線性代數第9章

基底向量（basis）

基底轉換=坐標映射(coordinate map)

陳擎文老師

本章目標

實戰基底轉換，坐標映射
典型範例

挑戰：基底轉換典型範例

- 令$B_1=\{u_1, u_2\}$和$B_2=\{v_1, v_2\}$為R^2的基底，
- 其中$u_1=(1,2)$、$u_2=(2,3)$、$v_1=(1,3)$、$v_2=(1,4)$
  - 求轉移矩陣$P_{B2\to B1}$
  - 求轉移矩陣$P_{B1\to B2}$
  - 確認$P_{B2\to B1}$和$P_{B1\to B2}$互為反矩陣
  - 令$w=(1, 0)$，求$[w]_{B1}$，並利用轉移矩陣$P_{B1\to B2}$求$[w]_{B2}$
  - 令$w=(3, -3)$，求$[w]_{B2}$，並利用轉移矩陣$P_{B2\to B1}$求$[w]_{B1}$

碩士班考題

例 16： Let $\mathbf{B}=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$, $\mathbf{B}'=\left\{\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

(a)Find the transformation matrix $\mathbf{P}$ from $\mathbf{B}$ basis to basis $\mathbf{B}'$

(b)let $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}$, Find $[\mathbf{x}]_B$ and $[\mathbf{x}]_{B'}$ （台大電機）

重要

本章重點

計算轉移矩陣$P_{B' \to B}$有兩個方法

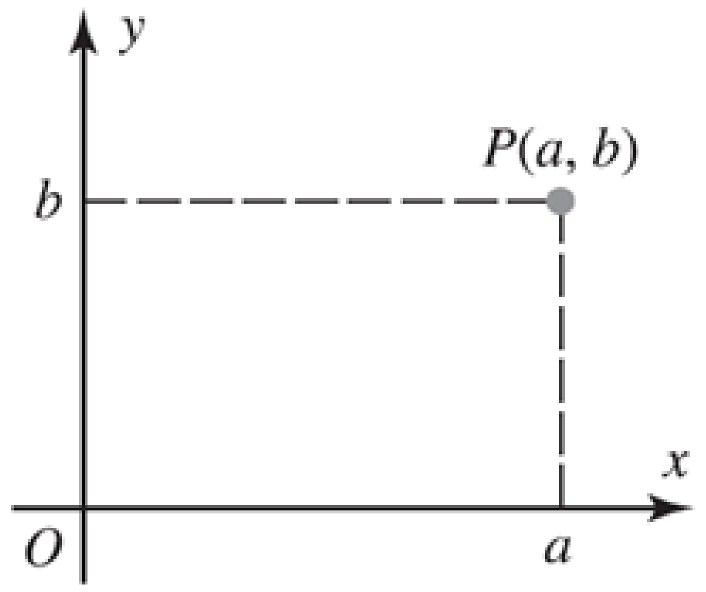
方法1：理解法

方法2：快速解法(交叉基底)

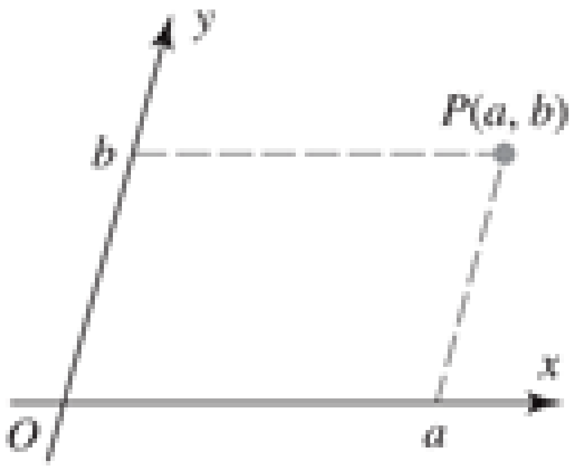
1. 兩個座標系統看同一個向量

兩個座標系統看同一個向量

- (page. 174)



