線性代數第8章 詳解版

線性獨立：linear independent

線性相依：linear dependent

陳擎文老師

1. 線性獨立，線性相依
常見的題型

判別線性獨立, 或線性相依(1)：向量

- 試問，以下向量在 R3 中為線性獨立或線性相依？(page. 165)
- v1=(1, -2, 3), v2=(5, 6, -1), v3=(3, 2, 1)

判別線性獨立, 或線性相依(2)：向量

- 試問，線性向量方程式： $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=0$，是否有非顯解？
  v1=(1,-2,3), v2=(5,6,-1), v3=(3,2,1)
- （1）顯解trival solution：k1=0, k2=0,….
- （2）非顯解：除了k1=0, k2=0解外，還有其它解
- （3）無其它解了 = 線性獨立（linear independent）
- （4）還有其它解 = 線性相依（linear dependent）

判別線性獨立, 或線性相依(3)：多項式

- **試問，以下多項式方程式組，在*p2*中，彼此是"線性獨立, 或線性相依"？**

$$\mathbf{p}_1 = 1 - x, \quad \mathbf{p}_2 = 5 + 3x - 2x^2, \quad \mathbf{p}_3 = 1 + 3x - x^2$$

判別線性獨立, 或線性相依(4)：函數

- 證明 $f_1=1,\ \ f_2=e^x,\ \ f_3=e^{2x}$

在 $C(-\infty, \infty)$區間中為線性獨立

（這邊不是線性多項式，而是非線性函數）

2. 線性獨立，線性相依的定義(1)：最簡單說法

線性獨立線性相依定義(1)：最簡單說法

- 含兩個以上向量的集合 S 為關係 （page. 168）
- (a)**線性相依**：若且唯若S中至少有一個向量可以被寫成其他向量的線性組合。
- (b)**線性獨立**：若且唯若S中沒有向量可以被寫成其他向量的線性組合。

線性獨立線性相依定義(1)：最簡單說法

- 範例7： $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$
- 請問：v3 ＝ f(v1, v2)嗎？

（v3能夠用v1，v2組合而成嗎？）

- 結果： $\frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ → $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2$
- 結論：v1, v2, v3彼此之間相關聯，所以是**線性相依**

(page. 169)

線性獨立線性相依定義(1)：最簡單說法

- 範例6：R3基底向量i, j, k，

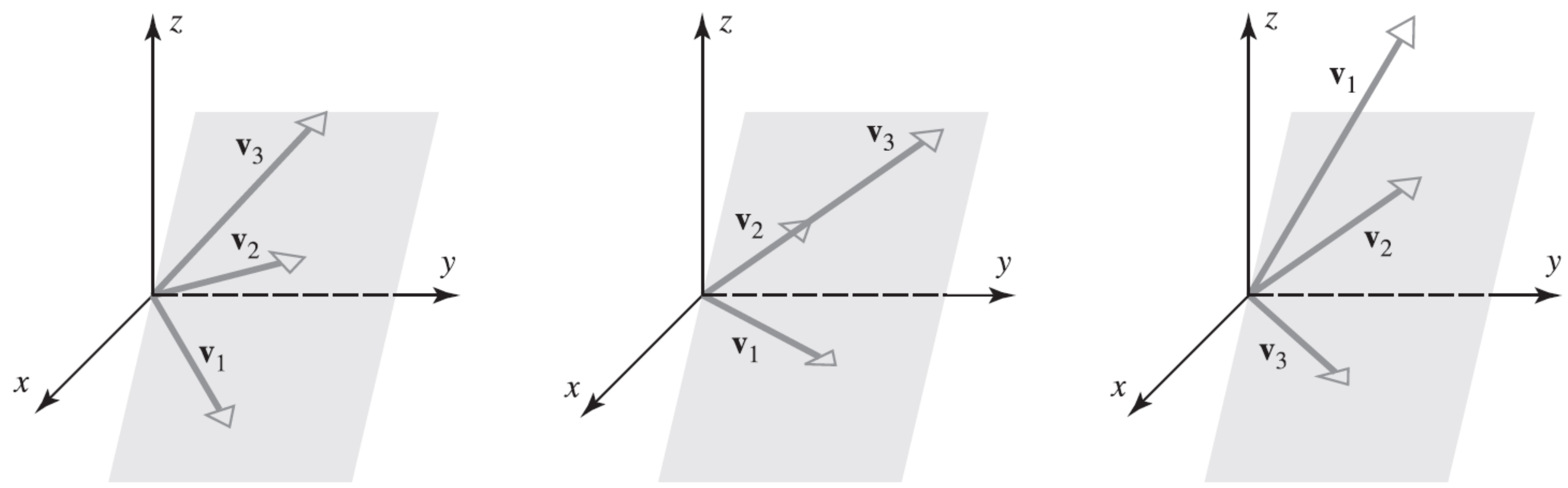
i=(1, 0, 0), j=(0, 1, 0), k=(0, 0, 1)

- 請問：k能夠用i，j組合而成嗎？
- 結果：(0, 0, 1)k無法用i=(1, 0, 0), j=(0, 1, 0)組合而成
- 結論：i, j, k彼此之間沒有關聯，所以是<u>線性獨立</u>

(page. 169)

平面的線性獨立的幾何意義

- (page. 160)
- 線性相依：$v_1 v_2$ v_3 彼此在同平面(v3可以用v1, v2組合)
- 線性獨立：$v_1 v_2$ v_3 彼此不在同平面

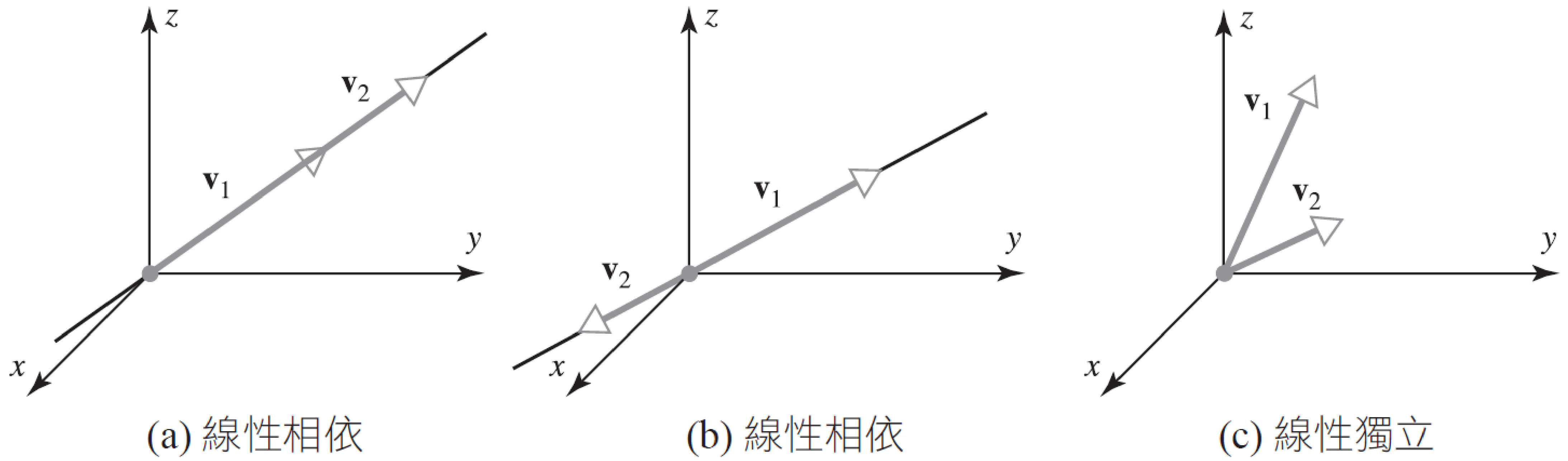


(a) 線性相依　(b) 線性相依　(c) 線性獨立

➲ 圖 4.3.4

直線的線性獨立的幾何意義(page. 160)

- 線性相依：v_1和v_2 彼此為純量倍數關係（v2可以用v1組合表示）
- 線性獨立：v_1和v_2彼此不是純量倍數關係



➲ 圖 4.3.3

2. 如何才能快速判別是否為線性獨立，線性相依？

重要

先說結論公式：判別是否為線性獨立，線性相依

若存在一組(k1, k2, k3)使得 $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0,0,0)$，就是線性相依

