線性代數第8章 簡易版

線性獨立：linear independent

線性相依：linear dependent

陳擎文老師

1. 線性獨立，線性相依

常見的題型

判別線性獨立, 或線性相依(1)：向量

- 試問，以下向量在 R3 中為線性獨立或線性相依？(page. 165)
- v1=(1, -2, 3), v2=(5, 6, -1), v3=(3, 2, 1)

判別線性獨立，或線性相依(2)：向量

- 試問，線性向量方程式： $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=0$，是否有非顯解？

  v1=(1,-2,3)，v2=(5,6,-1)，v3=(3,2,1)
- （1）顯解trival solution：k1=0，k2=0,….
- （2）非顯解：除了k1=0，k2=0解外，還有其它解
- （3）無其它解了 = 線性獨立（linear independent）
- （4）還有其它解 = 線性相依（linear dependent）

判別線性獨立, 或線性相依(3)：多項式

- **試問，以下多項式方程式組，在$\boldsymbol{p}2$中，彼此是"線性獨立, 或線性相依"？**

$$\mathbf{p}_1 = 1 - x, \quad \mathbf{p}_2 = 5 + 3x - 2x^2, \quad \mathbf{p}_3 = 1 + 3x - x^2$$

判別線性獨立, 或線性相依(4)：函數

- 證明 $f_1=1$, $f_2=e^x$, $f_3=e^{2x}$

在 $C(-\infty, \infty)$區間中為線性獨立

（這邊不是線性多項式，而是非線性函數）

2. 線性獨立，線性相依的判別法

2. 如何才能快速判別是否為線性獨立，線性相依？

重要

先說結論公式：判別是否為線性獨立，線性相依

若存在一組(k1, k2, k3)使得 $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0,0,0)$，就是線性相依

$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$

- （1）線性獨立
  - 如何判別是否為線性獨立？
  - 方法1：det(A) $\neq 0$
  - 方法2：簡化列梯形，必須只有唯一0解

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}$$

- （2）線性相依
  - 如何判別是否為線性相依？
  - 方法1：det(A) $= 0$
  - 方法2：簡化列梯形，必須有<u>無限多解</u>

範例：快速判別是否為線性獨立，線性相依

- 範例7：$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$
- 請問：如何才能快速判別是否為線性獨立，線性相依
- 方法：還是要建立線性方程式系統，求解
- 例如：線性向量方程式：$k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0, 0, 0)$
  - 物理意義：三個向量的合成若為0，就是線性相關(相依)
  - 物理意義：三個向量的合成若不為0，就是線性獨立
- $1k_1+5k_1+3k_1=0$
- $-2k_2+6k_2+2k_2=0$
- $3k_3-1k_2+k_3=0$
- $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \tfrac{1}{2}\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

快速判別：若det(A) ≠0 則線性獨立

3. 證明線性獨立
判別公式的由來

3. 線性獨立，線性相依的定義(1)：最簡單說法

線性獨立線性相依定義(1)：最簡單說法

- 含兩個以上向量的集合 S 為關係 （page. 168）
- (a)**線性相依**：若且唯若S中至少有一個向量可以被寫成其他向量的線性組合。
- (b)**線性獨立**：若且唯若S中沒有向量可以被寫成其他向量的線性組合。

線性獨立線性相依定義(1)：最簡單說法

- 範例7： $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$
- 請問：v3 ＝ f(v1, v2)嗎？

（v3能夠用v1，v2組合而成嗎？）

- 結果： $\frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ ⇒ $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2$
- 結論：v1, v2, v3彼此之間相關聯，所以是**線性相依**

(page. 169)