以二維直角座標系統來表示 P 點

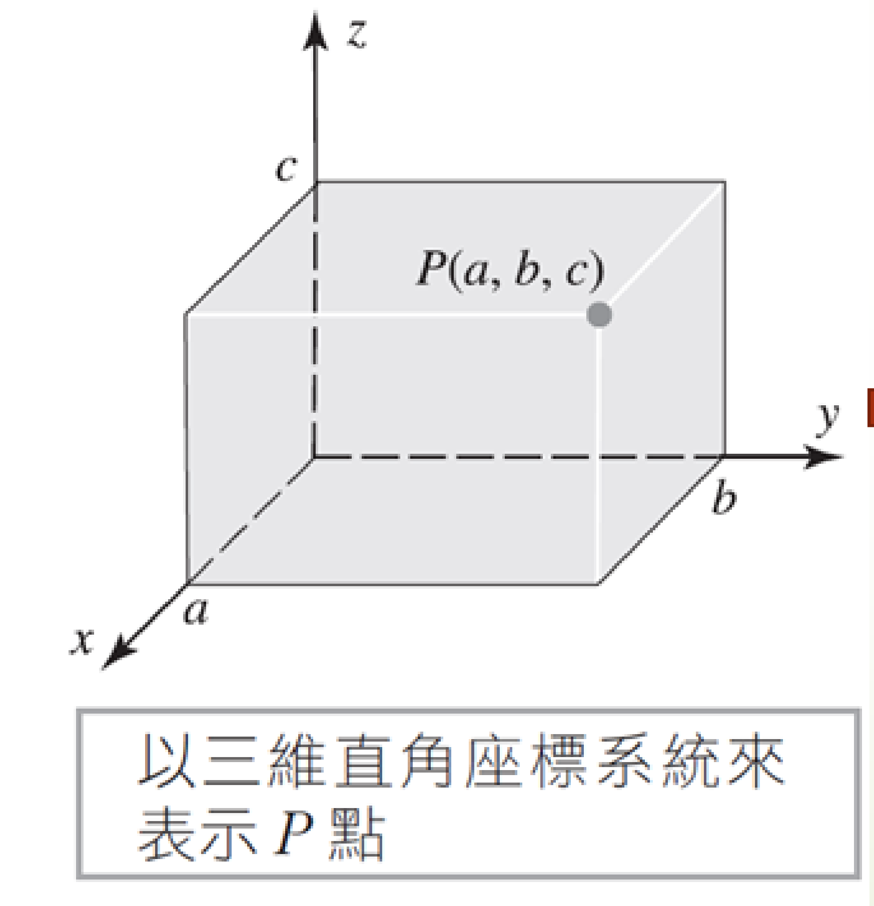


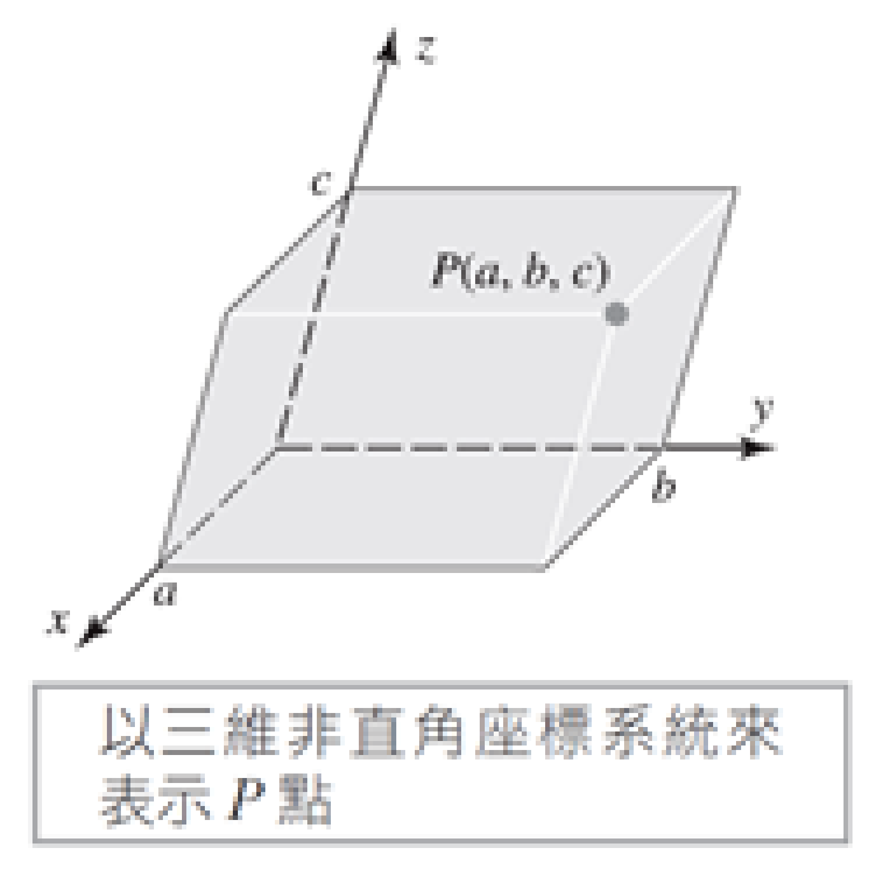
以二維非直角座標系統來表示 P 點

圖 4.4.2

兩個座標系統看同一個向量

- (page. 174)