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$$

- （1）線性獨立
  - 如何判別是否為線性獨立？
  - 方法1：det(A) $\neq 0$
  - 方法2：簡化列梯形，必須只有唯一0解

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}$$

- （2）線性相依
  - 如何判別是否為線性相依？
  - 方法1：det(A) ＝ 0
  - 方法2：簡化列梯形，必須有無限多解

範例：快速判別是否為線性獨立，線性相依

- 範例7： $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$
- 請問：如何才能快速判別是否為線性獨立，線性相依
- 方法：還是要建立線性方程式系統，求解
- 例如：線性向量方程式： $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0, 0, 0)$
  - 物理意義：三個向量的合成若為0，就是線性相關(相依)
  - 物理意義：三個向量的合成若不為0，就是線性獨立
- $1k_1+5k_1+3k_1=0$
- $-2k_2+6k_2+2k_2=0$
- $3k_3-1k_2+k_3=0$
- $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

快速判別：若det(A) ≠0 則線性獨立

3. 線性獨立，線性相依的意義(2)：由線性方程式系統的視角

如何才能快速判別是否為線性獨立，線性相依

- 範例7： $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$
- 請問：如何才能快速判別是否為線性獨立，線性相依
- 方法：還是要建立線性方程式系統，求解
- 例如：線性向量方程式： $k_1v_1+k_2v_2 +k_3v_3=(0, 0, 0)$
  - 物理意義：三個向量的合成若為0，就是線性相關(相依)
  - 物理意義：三個向量的合成若不為0，就是線性獨立

$$\frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

- $1k_1+5k_1 +3k_1=0$
- $-2k_2+6k_2 +2k_2=0$
- $3k_3-1k_2 +k_3=0$
- $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(page. 169)

如何才能快速判別是否為線性獨立，線性相依

- 結論： $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$
- 若存在一組(k1, k2, k3)使得 $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0, 0, 0)$，就是線性相依
  - 三個向量的合成若為(0, 0, 0)，就是線性相關(相依) → $\frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$
  - 三個向量的合成若不為(0, 0, 0) ，就是線性獨立
- $1k_1+5k_1 +3k_1=0$
- $-2k_2+6k_2 +2k_2=0$
- $3k_3-1k_2 +k_3=0$
- $$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ →
-

(page. 169)

若k有其它解，線性相依

若k只有0解，線性獨立

除了0解外，沒有其它解了

如何才能快速判別是否為線性獨立，線性相依

- 結論：$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$
- 若存在一組(k1, k2, k3)使得 $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0,0,0)$，**就是線性相依**
- （1）**線性相依**
  - 三個向量的合成若為(0, 0, 0)，就是線性相關(相依)
  - 若k有其它解（無限多組解）=> 線性相依
- （2）**線性獨立**
  - 三個向量的合成若不為(0, 0, 0)，就是線性獨立
  - 若k只有0解 => 線性獨立（除了0解外，沒有其它解了）

如何才能快速判別是否為線性獨立，線性相依

- 結論：$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$
- 建立線性轉換系統：$k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0, 0, 0)$
- $$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\-2\\3\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}5\\6\\-1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}3\\2\\1\end{matrix}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k1\\ k2\\ k3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}$$ ➡ 若k只有0解，線性獨立；若k有其它解，線性相依
- 判斷k：無解，有解（唯一解，無限多解）
- 判斷k：無解，有解（唯一0解，唯一非0解，無限多解）
- 方法：兩個方法（前面第二章～第六章）
  - 高斯喬丹的簡化列梯形法，行列式法

重要

判別是否有唯一解的方法有兩種

- (1). 方法1：用增廣矩陣，將之化簡：簡化列梯形，然後評估每個變數是否存在？
  - 缺點：速度慢，高斯消去法，計算到最後才知道
  - 優點：可以判別是無解，還是無限多組解

$$(a)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1}\end{bmatrix}$$

無解

$$(b)\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -4 & 2\\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}\end{bmatrix}$$

無限多組解

- (2). 方法2：用原始矩陣A的行列式det(A)判別
  - 解聯立方程式之前要先判斷是否有唯一解=> det(A)≠
  - 若det(A)≠0，則系統有唯一解
  - 若det(A)=0，則系統可能無解，可能無限多組解
    - 若det(A)=0，且det(A|B)=0，則無限多組解
    - 若det(A)=0，且det(A|B)≠0，則無解

如何才能快速判別是否為線性獨立，線性相依

- $$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

若k只有0解，線性獨立
若k有其它解，線性相依

- 方法2：用原始矩陣A的行列式det(A)判別
  - 若det(A)≠0，則系統有唯一解
  - 若det(A)＝0，則系統可能無解，可能無限多組解
    - 若det(A)＝0，且det(A|B)=0，則無限多組解
    - 若det(A)＝0，且det(A|B)≠0，則無解（但是因為B=(0,0,0)，所以不會出現無解可能）
- 結果：只有二種可能
  - 若det(A)≠0，則系統有唯一解=> 唯一0解（因為k1=0/det(A)=0）
  - 若det(A)＝0，則系統可能無解，可能無限多組解
    - 若det(A)＝0，且det(A|B)=0，則無限多組解（若det(A)=0,則一定是無限多解）
    - （不可能）若det(A)＝0，且det(A|B)≠0，則無解（但是因為B=(0,0,0)，所以不會出現無解可能）

如何才能快速判別是否為線性獨立，線性相依

- $$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

若k只有0解，線性獨立
若k有其它解，線性相

- 方法2：用原始矩陣A的行列式det(A)
- 結論：只有二種可能
- （1）若det(A)≠0，則系統有唯一0解 => 線性獨立
- （2）若det(A)=0，則一定是無限多解 => 線性相依
  （不可能無解情況）
- 本題判別結果：
  det(A) = 0 →所以是→無限多組解→是線性相依

如何才能快速判別是否為線性獨立，線性相依

- 結論：$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$
- 建立線性轉換系統：$k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0, 0, 0)$
- $$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ → 若k只有0解，線性獨立；若k有其它解，線性相依

- 方法1：行列式法
  - 若，$\det(A)\neq0$，則系統有0解，表示線性獨立
  - 若，$\det(A)=0$ ，則系統有無限多解，表示線性相依

結論

重點摘要：判別是否為線性獨立，線性相依的各種意義

- 若存在一組(k1, k2, k3)使得 $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0,0,0)$，就是線性相依 $\mathbf{v}_1=(1,-2,3),\quad \mathbf{v}_2=(5,6,-1),\quad \mathbf{v}_3=(3,2,1)$
- （1）線性相依
  - 三個向量的合成若為(0, 0, 0)，就是線性相關(相依)
  - 若k有其它解（唯一非0解，無限組接）=> 線性相依
  - 若，$\det(A)=0$，則系統有無限多解，表示線性相依
- （2）線性獨立
  - 三個向量的合成若不為(0, 0, 0)，就是線性獨立
  - 若k只有0解 => 線性獨立（除了0解外，沒有其它解了）
  - 若，$\det(A)\neq0$，則系統有0解，表示線性獨立

範例2：判別$v_1v_2v_3$是線性獨立或相依

- 試問，以下向量在 R3 中為線性獨立或線性相依？(page. 165)
- v1=(1, -2, 3), v2=(5, 6, -1), v3=(3, 2, 1)
- 線性向量方程式： $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=0$
  - 物理意義：三個向量的合成若為0，就是線性相關(相依)
  - 物理意義：三個向量的合成若不為0，就是線性獨立
- $1k_1+5k_1+3k_1=0$
- $-2k_2+6k_2+2k_2=0$
- $3k_3-1k_2+k_3=0$
- $$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

範例2：判別$v_1v_2v_3$是線性獨立或相依

- $$\begin{bmatrix}1 & 5 & 3\\ -2 & 6 & 2\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k1\\ k2\\ k3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$ (page. 165)
- **若存在k向量合成0（k有0解，或無限多解）**

  （k有0解則線性獨立，k有無限多解則線性相依）
- (1)行列式法判別：det(A)=6+30+6-54+2+10=0，無解，或無限多組解
  - $\text{Det}(A|B)=\det\left(\begin{bmatrix}5 & 3 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\right)=0$，所以無限多組解
- (2)高斯喬丹簡化列梯形法：

$$\begin{bmatrix}1 & 5 & 3 & 0\\ -2 & 6 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5 & 3 & 0\\ 0 & 16 & 8 & 0\\ 0 & -16 & -8 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0.5 & 0\\ 0 & 1 & 0.5 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & -0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0.5 & 0\\ 0 & 1 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