線性獨立線性相依定義(1)：最簡單說法

- 範例6：R3基底向量i, j, k，

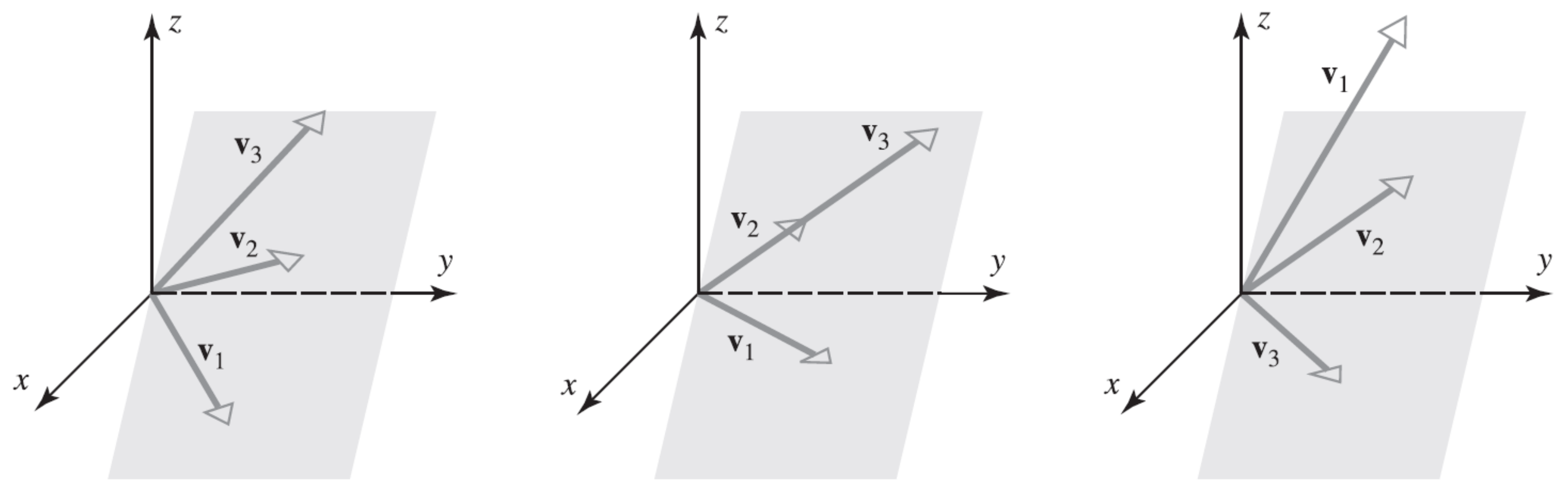
i=(1, 0, 0), j=(0, 1, 0), k=(0, 0, 1)

- 請問：k能夠用i，j組合而成嗎？
- 結果：(0, 0, 1)k無法用i=(1, 0, 0), j=(0, 1, 0)組合而成
- 結論：i, j, k彼此之間沒有關聯，所以是<u>線性獨立</u>

(page. 169)

平面的線性獨立的幾何意義

- (page. 160)
- 線性相依：$v_1 v_2\ v_3$ 彼此在同平面(v3可以用v1, v2組合)
- 線性獨立：$v_1 v_2\ v_3$ 彼此不在同平面