2. 每個座標系統的基底向量 basis

基底向量

- (page. 175)

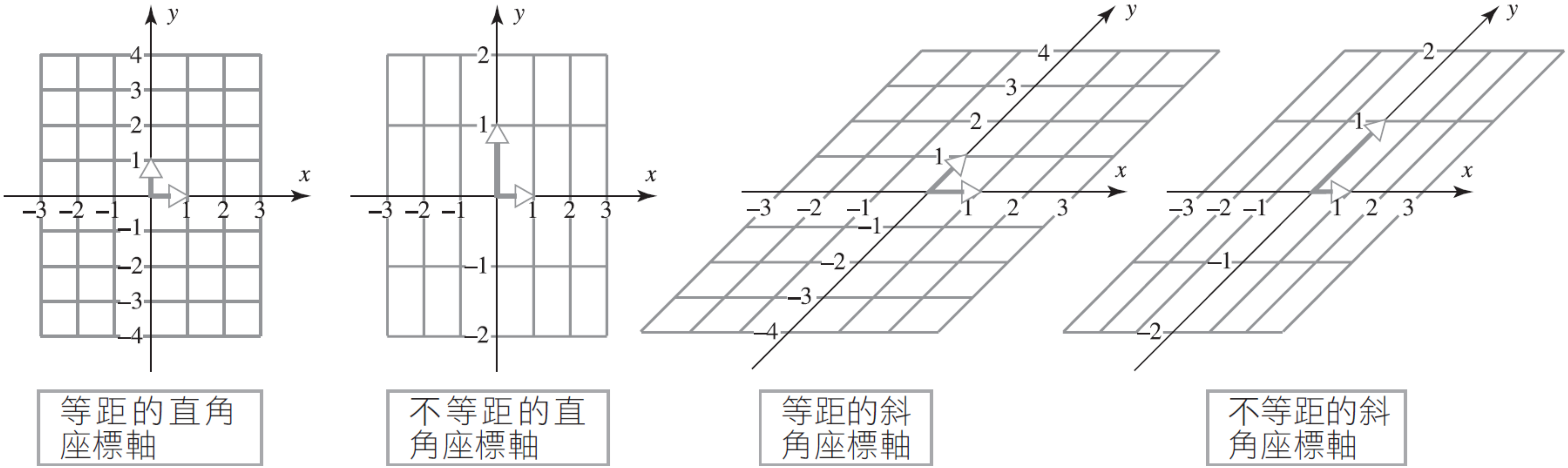


圖 4.4.4

基底向量的定義

- S 被稱為V的**基底**（basis）（page. 175）
  - $S=\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ 為V中向量所成的有限集合若V為任意向量空間
- S需以下兩條件成立：
  - (a) S 為線性獨立
  - (b) S 生成 V

範例1：R^n 的標準基底

- R^n 的標準基底（standard basis）　　(Page. 176)
- 標準單位向量：

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

  - 標準基底e1, e2..為線性獨立，可成為 R^n 空間

- 例如：R^3 的標準基底

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

範例3：證明$v_1v_2v_3$是R^3的基底

- 證明向量$v_1=(1, 2, 1)$, $v_2=(2, 9, 0)$和$v_3=(3, 3, 4)$可為 R^3 的基底　　(Page. 176)
- 必須是線性獨立，故$C_1v_1+C_2v_2+C_3v_3=0$，C除了0外無解
- c1+2c2+3c3=0
- 2c1+9c2+3c3=0
- c1+0c2+4c3=0
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= 0 \\ c_1 \qquad\quad + 4c_3 &= 0 \end{aligned}$$