- 除了0, 0, 0外，無限多組解（k2=-k3/2, k1=-k3/2），所以，$v_1v_2v_3$是線性相依

```
from sympy import *
A = Matrix(    [
        [1, 5 ,3],
        [-2, 6 ,2],
        [3, -1 ,1]
    ])
A_reduced_form, inds  = A.rref()
print('簡化後的梯形Am=', A_reduced_form)
n = A.shape[1]
n_independent = len(inds)
if n == n_independent:
    print('三個向量彼此線性獨立')
else:
    print('三個向量彼此線性相依')
print('彼此線性獨立的行數m=', inds)
c1 = inds[0]
```

```
簡化後的梯形Am= Matrix([[1, 0, 1/2], [0, 1, 1/2], [0, 0, 0]])
三個向量彼此線性相依
彼此線性獨立的行數m= (0, 1)
印出線性獨立的向量= Matrix([[1], [-2], [3]])
印出線性獨立的向量= Matrix([[5], [6], [-1]])
```

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Python程式碼

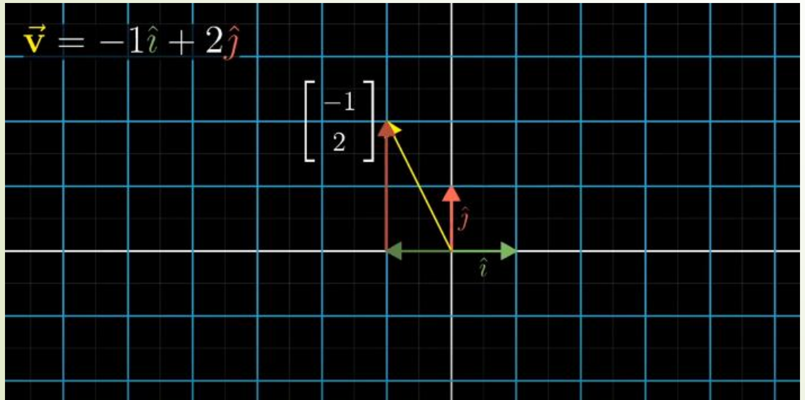
4. 線性獨立，線性相依的意義(3)：由線性座標轉換之物理意義的角度

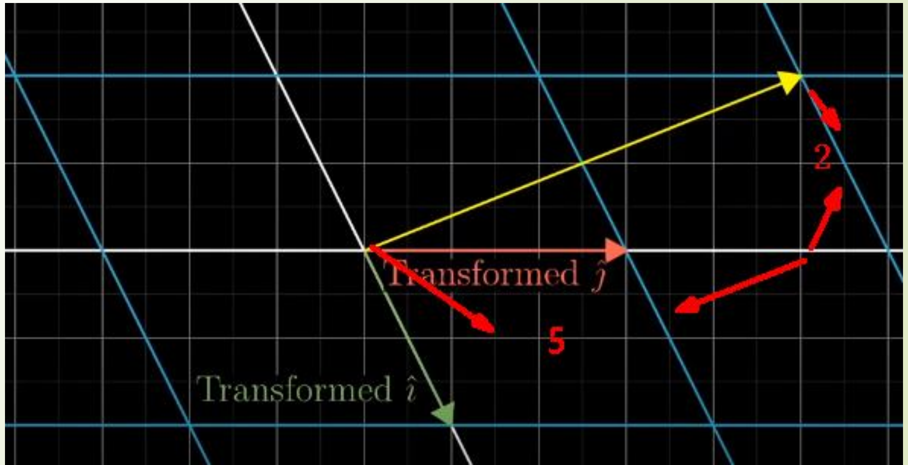
範例1：$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

代表什麼物理意義？

$\begin{bmatrix}1 & 3\\-2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$代表什麼意義

- $Ax = y$
- 輸入向量x，input vector = $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$
- 輸出向量y，output vector =$\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$
- $f(x)$ = 基底轉換矩陣A= $\begin{bmatrix}1 & 3\\-2 & 0\end{bmatrix}$， 為什麼why ????



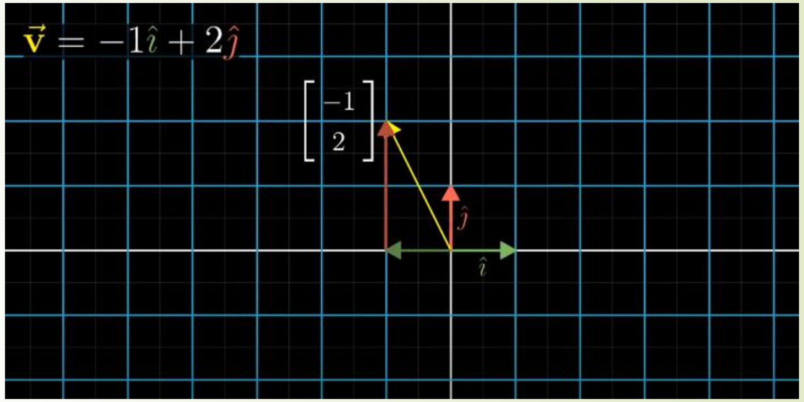


基底轉換矩陣A= $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

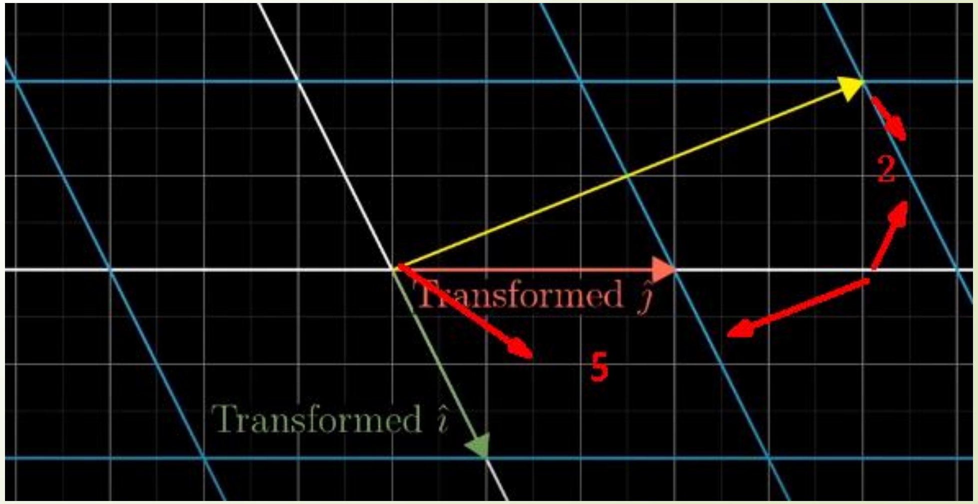
代表什麼物理意義？

轉換矩陣A= $\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}3\\0\end{matrix}} \end{bmatrix}$代表什麼物理意義

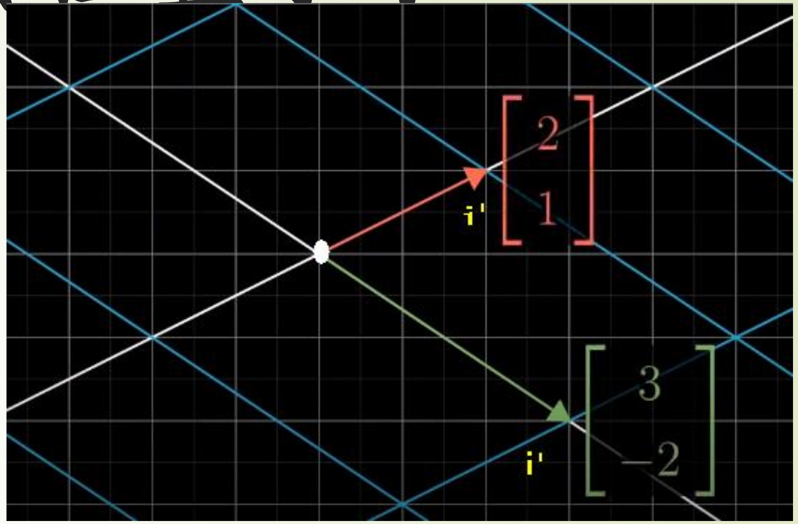
- 代表：
- (1).原本的i軸，被轉換到$\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$
  - $\tilde{i}$ = $\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$I
- (2).原本的j軸，被轉換到$\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$
  - $\tilde{j}$= $\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$i



