使用消去法

試問 b_1, b_2, b_3 必須滿足何種條件，才能使以下方程式系統具有一致性（有解）？ (page. 57)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b_1$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = b_2$$

$$x_1 + 8x_3 = b_3$$

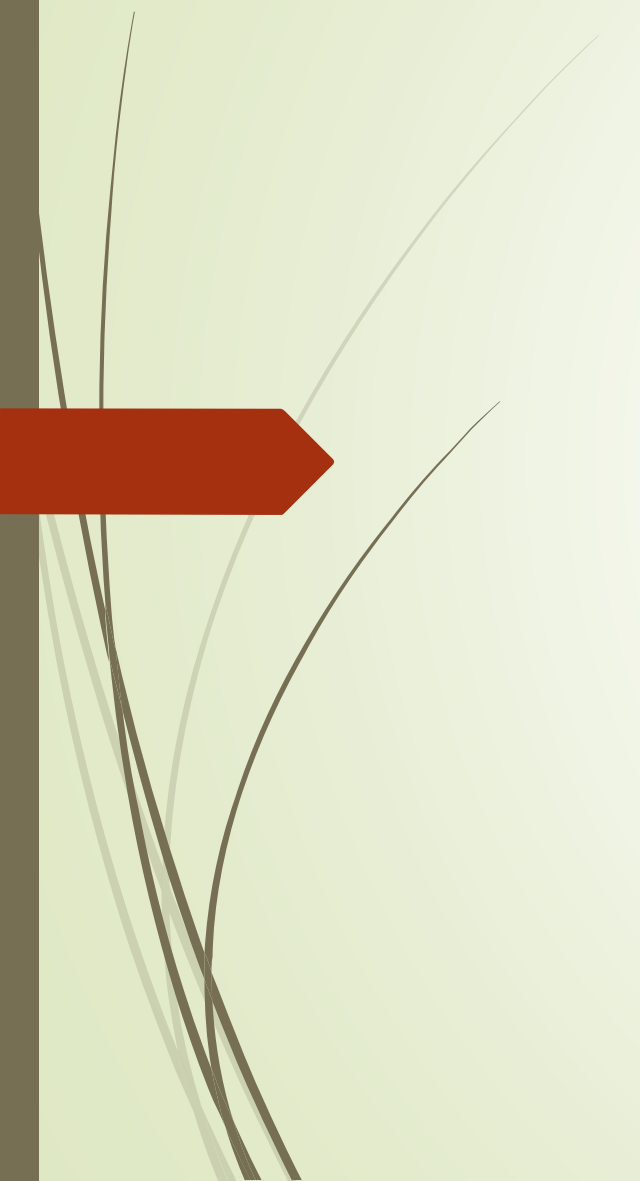
➡ (1). 先判別是否有解 $\Rightarrow \det(A) = 40 + 6 + 0 - 15 - 0 - 32 = -1$ ，有解

➡ (2). 擴展矩陣 =
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{bmatrix}$$

➡ (3). 消去法

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -3 & -2b_1 + b_2 \\ 0 & -2 & 5 & -b_1 + b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -3 & -2b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & -1 & -5b_1 + 2b_2 + b_3 \end{bmatrix}$$

➡ 有唯一解， $x_3 = 5b_1 - 2b_2 - b_3 \dots$ (b_1, b_2, b_3 任意數，不需限制)



8. 對角矩陣 三角矩陣 對稱矩陣

對角矩陣

➡ 對角矩陣 (diagonal matrix) (page. 57)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

➡ 通式：

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

對角矩陣的反矩陣，k次方

➡ 對角矩陣的反矩陣

(page. 58)

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$



$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_n \end{bmatrix}$$



$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$



$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

範例 1：對角矩陣的次冪與反矩陣

(page. 58)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

➡ 對角矩陣的反矩陣

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

➡ 對角矩陣的5次方

$$A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -243 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix},$$

➡ 對角矩陣的-5次方

$$A^{-5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{243} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{32} \end{bmatrix}$$

若乘積中有對角矩陣，計算變簡單

➡ 對角矩陣在前

(page. 58)

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & d_1 a_{13} & d_1 a_{14} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} & d_2 a_{23} & d_2 a_{24} \\ d_3 a_{31} & d_3 a_{32} & d_3 a_{33} & d_3 a_{34} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 a_{11} & d_2 a_{12} & d_3 a_{13} \\ d_1 a_{21} & d_2 a_{22} & d_3 a_{23} \\ d_1 a_{31} & d_2 a_{32} & d_3 a_{33} \\ d_1 a_{41} & d_2 a_{42} & d_3 a_{43} \end{bmatrix}$$

上三角矩陣upper triangular matrix

上三角矩陣

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

4 × 4 上三角矩陣的一般形式

下三角矩陣 (page. 59)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

4 × 4 下三角矩陣的一般形式

三角矩陣的定理

- ➡ (a) 下三角矩陣的轉置為上三角矩陣。(page. 60)
- ➡ (b) 下三角矩陣的乘積為下三角矩陣。
- ➡ (c) 三角矩陣為可逆矩陣，若且唯若其對角線元素均不為零。
- ➡ (d) 可逆的下三角矩陣，其反矩陣為下三角矩陣。