範例3：證明$v_1v_2v_3$是R^3的基底

- $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 9 & 3\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c1\\ c2\\ c3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$ （page. 176）
  - 若存在c向量合成0（C有解），則線性相依
  - 若不存在C向量合成0（C無解），則線性獨立
  - det(A)=36+6+0-27-0+16≠0，有解
- $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 2 & 9 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -2 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & -0.4 & 0\\ 0 & -1 & 0.5 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & -0.4 & 0\\ 0 & 0 & 0.1 & 0\end{bmatrix}$
- $=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ 有唯一解，c1=c2=c3=0
- 所以，　$v_1v_2v_3$是線性獨立

```python
from sympy import *
A = Matrix(   [
        [1, 2 ,3],
        [2, 9 ,3],
        [1, 0,4]
  ])
A_reduced_form, inds  = A.rref()
print('簡化後的梯形Am=', A_reduced_form)
n = A.shape[1]
n_independent = len(inds)
if n == n_independent:
    print('三個向量彼此線性獨立')
else:
    print('三個向量彼此相依')
print('彼此線性獨立的行數m=', inds)
```

```
簡化後的梯形Am= Matrix([[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]])
三個向量彼此線性獨立
彼此線性獨立的行數m= (0, 1, 2)
印出線性獨立的向量= Matrix([[1], [2], [1]])
印出線性獨立的向量= Matrix([[2], [9], [0]])
印出線性獨立的向量= Matrix([[3], [3], [4]])
```

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}2\\9\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}3\\3\\4\end{matrix}} \end{bmatrix}$$

Python程式碼

範例4:用矩陣表示的標準基底M_{mn}

- 2x2 矩陣所成向量空間 M_{22} 的基底 (Page. 177)

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

座標與基底

- (1). 基底向量：若 $S=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$為向量空間$V$的基底
- $$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$ (Page. 180)
- (2). S 的座標(coordinates)：
  - 純量 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 稱為S 的座標
- (3). 座標向量：R^n 中的向量（$c_1, c_2, \ldots, c_n$）稱為v相對於基底 S 的座標向量（coordinate vector）

$$(\mathbf{v})_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

範例7：R^n中相對於標準基底的座標

- R^3 中向量 v=(a, b, c)以標準基底 S={i, j, k}的線性組合：

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

- 以標準基底的座標向量為
$(\mathrm{v})_S = (a, b, c)$

- (Page. 181)

3. 多項式P_n 系統的標準基底

範例2：多項式P_n 的標準基底

- 多項式P_n 的標準基底　　　(Page. 176)
- $S=\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$，為小於等於$n$次的多項式所成向量空間$P_n$的基底

$$\mathbf{p}_0 = 1, \quad \mathbf{p}_1 = x, \quad \mathbf{p}_2 = x^2, \ldots, \quad \mathbf{p}_n = x^n$$

4. 相對於某基底的坐標表示（座標向量轉換）

範例9：R^3 中相對於基底S的座標轉換

- (1)求v=(5, -1, 9)相對於基底$S=\{v_1, v_2, v_3\}$的座標向量=？

$v_1=(1, 2, 1)$，$v_2=(2, 9, 0)$，$v_3=(3, 3, 4)$

- (2)若某向量v相對於基底的坐標向量為 $(v)_S=(-1, 3, 2)$，試求v=？

(Page. 181)

重要

範例9：R^3 中的座標轉換

分析：

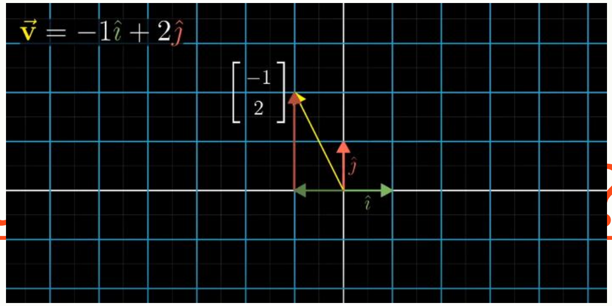
- 1. 這題不是問， $v=(5,-1,9)$被轉換矩陣轉換後，向量v會移動到什麼地方
- 2. 這題是問，同一個向量(不動)，在兩個座標系統，它們的座標分別應該是多少？
- 3. 兩個座標系統：
  - 座標系統1：直角座標系統，有個向量$v_{直角}=(5,-1,9)$
  - 座標系統2：S座標系統，請問向量v_S =？
- S座標基底$_{S\rightarrow 直角}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 9 & 3\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$ $v_1=(1,2,1), v_2=(2,9,0), v_3=(3,3,4)$