注意觀看轉換前後位置：
i 軸是綠色軸
J 軸上紅色軸
某點向量是黃色



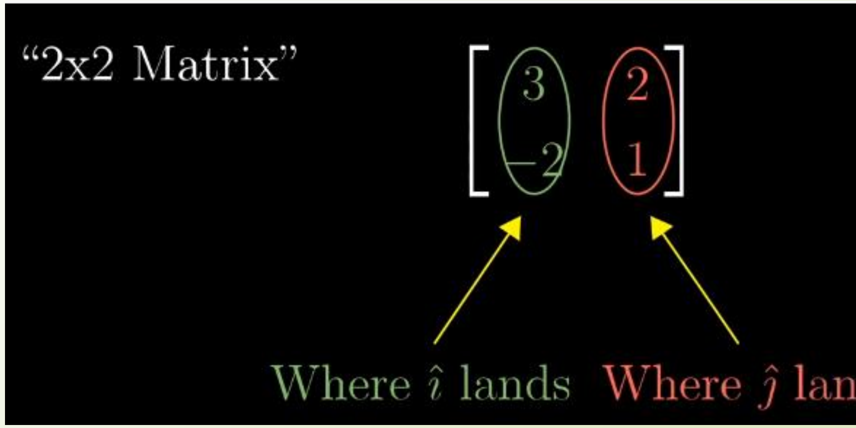
範例2：$\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}$被轉換到什麼位置了？



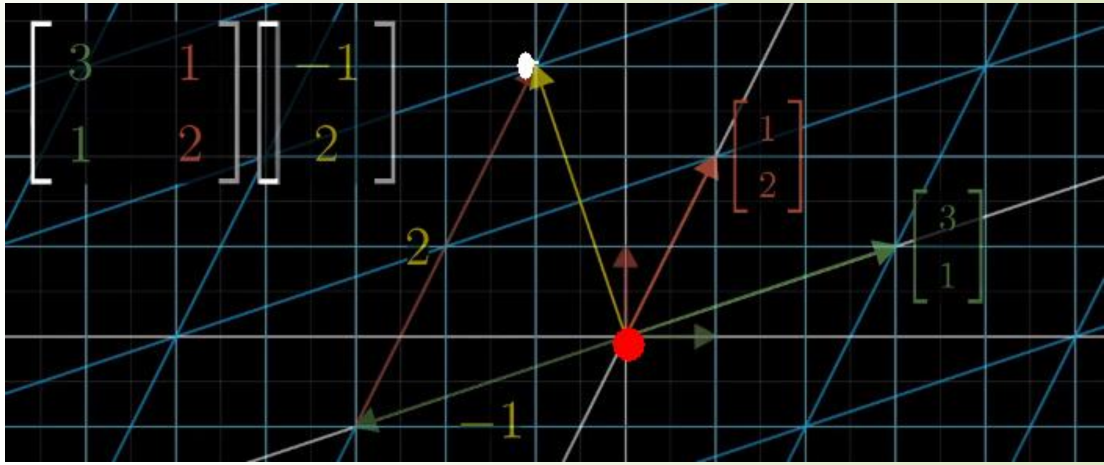
- 網格被動到$\begin{bmatrix}3 & 2\\-2 & -1\end{bmatrix}$
- 基底被移動後轉換矩陣=$\begin{bmatrix}3 & 2\\-2 & -1\end{bmatrix}$
- 任意點被移動轉換後的新位置$\begin{bmatrix}x2\\y2\end{bmatrix}$

公式：$\begin{bmatrix}x2\\y2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{轉} & \text{換}\\\text{矩} & \text{陣}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\-2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}3 & 2\\-2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{5}\\\mathbf{7}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15+14\\-10-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}29\\-17\end{bmatrix}$



範例3：$\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$被轉換到什麼位置了？



- 網格被動到$\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$
- 基底被移動後轉換矩陣= $\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$
- 任意點被移動轉換後的新位置$\begin{bmatrix}x2\\y2\end{bmatrix}$

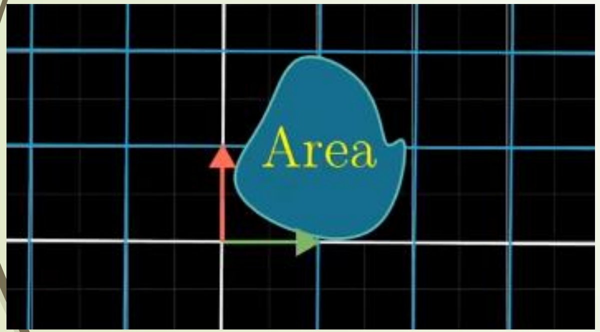
公式：$\begin{bmatrix}x2\\y2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}轉 & 換\\矩 & 陣\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

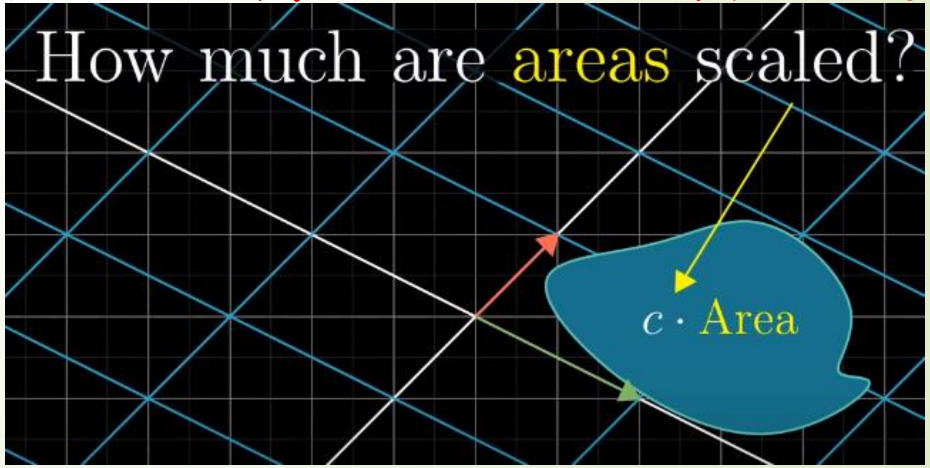
$=\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3+\mathbf{2}\\-1+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix}$

重要

行列式的物理意義

- 行列式值 ＝ 線性映射(坐標轉換)後單位區域的變形率、縮放率
  - 2D矩陣：代表座標轉換後，面積的縮放率
  - 3D矩陣：代表座標轉換後，體積的縮放率
  - 例如：$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$行列式=2，代表坐標轉換後，面積變成2倍