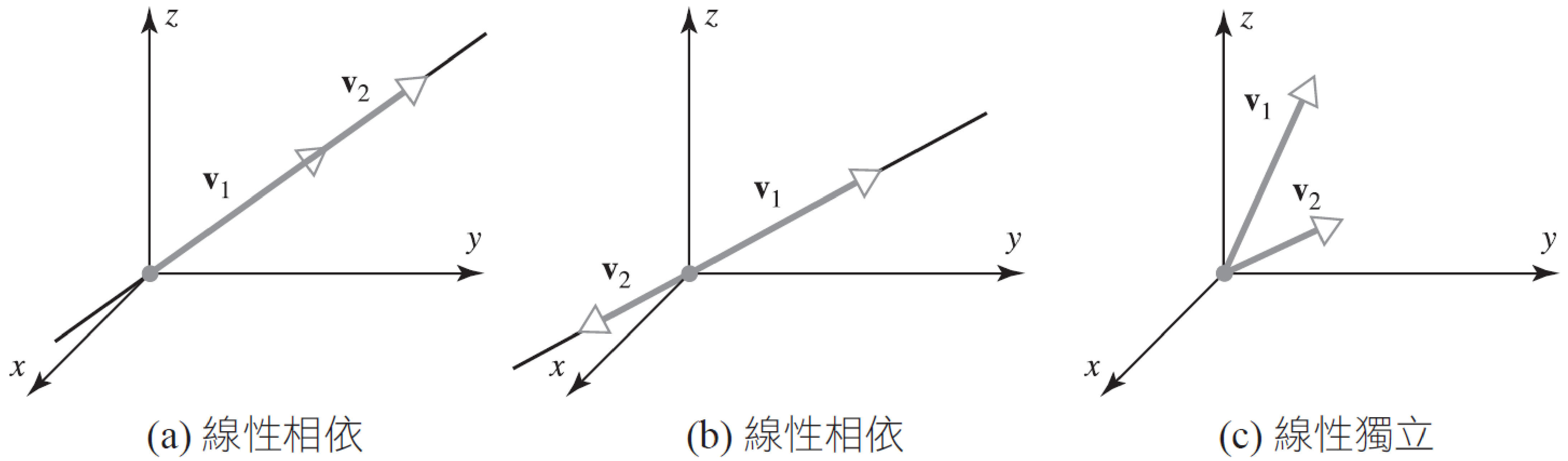


(a) 線性相依　(b) 線性相依　(c) 線性獨立

➲ 圖 4.3.4

直線的線性獨立的幾何意義(page. 160)

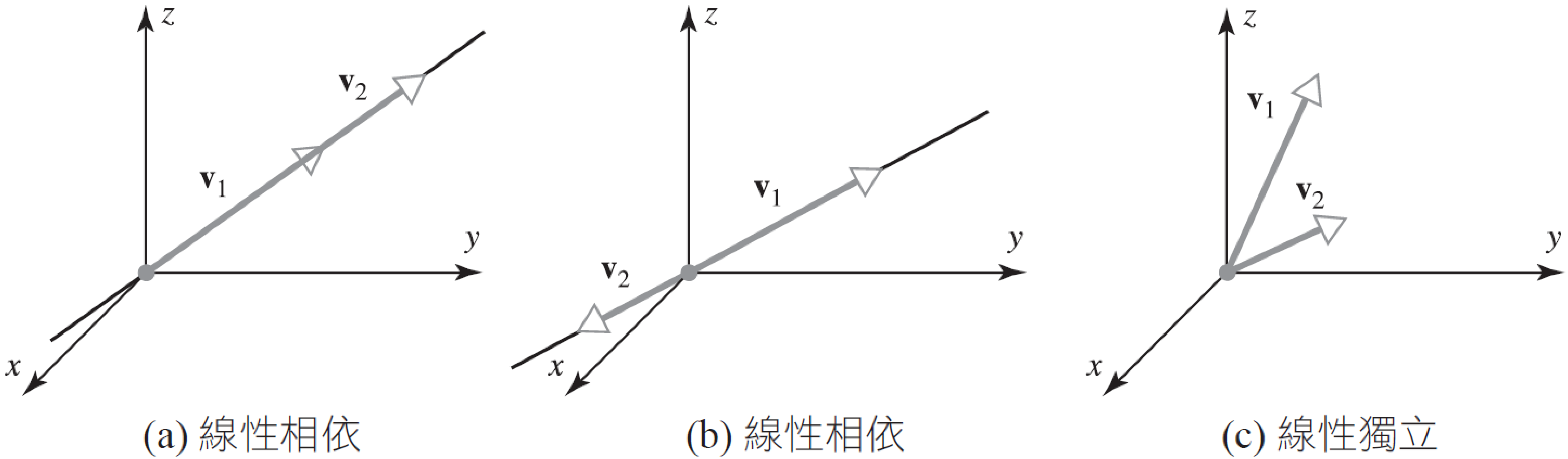
- 線性相依：v_1和v_2 彼此為純量倍數關係（v2可以用v1組合表示）
- 線性獨立：v_1和v_2彼此不是純量倍數關係