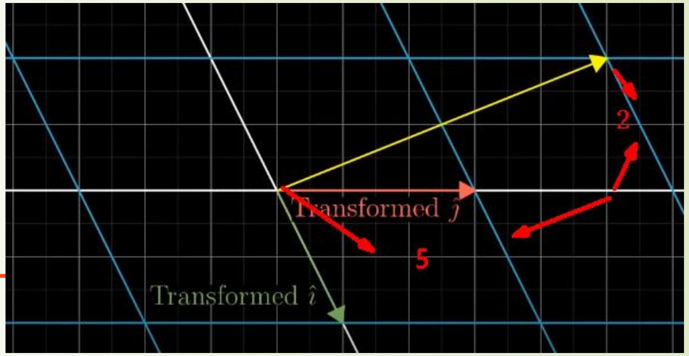
重要

座標轉換的題目有兩種問法

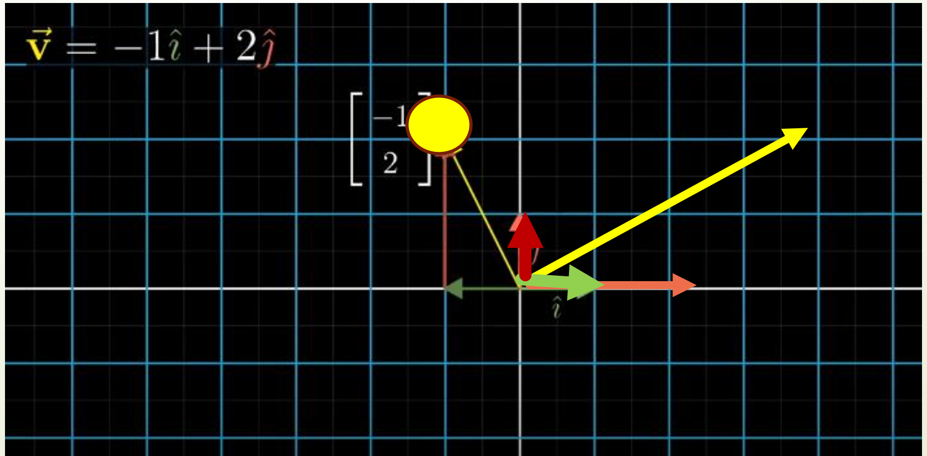
(1). 第一種：某點v，當坐標軸變形後，會跑到什麼地方？

- v=(-1, 2)被轉換矩陣轉換後，向量v會移動到什麼地方
- $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$
- https://www.you ?v=kYB8





- (2). 第二種：同一點向量v不動，但在兩個坐標系統來觀察，其坐標值為多少
- 第二種最常被問



5. 計算轉換矩陣
方法1：理解法

重要

範例9：R^3 中的座標轉換

分析：

- 3. 兩個座標系統：
  - 座標系統1：直角座標系統，有個向量$v_{直角}$ =(5, -1, 9)
  - 座標系統2：S座標系統，請問向量v_s = ?
- $[T]_{s\to 直角} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$
- 4. 兩個座標系統轉換關係：$[T]_{s\to 直角}[v_s]=[v_{直角}]$
- =解$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ v_{s3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$

求解v_s，
法1：解聯立方程式，
法2：反矩陣，解Vs

① 注意：$V = (5, -1, 9) = (V)_{直角}$

轉換矩陣

$$(V)_{直角} \underset{T_{S\to 直角}}{\overset{T_{直角\to S}}{\rightleftarrows}} (V)_S$$

② 2個坐標系統關係圖

③ 2個坐標系統關係式

$$(V)_S = T_{直角\to S} \cdot (V)_{直角} \qquad \boxed{S型}$$

$$(V)_{直角} = T_{S\to 直角} \cdot (V)_S \quad \checkmark$$

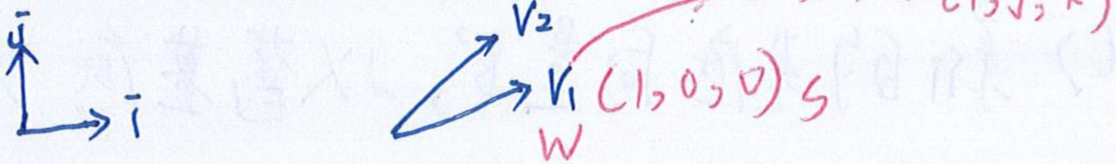
④ 已知：$(V)_{直角} = (5, -1, 9)$，

欲求 $(V)_S \Rightarrow \therefore$ 必須知道 $T_{S\to 直角}$.