行列式值=0代表什麼物理意義？

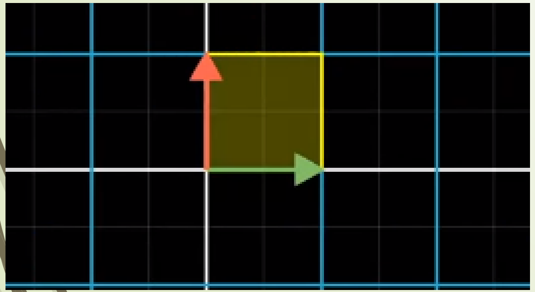
A. 網格被壓縮到面積為0

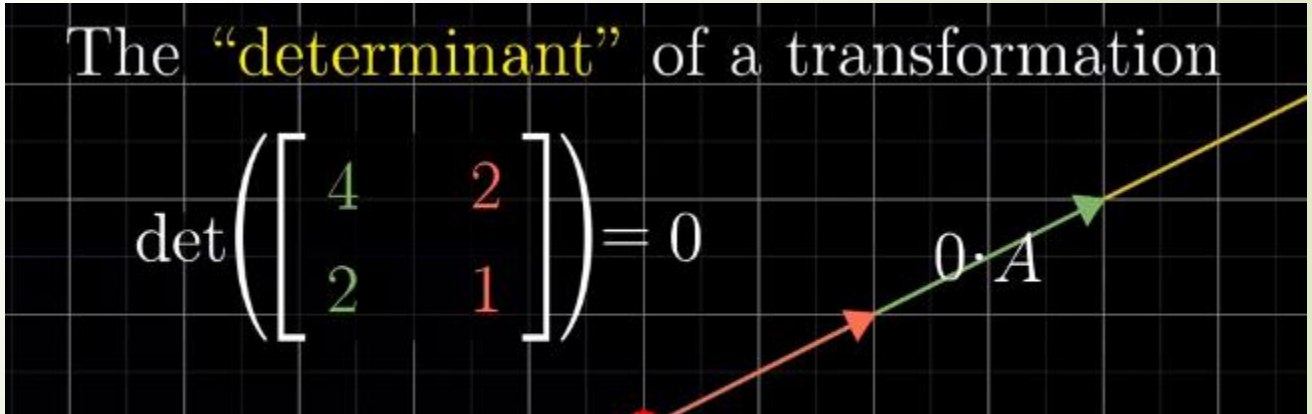
B. 被壓縮到降階（面→線，線→點）

C. 無限多解，或是無解

範例3：行列式值determinant=0代表的物理意義

- 網格變換矩陣=$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
- 單位區域面積Area → C・Area ＝ 0・Area
- 轉換的行列式值 =變形係數 C ＝ det($\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$)=0
- <u>代表物理意義</u>：網格變形後的區域**不是面積**，而是**直線**，或是**一點**（所以沒有面積）
- <u>代表物理意義</u>：**網格變形後，被擠壓到極致**（線，點）





$k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0, 0, 0)$的物理意義

- 範例7： $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$
- 請問：判別v1, v2, v3是否為線性獨立，線性相依？
- 方法：**還是要建立線性方程式系統，求解**
- 例如：線性向量方程式： $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0, 0, 0)$
  - **物理意義：三個向量的合成若為0，就是線性相關(相依)** ➡ $\frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$
  - **物理意義：三個向量的合成若不為0，就是線性獨立**
- $1k_1+5k_1+3k_1=0$
- $-2k_2+6k_2+2k_2=0$
- $3k_3-1k_2+k_3=0$
- $$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(page. 169)

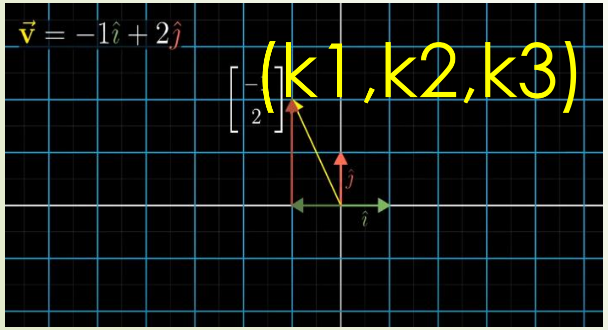
$k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0, 0, 0)$的物理意義

- 範例7： $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$
- 線性向量方程式： $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0, 0, 0)$

$1k_1+5k_1+3k_1=0$
$-2k_2+6k_2+2k_2=0$
$3k_3-1k_2+k_3=0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 若能夠把直角坐標的(k1, k2, k3)，經轉換矩陣A, 轉到（0, 0, 0）
- **三個向量的合成若為(0, 0, 0)，就是線性相關(相依）**



→

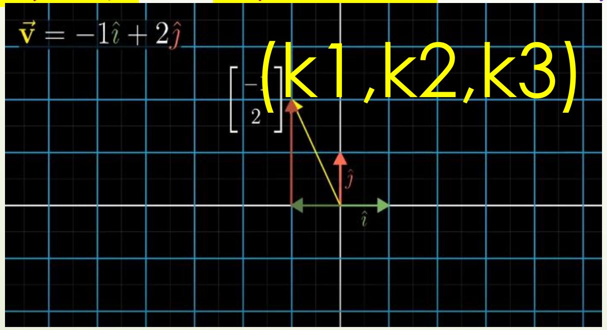
$k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0, 0, 0)$的物理意義

- 線性向量方程式：$k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0, 0, 0)$

$$1k_1+5k_1+3k_1=0$$
$$-2k_2+6k_2+2k_2=0$$
$$3k_3-1k_2+k_3=0$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- （1）線性相依：
  - 若能夠把直角坐標的(k1, k2, k3)，經轉換矩陣A, 可轉到（0, 0, 0）
- （2）線性獨立：
  - 若除了k=(0, 0, 0)外，都無法把直角坐標的(k1, k2, k3)，經轉換矩陣A, 轉到（0, 0, 0）



$\rightarrow$

$k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0,0,0)$的物理意義

- 線性向量方程式： $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0,0,0)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- （1）線性相依：
  - 若能夠把直角坐標的(k1,k2,k3)，經轉換矩陣A,可轉到（0,0,0）
  - K有很多組解（無限多解），都能夠被轉換到(0,0,0)
  - 代表有降階情況發生（平面，直線，點）=> 被轉到(0,0,0)點
  - 行列式A=det(A)=0，代表降階，代表線性相依
- （2）線性獨立：
  - 若除了k=(0,0,0)外，都無法把直角坐標的(k1,k2,k3)，經轉換矩陣A,轉到（0,0,0）
  - 沒有任何k(k1,k2,k3)會被降階轉換
  - 沒有降階轉換的就是線性獨立
  - 行列式A=det(A)≠0，代表沒有降階，代表線性獨立

重點摘要：判別是否為線性獨立，線性相依的各種意義

- 若存在一組(k1, k2, k3)使得 $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0,0,0)$，就是線性相依
- （1）線性相依

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$$

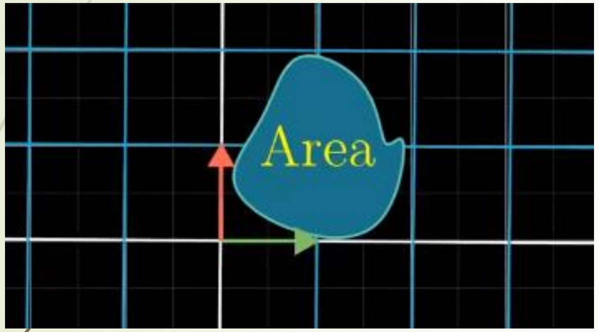
  - 三個向量的合成若為(0,0,0)，就是線性相關(相依)
  - 若k有其它解（唯一非0解，無限組接）=> 線性相依
  - 若，det(A)＝0 ，則系統有無限多解，表示線性相依
  - 代表有降階情況發生（平面，直線，點）=> 被轉到(0,0,0)點
  - 行列式A=det(A)=0，代表降階，代表線性相依
- （2）線性獨立
  - 三個向量的合成若不為(0,0,0) ，就是線性獨立
  - 若k只有0解 => 線性獨立（除了0解外，沒有其它解了）
  - 若，det(A)≠0，則系統有0解，表示線性獨立
  - 沒有任何k(k1, k2, k3)會被降階轉換，沒有降階，就是線性獨立
  - 行列式A=det(A)≠0，代表沒有降階，代表線性獨立

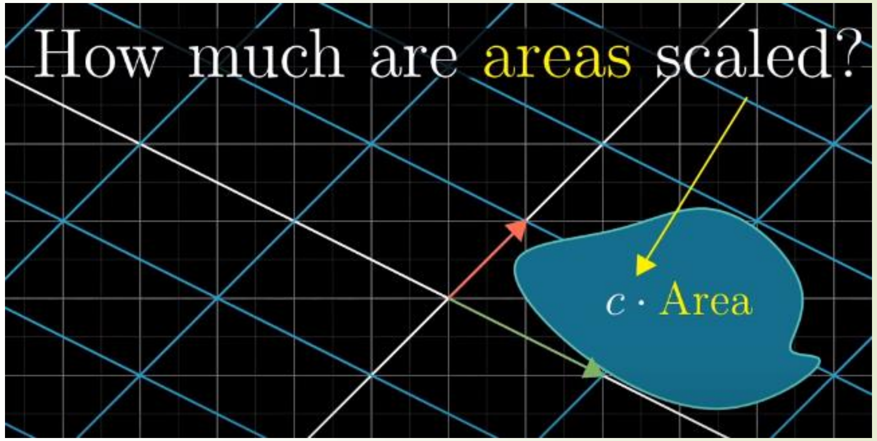
5. 線性獨立，線性相依的意義(4)：由座標轉換後新基底向量能否生成空間之角度

重要

坐標轉換後，(u, v)也是線性獨立

- (1). $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$行列式=2，代表坐標轉換後，面積變成2倍