範例 3：上三角矩陣之計算

➡ 上三角矩陣

(page. 60)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➡ 反矩陣也是上三角矩陣

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix},$$

➡ AB ， BA 也都是上三角矩陣

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

對稱矩陣symmetric matrix

➡ 條件： 若 $A = A^T$, (page. 60)

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

對稱矩陣的 AA^T 乘積 $\Rightarrow$ 對稱矩陣

- ➡ 對稱矩陣的 AA^T 乘積 $\Rightarrow$ 對稱矩陣 (page. 61)
- ➡ 對稱矩陣的 A^TA 乘積 $\Rightarrow$ 對稱矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

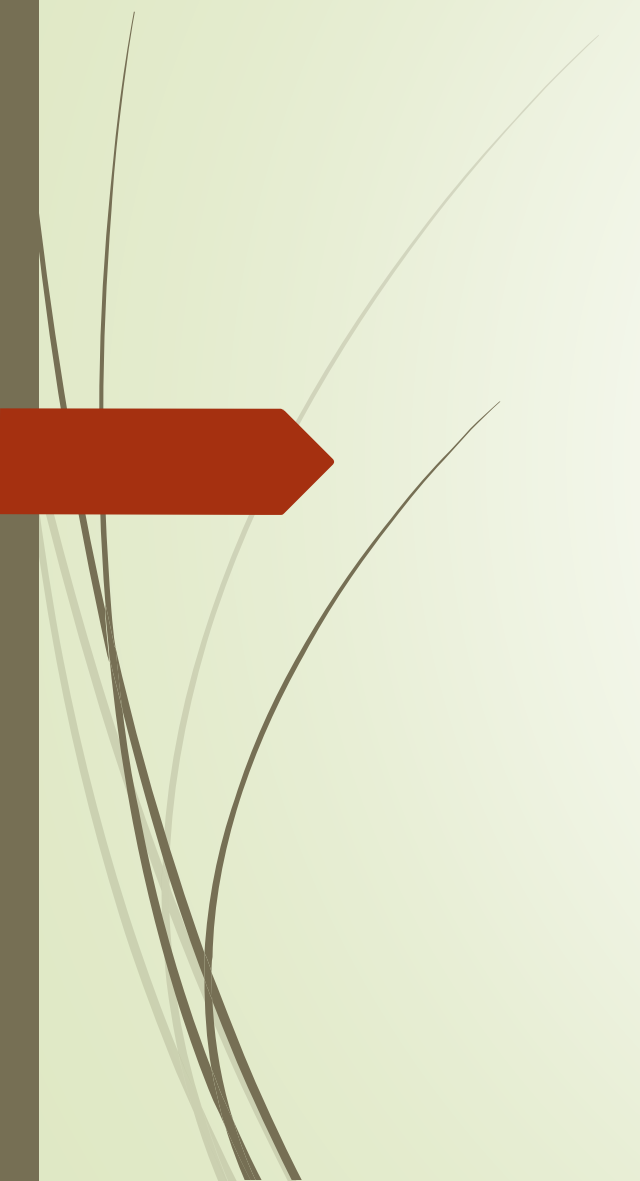


$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -11 \\ -2 & 4 & -8 \\ -11 & -8 & 41 \end{bmatrix}$$



$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -17 \\ -17 & 34 \end{bmatrix}$$

9. LU分解



LU-decomposition

LU-factorization

LU分解

- 任意矩陣A，都可以被分解成LU矩陣乘積

$$A = LU$$

- L為下三角矩陣

- U為上三角矩陣

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A \qquad \qquad \qquad L \qquad \qquad \qquad U$

如何把把A分解成LU

- ➡ 方法1：課本page. 66
 - ➡ 非常複雜
- ➡ 方法2：使用python指令
 - ➡ `L, U, _ = A.LUdecomposition()`

範例 Python 程式碼

#範例5-14：sympy把A做LU分解

```
from sympy import *  
x1, x2 = symbols(' x1 x2' )  
A = Matrix([  
    [2, 6, 2],  
    [-3, -8, 0],  
    [4, 9, 2]  
])  
L, U, _ = A.LUdecomposition()  
print(L)  
print(U)
```

如何把把A分解成LU: 方法1

方法1：矩阵LU (笔算方法)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} & l_{21}u_{14} + u_{24} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} & l_{31}u_{14} + l_{32}u_{24} + u_{34} \\ l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12} + l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23} + l_{43}u_{33} & l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34} + u_{44} \end{bmatrix}$$



如矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 7 \\ 6 & 18 & 22 \end{bmatrix}$, 进行LU分解, 则