➲ 圖 4.3.3

直線的線性獨立的幾何意義

- 線性相依：v_1和v_2 彼此為純量倍數關係　（page. 160）
- 線性獨立：v_1和v_2彼此不是純量倍數關係



➲ 圖 4.3.3

如何才能快速判別是否為線性獨立，線性相依

- 範例7： $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$
- 請問：如何才能快速判別是否為線性獨立，線性相依
- 方法：還是要建立線性方程式系統，求解
- 例如：線性向量方程式： $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0, 0, 0)$
  - 物理意義：三個向量的合成若為0，就是線性相關(相依)
  - 物理意義：三個向量的合成若不為0，就是線性獨立
- $1k_1+5k_1+3k_1=0$
- $-2k_2+6k_2+2k_2=0$
- $3k_3-1k_2+k_3=0$
- $$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \tfrac{1}{2}\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

(page. 169)

如何才能快速判別是否為線性獨立，線性相依

- 結論：

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$$

- 若存在一組(k1, k2, k3)使得 $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0,0,0)$，就是線性相依
  - 三個向量的合成若為(0,0,0)，就是線性相關(相依)

$$\frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

  - 三個向量的合成若不為(0,0,0) ，就是線性獨立
- $1k_1+5k_1\ +3k_1=0$
- $-2k_2+6k_2\ +2k_2=0$
- $3k_3-1k_2\ +k_3=0$
-

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

-

(page. 169)

若k有其它解，線性相依

若k只有0解，線性獨立

除了0解外，沒有其它解了

如何才能快速判別是否為線性獨立，線性相依

- 結論：

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$$

- 若存在一組(k1, k2, k3)使得 $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0, 0, 0)$，就是線性相依
- （1）線性相依
  - 三個向量的合成若為(0, 0, 0)，就是線性相關(相依)
  - 若k有其它解（無限多組解）=> 線性相依
- （2）線性獨立
  - 三個向量的合成若不為(0, 0, 0)，就是線性獨立
  - 若k只有0解 => 線性獨立（除了0解外，沒有其它解了）

線性獨立

- 向量方程式： $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3+..+k_rv_r=0$ （page. 165）
- (1). 線性獨立：
  - 若唯一解是($k_1=k_2=\cdots k_r=0$)，則$v_1v_2v_3..v_r$ 是線性獨立
  - **<u>若不存在k向量合成0（k無解），則線性獨立</u>**
- (2). 線性相依
  - 若解除了($k_1=k_2=\cdots k_r=0$)外還有其它解，則$v_1v_2v_3..v_r$ 是線性相依
  - **<u>若存在k向量合成0（k有解，或無限多解），則線性相依</u>**

4. 向量的判別

判別向量$V_1V_2V_3$是線性獨立或線性相依

範例2：判別$v_1v_2v_3$是線性獨立或相依

- 試問，以下向量在 R3 中為線性獨立或線性相依？(page. 165)
- v1=(1, -2, 3)， v2=(5, 6, -1)， v3=(3, 2, 1)
- 線性向量方程式： $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=0$
  - 物理意義：三個向量的合成若為0，就是線性相關(相依)
  - 物理意義：三個向量的合成若不為0，就是線性獨立
- $1k_1+5k_1+3k_1=0$
- $-2k_2+6k_2+2k_2=0$
- $3k_3-1k_2+k_3=0$
- $$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

範例2：判別$v_1v_2v_3$是線性獨立或相依

- $$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(page. 165)