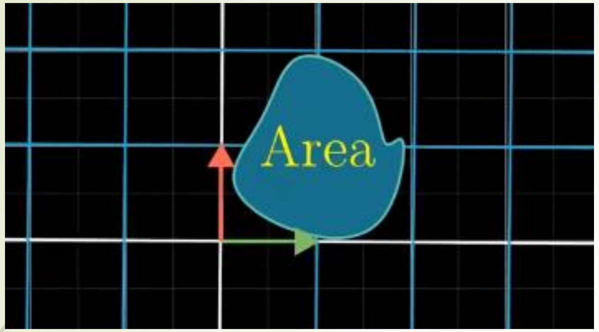


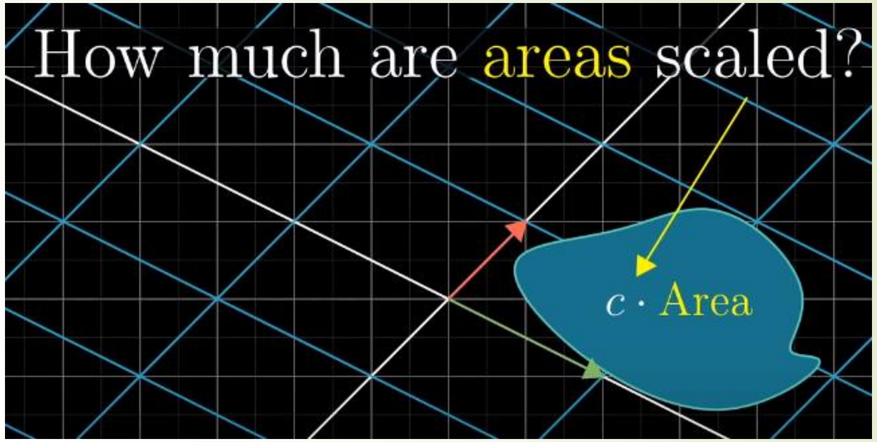
轉換前i=(1,0), j=(0,1)
可以組合成R2空間的任一點
i,j是線性獨立

轉換後u=(3,1), v=(1,1)
也可以組合成R2空間的任一點
u,v是線性獨立

- 坐標轉換後，(u, v)線性獨立，能夠組成R2空間，可當作基底向量

坐標轉換後，(u, v)也是線性獨立



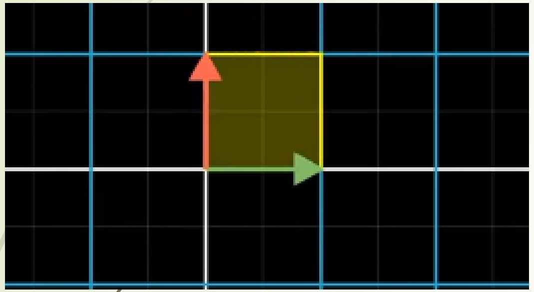


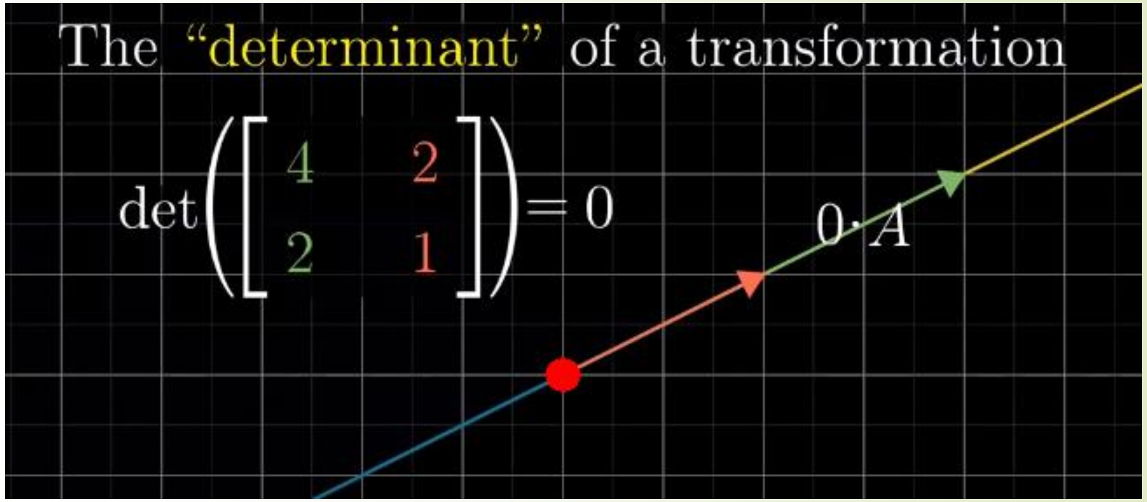
- 坐標轉換後，(u, v)線性獨立，能夠組成R2空間，可當作基底向量
- 只有線性獨立的向量v1, v2, v3，才能生成R3空間的任一向量，
- 才能被當作基底向量

重要

坐標轉換後，(u, v)也是線性獨立

- (1). $\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$行列式=0，代表坐標轉換後，降階





轉換前i=(1,0), j=(0,1)
可以組合成R2空間的任一點
i,j是線性獨立

轉換後u=(4,2), v=(2,1)
無法組合成R2空間的任一點
u,v是線性相依

- 坐標轉換後，因為降階
- => (u, v)線性相依，無法組成R2空間，不能當作基底向量

重點摘要：判別是否為線性獨立，線性相依的各種意義

若存在一組(k1, k2, k3)使得 $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0,0,0)$，就是線性相依

- (1) 線性相依 $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$
  - 三個向量的合成若為(0,0,0)，就是線性相關(相依)
  - 若k有其它解（唯一非0解，無限組接）=> 線性相依
  - 若，det(A)＝0 ，則系統有無限多解，表示線性相依
  - 代表有降階情況發生（平面，直線，點）=> 被轉到(0,0,0)點
  - 行列式A=det(A)=0，代表降階，代表線性相依
  - 坐標轉換後，因為降階 => (v1,v2,v3)線性相依，無法組成R2空間,不能當基底向量
- (2) 線性獨立
  - 三個向量的合成若不為(0,0,0) ，就是線性獨立
  - 若k只有0解 => 線性獨立（除了0解外，沒有其它解了）
  - 若，det(A)≠0，則系統有0解，表示線性獨立
  - 沒有任何k(k1,k2,k3)會被降階轉換，沒有降階，就是線性獨立
  - 行列式A=det(A)≠0，代表沒有降階，代表線性獨立
  - 坐標轉換後，沒有降階 => (v1,v2,v3)線性獨立，可組成R2空間,能夠當作基底向量

範例：證明是線性相依

- (1)證明 $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3, 4)$ $\mathbf{v}_2 = (2, 2, 2, 4)$ $\mathbf{v}_3 = (1, 0, -1, 0)$ 在R4中為線性相依的集合。
- (2)將每一向量展開為其他兩向量的線性組合。

範例：證明是線性相依

- (1)證明 $\mathbf{v}_1=(1,2,3,4)$, $\mathbf{v}_2=(2,2,2,4)$, $\mathbf{v}_3=(1,0,-1,0)$ 在R4中為線性相依的集合。
- 方法：因為不是nxn矩陣，無法用行列式判別，只能用簡化列梯形判別

$$a(1,2,3,4)+b(2,2,2,4)+c(1,0,-1,0)=(0,0,0,0)$$

$$\begin{aligned} a+2b+c&=0\\ 2a+2b\quad&=0\\ 3a+2b-c&=0\\ 4a+4b\quad&=0 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \rightarrow$$

無限多組解，線性相依

範例：證明是線性相依

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3, 4)$$
$$\mathbf{v}_2 = (2, 2, 2, 4)$$
$$\mathbf{v}_3 = (1, 0, -1, 0)$$

- (2)將每一向量展開為其他兩向量的線性組合

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

無限多組解，線性相依

- a=c=t
- b=-c=-t
- 根據： $a(1,2,3,4) + b(2,2,2,4) + c(1,0,-1,0) = (0,0,0,0)$
- t*v1-t*v2+t*v3=0
- 所以，v1-v2+v3=0