方法1:

$$A=LU=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{则 } u_{11} = 2, u_{12} = 2, u_{13} = 2 \quad (1)$$

$$\text{由 } l_{21}u_{11} = 4, l_{31}u_{11} = 6 \text{ 得 } l_{21} = 2, l_{31} = 3 \quad (2)$$

$$\text{由 } l_{21}u_{12} + u_{22} = 7, l_{21}u_{13} + u_{23} = 7 \text{ 得 } u_{22} = 3, u_{23} = 3 \quad (3)$$

$$\text{由 } l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 18, \text{ 得 } l_{32} = 4 \quad (4)$$

$$\text{由 } l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = 22, \text{ 得 } u_{33} = 4 \quad (4)$$

$$A=LU=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

如何把把A分解成LU: 方法2

➡ 方法2：求矩陣 A 之 LU 分解

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

➡ 課本的方法 (page. 67)

方法2：

	化為列梯形	列運算	對應之基本矩陣	基本矩陣之反矩陣
步驟 1	$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$	第 1 列	$E_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
步驟 2	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$	$(3 \times \text{第 1 列}) + \text{第 2 列}$	$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
步驟 3	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$	$(-4 \times \text{第 1 列}) + \text{第 3 列}$	$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$			

方法2：

步驟 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$(-4 \times \text{第 1 列}) + \text{第 3 列}$ $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

步驟 4

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$(3 \times \text{第 2 列}) + \text{第 3 列}$ $E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $E_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

步驟 5

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

第 3 列

$E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$ $E_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

如何把A分解成LU：快速法

求矩陣 A 之 LU 分解

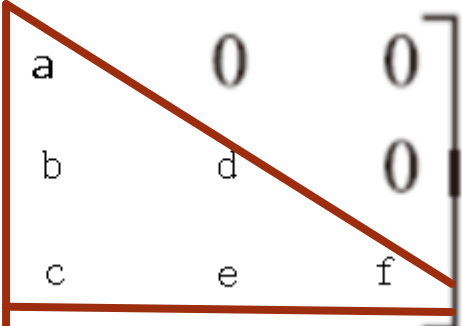
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$


方法3：

步驟1：使用高斯消去法，先算出上三角矩陣 U

步驟2：

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$


步驟3：解出 a, b, c, d, e, f

LU分解的用途

➡ 解聯立方程式 $Ax=b$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$A \qquad \qquad \mathbf{x} = \mathbf{b}$

➡ 若是A固定，但變換b的數值

➡ (1). 傳統解法（高斯喬丹消去法）

➡ 缺點：要不斷重新計算擴展矩陣，每次都要重新計算

LU分解的用途

➡ 用途1：LU一樣可以解聯立方程式 $Ax=b$

➡ 好處：適用於一種情況

➡ 若是A固定，但不斷變換b的數值

➡ 要計算改變b後的x，就可以用LU分解法

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$A \qquad \qquad \qquad \mathbf{x} = \mathbf{b}$

➡ (2). LU分解法

➡ 優點：A(LU)只要計算第一次即可，若b被改變了，此時不需要在重算擴展矩陣，

➡ 馬上就可以算出x新的解答

LU分解的步驟

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$A \qquad \qquad \mathbf{x} = \mathbf{b}$

- ➡ 步驟1： $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ ，先分解 A 為 LU ，得

$$LU\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (2)$$

- ➡ 步驟2、定義一個 $n \times 1$ 矩陣 $\mathbf{y}$ 為

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (3)$$

- ➡ 步驟3、將第(3)式代入(2)式，得 $L\mathbf{y}=\mathbf{b}$ ，並解出 $\mathbf{y}$ 。

- ➡ 步驟4、將 $\mathbf{y}$ 代回第(3)式，並解出 $\mathbf{x}$ 。

範例1：用LU分解，算x

➡ 步驟1： $Ax=b$ ，先分解 A 為LU，得 (page. 64)

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A \qquad \mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \qquad \qquad A \qquad = \qquad L \qquad \qquad U$

➡ 聯立方程式系統：

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$L \qquad \qquad U \qquad \mathbf{x} = \mathbf{b}$

範例1：用LU分解，算x (page. 64)

- 步驟2、定義一個 $n \times 1$ 矩陣 y 為 $Ux = y$ (3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$U \quad \quad x = y$

- 步驟3、將第(3)式代入(2)式，得 $Ly=b$ ，並解出 y

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$L \quad \quad y = b$

- 不需要複雜計算

- 僅需以類似回代法（由上往下）

$y_1 = 1, y_2 = 5, y_3 = 2$

範例1：用LU分解，算x (page. 64)

➡ 步驟4：已知y，即可計算x

$$(y_1 = 1, y_2 = 5, y_3 = 2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$U \quad \quad \mathbf{x} = \mathbf{y}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

➡ 不需要複雜計算

➡ 僅需以類似回代法（由下往上）



$$\mathbf{x}_1 = 2, \mathbf{x}_2 = -1, \mathbf{x}_3 = 2$$