  - 若存在k向量合成0（k有解，或無限多解），則線性相依
  - 若不存在k向量合成0（k無解），則線性獨立
  - det(A)=6+30+6-54+2+10=0，無解，或無限多組解
  - Det(A|B)=det($\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$)=0，所以無限多組解
- $$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 16 & 8 & 0 \\ 0 & -16 & -8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
- 除了0, 0, 0外，無限多組解（k2=-k3/2, k1=-k3/2）
- 所以，$v_1v_2v_3$是線性相依

```python
from sympy import *
A = Matrix(    [
            [1, 5 ,3],
            [-2, 6 ,2],
            [3, -1 ,1]
    ])
A_reduced_form, inds  = A.rref()
print('簡化後的梯形Am=', A_reduced_form)
n = A.shape[1]
n_independent = len(inds)
if n == n_independent:
    print('三個向量彼此線性獨立')
else:
    print('三個向量彼此線性相依')
print('彼此線性獨立的行數m=', inds)
c1 = inds[0]
```

```
簡化後的梯形Am= Matrix([[1, 0, 1/2], [0, 1, 1/2], [0, 0, 0]])
三個向量彼此線性相依
彼此線性獨立的行數m= (0, 1)
印出線性獨立的向量= Matrix([[1], [-2], [3]])
印出線性獨立的向量= Matrix([[5], [6], [-1]])
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Python程式碼

範例3：判別$v_1v_2v_3$是線性獨立或相依

$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 2, -1), \ \mathbf{v}_2 = (4, 9, 9, -4), \ \mathbf{v}_3 = (5, 8, 9, -5)$

- 試問，以下向量在 R4 中為線性獨立或線性相依？(page. 166)
- v1=(1, 2, 2, -1), v2=(4, 9, 9, -4), v3=(5, 8, 9, -5)
- 線性向量方程式： $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=0$
  - 物理意義：三個向量的合成若為0，就是線性相關(相依)
  - 物理意義：三個向量的合成若不為0，就是線性獨立

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad k_1(1, 2, 2, -1) + k_2(4, 9, 9, -4) + k_3(5, 8, 9, -5) = (0, 0, 0, 0)$$

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

$$k_1(1, 2, 2, -1) + k_2(4, 9, 9, -4) + k_3(5, 8, 9, -5) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} k_1 + 4k_2 + 5k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 8k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 9k_3 &= 0 \\ -k_1 - 4k_2 - 5k_3 &= 0 \end{aligned}$$

範例3：判別$v_1v_2v_3$是線性獨立或相依

$$\begin{aligned} k_1 + 4k_2 + 5k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 8k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 9k_3 &= 0 \\ \cancel{-k_1 - 4k_2 - 5k_3} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 2 & 9 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ (page. 166)

- 若存在k向量合成0（k有解，或無限多解），則線性相依
- 若不存在k向量合成0（k無解），則線性獨立

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 9 & 8 & 0 \\ 2 & 9 & 9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

- k1=k2=k3=0，除了0之外無解
- 所以，是線性獨立

```
簡化後的梯形Am= Matrix([[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1], [0, 0, 0]])
三個向量彼此線性獨立
彼此線性獨立的行數m= (0, 1, 2)
印出線性獨立的向量= Matrix([[1], [2], [-2], [-1]])
印出線性獨立的向量= Matrix([[4], [9], [9], [-4]])
印出線性獨立的向量= Matrix([[8], [8], [9], [-5]])
```