5. 線性獨立的用途

學習線性相依，線性獨立有什麼用？

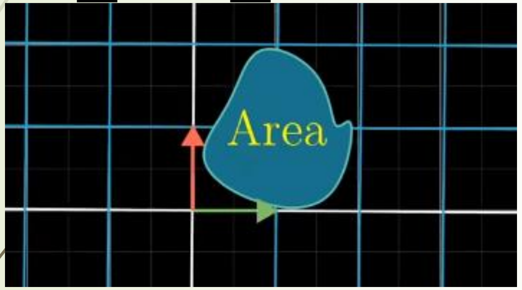
用途：

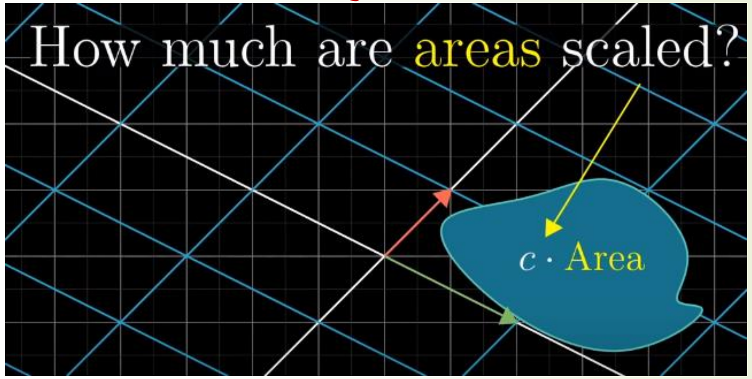
判別轉換後的基底座標，是否能夠形成空間

學習線性相依，線性獨立有什麼用？

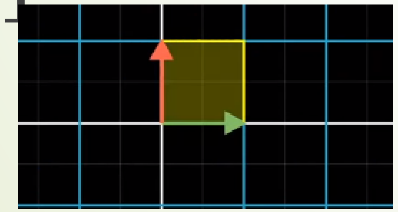
因為：不是全部的轉換矩陣，都能夠生成所需要的空間

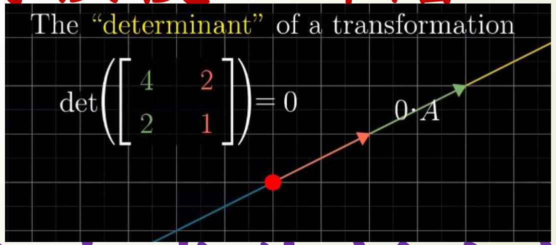
- (1). $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$，坐標轉換後，能夠生成空間





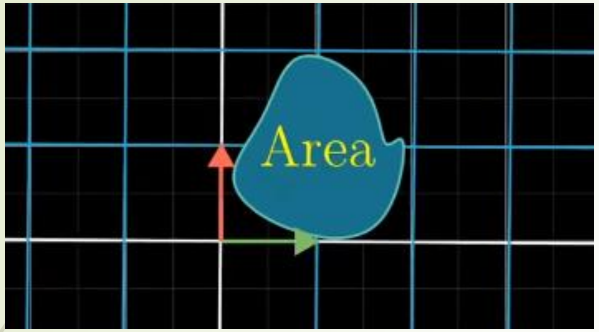
- (2). $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$行列式=0，代表坐標轉換後，降階，無法生成空間

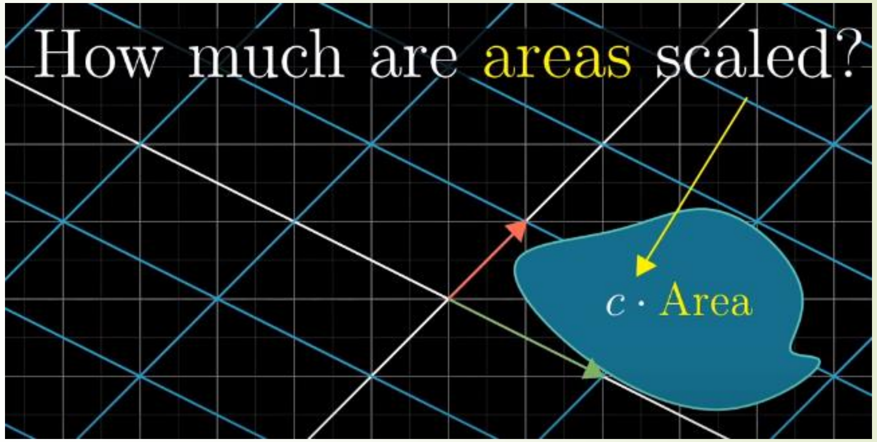




- 所以 $(4,2),(2,1)$，是無法拿來當作新坐標系統的基底向量，因為無法生成空間的任一向量

坐標轉換後，(u, v)也是線性獨立





- 坐標轉換後，(u, v)線性獨立，能夠組成R2空間，可當作基底向量
- 只有線性獨立的向量v1, v2, v3，才能生成R3空間的任一向量，
- 才能被當作基底向量

學習線性相依，線性獨立有什麼用？

重要

- (1) 觀念：
  - 所以要先判別**轉換矩陣**，其向量，是否線性獨立？
  - 若是線性獨立，才能夠當作新坐標系統的基底向量

- (2) 如何判別是否為線性獨立？
  - 方法1：det(A) $\neq 0$
  - 方法2：簡化列梯形，必須只有唯一0解

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

重點摘要：判別是否為線性獨立，線性相依的各種意義

若存在一組(k1, k2, k3)使得 $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0,0,0)$，就是線性相依

(1) 線性相依

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$$

- 三個向量的合成若為(0,0,0)，就是線性相關(相依)
- 若k有其它解（唯一非0解，無限組接）=> 線性相依
- 若，det(A)＝0 ，則系統有無限多解，表示線性相依
- 代表有降階情況發生（平面，直線，點）=> 被轉到(0,0,0)點
- 行列式A=det(A)=0，代表降階，代表線性相依
- 坐標轉換後，因為降階 => (v1,v2,v3)線性相依，無法組成R2空間,不能當基底向量

- (2) 線性獨立
  - 三個向量的合成若不為(0,0,0) ，就是線性獨立
  - 若k只有0解 => 線性獨立（除了0解外，沒有其它解了）
  - 若，det(A)≠0，則系統有0解，表示線性獨立
  - 沒有任何k(k1,k2,k3)會被降階轉換，沒有降階，就是線性獨立
  - 行列式A=det(A)≠0，代表沒有降階，代表線性獨立
  - 坐標轉換後，沒有降階 => (v1,v2,v3)線性獨立，可組成R2空間,能夠當作基底向量

- **如何判別是否為線性獨立？**
- 方法1：det(A) ≠0
- 方法2：簡化列梯形，必須只有唯一0解

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}$$

重要

最精簡摘要：判別是否為線性獨立，線性相依

若存在一組(k1, k2, k3)使得 $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0,0,0)$，就是線性相依

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$$

- （1）線性獨立
  - 如何判別是否為線性獨立？
  - 方法1：det(A) $\neq 0$
  - 方法2：簡化列梯形，必須只有唯一0解

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}$$

- （2）線性相依
  - 如何判別是否為線性相依？
  - 方法1：det(A) $= 0$
  - 方法2：簡化列梯形，必須有<u>無限多解</u>

範例3：判別$v_1 v_2 v_3$是線性獨立或相依

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 2, -1),\ \ \mathbf{v}_2 = (4, 9, 9, -4),\ \ \mathbf{v}_3 = (5, 8, 9, -5)$$

- 試問，以下向量在 R4 中為線性獨立或線性相依？(page. 166)
- v1=(1, 2, 2, -1), v2=(4, 9, 9, -4), v3=(5, 8, 9, -5)
- 線性向量方程式： $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=0$
  - 物理意義：三個向量的合成若為0，就是線性相關(相依)
  - 物理意義：三個向量的合成若不為0，就是線性獨立

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad k_1(1, 2, 2, -1) + k_2(4, 9, 9, -4) + k_3(5, 8, 9, -5) = (0, 0, 0, 0)$$

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

$$k_1(1, 2, 2, -1) + k_2(4, 9, 9, -4) + k_3(5, 8, 9, -5) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} k_1 + 4k_2 + 5k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 8k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 9k_3 &= 0 \\ -k_1 - 4k_2 - 5k_3 &= 0 \end{aligned}$$

範例3：判別$v_1v_2v_3$是線性獨立或相依

- $$\begin{aligned} k_1 + 4k_2 + 5k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 8k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 9k_3 &= 0 \\ \cancel{-k_1 - 4k_2 - 5k_3} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 2 & 9 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ (page. 166)
  - 若存在k向量合成0（k有解，或無限多解），則線性相依
  - 若不存在k向量合成0（k無解），則線性獨立
- $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 9 & 8 & 0 \\ 2 & 9 & 9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- $= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，
- k1=k2=k3=0，除了0之外無解
- 所以，是線性獨立

```
from sympy import *
A = Matrix(    [
           [1, 4 ,8],
           [2, 9 ,8],
           [-2, 9 ,9],
           [-1, -4 ,-5] ])
A_reduced_form, inds  = A.rref()
print('簡化後的梯形Am=', A_reduced_form)
n = A.shape[1]
n_independent = len(inds)
if n == n_independent:
    print('三個向量彼此線性獨立')
else:
    print('三個向量彼此線性相依')
print('彼此線性獨立的行數m=', inds)
c1 = inds[0]
```

```
簡化後的梯形Am= Matrix([[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1], [0,
0, 0]])
三個向量彼此線性獨立
彼此線性獨立的行數m= (0, 1, 2)
印出線性獨立的向量= Matrix([[1], [2], [-2], [-1]])
印出線性獨立的向量= Matrix([[4], [9], [9], [-4]])
印出線性獨立的向量= Matrix([[8], [8], [9], [-5]])
```

$$
\begin{aligned}
k + 4k_2 + 5k_3 &= 0\\
2k + 9k_2 + 8k_3 &= 0\\
2k + 9k_2 + 9k_3 &= 0\\
-k - 4k_2 - 5k_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Python程式碼

6. 多項式

判別多項式$p_1p_2p_3$是線性獨立或線性相依

範例5：判別多項式$p_1p_2p_3$是線性獨立或相依

- 判別多項式$p_1p_2p_3$是線性獨立或相依 (page. 167)

$$\mathbf{p}_1 = 1 - x, \quad \mathbf{p}_2 = 5 + 3x - 2x^2, \quad \mathbf{p}_3 = 1 + 3x - x^2$$

- 線性多項式方程式： $k_1p_1+k_2p_2+k_3p_3=0$
  - 物理意義：三個多項式的合成若為0，就是線性相關(相依)
  - 物理意義：三個多項式的合成若不為0，就是線性獨立
  - 若存在k使p合成0（k無限多解），則線性相依
  - 若不存在k使p合成0（k只有唯一0解），則線性獨立
- 代入多項式： $k_1(1-x)+k_2(5+3x-2x^2)+k_3(1+3x-x^2)=0$
- 以次方分類： $(k_1+5k_2+k_3)+(-k_1+3k_2+3k_3)x+(-2k_2-k_3)x^2=0$

判別線性獨立(2)：多項式

- 多項式方程式：

$$\mathbf{p}_1 = 1 - x, \quad \mathbf{p}_2 = 5 + 3x - 2x^2, \quad \mathbf{p}_3 = 1 + 3x - x^2$$

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + k_3 &= 0 \\ -k_1 + 3k_2 + 3k_3 &= 0 \\ - 2k_2 - k_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{\begin{matrix}1\\-1\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}5\\3\\-2\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\3\\-1\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \end{array}\right]$$

- <u>（1）行列式判別法：det(A) ≠0</u>，就是線性獨立
- <u>（2）簡化列梯形判別法：k除了只有唯一解(0, 0, 0)</u>就是線性獨立

範例5：判別多項式$p_1p_2p_3$是線性獨立或相依

- 以次方分類：$(k_1+5k_2+k_3)+(-k_1+3k_2+3k_3)x+(-2k_2-k_3)x^2=0$
- 多項式的係數=0

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + k_3 &= 0 \\ -k_1 + 3k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_2 - k_3 &= 0 \end{aligned}$$

- $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & \mathbf{0} \\ -1 & 3 & 3 & \mathbf{0} \\ 0 & -2 & -1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 8 & 4 & \mathbf{0} \\ 0 & -2 & -1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 2 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 2 & 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 2 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$
- K有無限多組解
- 表示多項式可以合成0
- 是線性相依

(page. 167)

```
簡化後的梯形Am= Matrix([[1, 0, -3/2], [0, 1, 1/2], [0, 0, 0]])
三個向量彼此線性相依
彼此線性獨立的行數m= (0, 1)
印出線性獨立的向量= Matrix([[1], [-1], [0]])
印出線性獨立的向量= Matrix([[5], [3], [-2]])
```

```
from sympy import *
A = Matrix(    [
           [1, 5 ,1],
          [-1, 3 ,3],
          [0, -2,-1] ])
A_reduced_form, inds  = A.rref()
print('簡化後的梯形Am=', A_reduced_form)
n = A.shape[1]
n_independent = len(inds)
if n == n_independent:
    print('三個向量彼此線性獨立')
else:
    print('三個向量彼此線性相依')
print('彼此線性獨立的行數m=', inds)
```

$$
\begin{aligned}
\boxed{k_1} &+ \boxed{5k_2} + k_3 = 0 \\
-k_1 &+ 3k_2 + 3k_3 = 0 \\
&- 2k_2 - k_3 = 0
\end{aligned}
$$

Python程式碼

7. 函數

判別函數$f_1f_2f_3$是線性獨立或線性相依

多項式，函數

- (1)多項式

$$\mathbf{p}_1 = 1 - x, \quad \mathbf{p}_2 = 5 + 3x - 2x^2, \quad \mathbf{p}_3 = 1 + 3x - x^2$$

- (2)函數

$$\mathbf{f}_1 = \sin^2 x, \quad \mathbf{f}_2 = \cos^2 x, \quad \text{and} \quad \mathbf{f}_3 = 5$$

判別線性獨立(3)：函數

- 證明：函數在F(−∞, ∞)區間為線性相依，(page. 172)

$$\mathbf{f}_1 = \sin^2 x, \quad \mathbf{f}_2 = \cos^2 x, \quad \text{and} \quad \mathbf{f}_3 = 5$$

- 測試：是否函數方程式： $k_1f_1+k_2f_2+k_3f_3$ 是否=0
- 結果發現：$5f_1+5f_2-f_3=0$

$$\begin{aligned} 5\mathbf{f}_1 + 5\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3 &= 5\sin^2 x + 5\cos^2 x - 5 \\ &= 5(\sin^2 x + \cos^2 x) - 5 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

- <u>所以是線性相依</u>

判別線性獨立(3)：函數

- 證明：函數在F(−∞, ∞)區間為線性相依或線性獨立

$$\mathbf{f}_1 = \sin^2 x, \quad \mathbf{f}_2 = \cos^2 x, \quad \text{and} \quad \mathbf{f}_3 = 5$$

- 但不是每個函數都可以一眼看出其合成是否為0
- 解決方法：朗斯基式（Wronskian）

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

朗斯基式（Wronskian）

- 證明過程：page. 172

$k_1f_1 + k_2f_2 + k_2f_3...=0$，則線性相依

一階微分……=0

二階微分……=0

三階微分……-0

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

朗斯基式(行列式)= $$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

朗斯基式（Wronskian）

- 證明過程：page. 172

$k_1f_1 + k_2f_2 + k_2f_3... = 0$

- 若朗斯基式(行列式)≠0，則函數$f_1f_2f_3$是線性獨立

det(A) ≠0

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

最精簡摘要：判別是否為線性獨立，線性相依

若存在一組(k1, k2, k3)使得 $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=(0,0,0)$，就是線性相依

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$$

(1) 線性獨立

- 如何判別是否為線性獨立？
- 方法1：det(A) $\neq 0$
- 方法2：簡化列梯形，必須只有唯一0解

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 線性相依

- 如何判別是否為線性相依？
- 方法1：det(A) $= 0$
- 方法2：簡化列梯形，必須有無限多解

範例10：判別函數是否為線性獨立(page. 173)

- 使用朗斯基式來證明 $f_1=1$, $f_2=e^x$, $f_3=e^{2x}$ 在 $C(-\infty, \infty)$ 區間中為線性獨立
- **判別式：**

$$W(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$$W(x)=\begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix}=2e^{3x}$$

→ 函數在 $(-\infty, \infty)$ 區間中並不完全為零，
所以 f1, f2, f3 可形成一線性獨立集合

重要

解聯立方程式的重點摘要

- 3. 計算聯立方程式的方法有四種：
  - (1). 高斯消去法
  - (2). Cramer’s rule克拉瑪法則
  - (3). 反矩陣法
  - (4). LU分解法