```
from sympy import *
A = Matrix(    [
        [1,  4 ,8],
        [2,  9 ,8],
        [-2,  9 ,9],
        [-1,  -4 ,-5] ])
A_reduced_form,  inds  = A.rref()
print('簡化後的梯形Am=', A_reduced_form)
n = A.shape[1]
n_independent = len(inds)
if n == n_independent:
    print('三個向量彼此線性獨立')
else:
    print('三個向量彼此線性相依')
print('彼此線性獨立的行數m=', inds)
c1 = inds[0]
```

$$
\begin{aligned}
k + 4k_2 + 5k_3 &= 0 \\
2k + 9k_2 + 8k_3 &= 0 \\
2k + 9k_2 + 9k_3 &= 0 \\
-k - 4k_2 - 5k_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Python程式碼

範例：證明是線性相依

- (1)證明 $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 2, 2, 4)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, -1, 0)$ 在R4中為線性相依的集合。
- (2)將每一向量展開為其他兩向量的線性組合。

範例：證明是線性相依

- (1)證明 $\mathbf{v}_1 = (1,2,3,4)$, $\mathbf{v}_2 = (2,2,2,4)$, $\mathbf{v}_3 = (1,0,-1,0)$ 在R4中為線性相依的集合。
- 方法：因為不是nxn矩陣，無法用行列式判別，只能用簡化列梯形判別

$$a(1,2,3,4) + b(2,2,2,4) + c(1,0,-1,0) = (0,0,0,0)$$

$$\begin{aligned} a + 2b + c &= 0 \\ 2a + 2b \quad &= 0 \\ 3a + 2b - c &= 0 \\ 4a + 4b \quad &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

無限多組解，線性相依

範例：證明是線性相依

$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3, 4)$
$\mathbf{v}_2 = (2, 2, 2, 4)$
$\mathbf{v}_3 = (1, 0, -1, 0)$

- (2)將每一向量展開為其他兩向量的線性組合

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

無限多組解，線性相依

- a=c=t
- b=-c=-t
- 根據：$a(1,2,3,4) + b(2,2,2,4) + c(1,0,-1,0) = (0,0,0,0)$
- t*v1-t*v2+t*v3=0
- 所以，v1-v2+v3=0

5. 多項式的判別

判別多項式$p_1p_2p_3$是線性獨立或線性相依

範例5：判別多項式$p_1p_2p_3$是線性獨立或相依

- 判別多項式$p_1p_2p_3$是線性獨立或相依 (page. 167)

$$\mathbf{p}_1 = 1 - x, \quad \mathbf{p}_2 = 5 + 3x - 2x^2, \quad \mathbf{p}_3 = 1 + 3x - x^2$$

- 線性多項式方程式： $k_1p_1+k_2p_2+k_3p_3=0$
  - 物理意義：三個多項式的合成若為0，就是線性相關(相依)
  - 物理意義：三個多項式的合成若不為0，就是線性獨立
  - 若存在k使p合成0（k有解，或無限多解），則線性相依
  - 若不存在k使p合成0（k無解），則線性獨立
- 代入多項式： $k_1(1 - x) + k_2(5 + 3x - 2x^2) + k_3(1 + 3x - x^2) = 0$
- 以次方分類： $(k_1 + 5k_2 + k_3) + (-k_1 + 3k_2 + 3k_3)x + (-2k_2 - k_3)x^2 = 0$

範例5：判別多項式$p_1p_2p_3$是線性獨立或相依

- 以次方分類：$(k_1+5k_2+k_3)+(-k_1+3k_2+3k_3)x+(-2k_2-k_3)x^2=0$
- 多項式的係數=0

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + k_3 &= 0 \\ -k_1 + 3k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_2 - k_3 &= 0 \end{aligned}$$

- $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & \mathbf{0} \\ -1 & 3 & 3 & \mathbf{0} \\ 0 & -2 & -1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 8 & 4 & \mathbf{0} \\ 0 & -2 & -1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 2 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 2 & 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 2 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$
- K有無限多組解
- 表示多項式可以合成0
- 表示線性相關

(page. 167)

```
簡化後的梯形Am= Matrix([[1, 0, -3/2], [0, 1, 1/2], [0, 0, 0]])
三個向量彼此線性相依
彼此線性獨立的行數m= (0, 1)
印出線性獨立的向量= Matrix([[1], [-1], [0]])
印出線性獨立的向量= Matrix([[5], [3], [-2]])
```

```python
from sympy import *
A = Matrix(    [
           [1, 5 ,1],
          [-1, 3 ,3],
          [0, -2,-1] ])
A_reduced_form, inds  = A.rref()
print('簡化後的梯形Am=', A_reduced_form)
n = A.shape[1]
n_independent = len(inds)
if n == n_independent:
    print('三個向量彼此線性獨立')
else:
    print('三個向量彼此線性相依')
print('彼此線性獨立的行數m=', inds)
```

$$
\begin{aligned}
k_1 + 5k_2 + k_3 &= 0 \\
-k_1 + 3k_2 + 3k_3 &= 0 \\
-2k_2 - k_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Python程式碼

7. 函數的判別

判別函數$f_1f_2f_3$是線性獨立或線性相依

多項式，函數

- (1)多項式

$$\mathbf{p}_1 = 1 - x, \quad \mathbf{p}_2 = 5 + 3x - 2x^2, \quad \mathbf{p}_3 = 1 + 3x - x^2$$

- (2)函數

$$\mathbf{f}_1 = \sin^2 x, \quad \mathbf{f}_2 = \cos^2 x, \quad \text{and} \quad \mathbf{f}_3 = 5$$

判別線性獨立(3)：函數

- 證明：函數在F(−∞, ∞)區間為線性相依，(page. 172)

$$\mathbf{f}_1 = \sin^2 x, \quad \mathbf{f}_2 = \cos^2 x, \quad \text{and} \quad \mathbf{f}_3 = 5$$

- 測試：是否函數方程式： $k_1f_1+k_2f_2+k_3f_3$ 是否=0
- 結果發現：$5f_1+5f_2-f_3=0$

$$\begin{aligned} 5\mathbf{f}_1 + 5\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3 &= 5\sin^2 x + 5\cos^2 x - 5 \\ &= 5(\sin^2 x + \cos^2 x) - 5 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

- 所以是線性相依

判別線性獨立(3)：函數

- 證明：函數在F(−∞, ∞)區間為線性相依或線性獨立

$$\mathbf{f}_1 = \sin^2 x, \quad \mathbf{f}_2 = \cos^2 x, \quad \text{and} \quad \mathbf{f}_3 = 5$$

- 但不是每個函數都可以一眼看出其合成是否為0
- 解決方法：朗斯基式（Wronskian）

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

朗斯基式（Wronskian）

- 證明過程：page. 172

$k_1f_1 + k_2f_2 + k_2f_3... = 0$，則線性相依

一階微分……=0

二階微分……=0

三階微分……–0

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

朗斯基式(行列式)=

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

朗斯基式（Wronskian）

- 證明過程：page. 172

$k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_2 f_3 ... = 0$

- 若朗斯基式(行列式)≠0，則函數$f_1 f_2 f_3$是線性獨立

det(A) ≠0

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

重要

最精簡摘要：判別是否為線性獨立，線性相依

若存在一組(k1, k2, k3)使得 $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0,0,0)$，就是線性相依

$$\mathbf{v}_1=(1,-2,3),\quad \mathbf{v}_2=(5,6,-1),\quad \mathbf{v}_3=(3,2,1)$$

- （1）線性獨立
  - 如何判別是否為線性獨立？
  - 方法1：det(A) $\neq 0$
  - 方法2：簡化列梯形，必須只有唯一0解

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}$$

- （2）線性相依
  - 如何判別是否為線性相依？
  - 方法1：det(A) $=0$
  - 方法2：簡化列梯形，必須有無限多解

範例10：判別函數是否為線性獨立(page. 173)

- 使用朗斯基式來證明 $f_1=1$，$f_2=e^x$, $f_3=e^{2x}$ 在 $C(-\infty, \infty)$ 區間中為線性獨立
- **判別式：**

- 使用朗斯基式來證明 $f_1=1$，$f_2=e^x$, $f_3=e^{2x}$ 在 $C(-\infty, \infty)$ 區間中為線性獨立
- **判別式：**

$$W(x)=\begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix}=2e^{3x}$$

函數在 (–∞, ∞) 區間中並不完全為零，
所以 f1, f2, f3 可形成一線性獨立集合

8. 結論：判別線性獨立的兩種方法

重要

方法1：背公式法

$$v_1 = (1, -2, 3), \quad v_2 = (5, 6, -1), \quad v_3 = (3, 2, 1)$$

（1）線性獨立

- 如何判別是否為線性獨立？
- 方法1：det(A) $\neq$0
- 方法2：簡化列梯形，必須只有唯一0解

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}$$

（2）線性相依

- 如何判別是否為線性相依？
- 方法1：det(A) ＝ 0
- 方法2：簡化列梯形，必須有無限多解

重要

方法2：理解法

$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$ ➡ $\frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$

- 若存在一組(k1, k2, k3)使得 k1v1+k2v2 +k3v3=(0, 0, 0)，就是線性相依
  - 意義：三個向量的合成若為0，就是線性相關(相依)
- $$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
- (1) K有解，就是線性相依（除了k=0解外有其他解=無限多解，就是線性相依
- (2) K無解，就是線性獨立（除了k=0解外無解，就是線性獨立