⑤ 欲証明 $T_{S\to 直角} = \begin{bmatrix} [V_1] & [V_2] & [V_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

⑥ 範例証明：

直角坐標 $\Leftarrow$ S坐標



在S坐標上的坐標 $W(1,0,0)_S \longrightarrow$ 在直角坐標上是多少 $=(1,2,1)$

用數學表示轉換公式 $= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

⑦ 結論：若新基底 $S=\{V_1, V_2, V_3\}$，則 S→直角的轉換矩陣 $T_{S\to直角} = \left[[V_1]\,[V_2]\,[\right.$

⑧ $(V)_{直角} = T_{S\to直角} \cdot (V)_S$

$\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot (V)_S$，求 $(V)_S$

⑨ 要先判斷 $V_1\,V_2\,V_3$ 是否線性獨立 $\Rightarrow$ 方法：$\det(T) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \\ 1 & 0 \end{matrix} = -1$

∴是線性獨立.

⑩ 用行列式解 $(V)_{S_1} = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -1 & 9 & 3 \\ 9 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{\det(T)} = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -1 & 9 & 3 \\ 9 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 2 \\ -1 & 9 \\ 9 & 0 \end{matrix}}{-1} = 1$

$(V)_{S_2} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \\ 1 & 9 \end{matrix}}{-1} = -1$

$(V)_{S_3} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \\ 1 & 0 \end{matrix}}{-1} = 2$

背面

2. 範例 9-2 (p.181)

若某向量 V 相对於基底 S 的坐標向量為 $(V)_S=(-1,3,-2)$，求 R^3 中的 V.

注意:

① V 沒有下標，表 $V=V_{直角}$

② 2個坐標系統關係图 $(V)_{直角} \underset{T_{S\to直角}}{\overset{T_{直角\to S}}{\rightleftarrows}} (V)_S$

③ 2個坐標系統關係式

$$\begin{cases} (V_S)=T_{直角\to S}\cdot(V)_{直角} \\ (V)_{直角}=T_{S\to直角}\cdot(V)_S \end{cases}$$

④ 已知 $(V)_S=(-1,3,2)$

已知 $T_{S\to直角}=[V_1\,V_2\,V_3]=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&9&3\\1&0&4\end{bmatrix}$

⑤ $\therefore (V)_{直角}=T_{S\to直角}\cdot(V)_S=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&9&3\\1&0&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\31\\7\end{bmatrix}$ #

範例9：R^3 中相對於基底S的座標轉換

- 求v=(5, −1, 9)相對於基底S={v_1, v_2, v_3}的座標向量=？
  - v_1=(1, 2, 1), v_2=(2, 9, 0), v_3=(3, 3, 4)　　(Page. 181)
- 得 v=c1v_1+ c2v_1 +c3v_1 =(5, −1, 9)

$$(5, -1, 9) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$$

- 分拆三個分量：

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 5 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= -1 \\ c_1 \qquad\quad + 4c_3 &= 9 \end{aligned}$$

- 解 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}$

範例9：R^3 中的座標

- 解 $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&9&3\\1&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c1\\c2\\c3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-1\\9\end{bmatrix}$ （page. 181）
  - 若存在c向量合成0（C有解），則線性相依
  - 若不存在C向量合成0（C無解），則線性獨立
  - det(A)=36+6+0-27-0+16≠0，有解
- $\begin{bmatrix}1&2&3&5\\2&9&3&-1\\1&0&4&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&5\\0&5&-3&-11\\0&-2&1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&5\\0&1&-0.6&-2.2\\0&-1&0.5&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&5\\0&1&-0.6&-2.2\\0&0&-0.1&-0.2\end{bmatrix}$
- $=\begin{bmatrix}1&2&3&5\\0&1&-0.6&-2.2\\0&0&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&5\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\end{bmatrix}$
- 有唯一解，c1=1， c2=-1， c3=-2（這個是第一小題解答）

- 求 $v=(5, -1, 9)$ 相對於基底 $S=\{v_1, v_2, v_3\}$ 的座標向量
  - $v_1=(1, 2, 1)$, $v_2=(2, 9, 0)$, $v_3=(3, 3, 4)$ (Page. 181)

$$\boxed{(\mathbf{v})_S = (1, -1, 2)}$$

```
import numpy as np
A = np.array([
        [1,2,3],
        [2,9,3],
        [1,0,4]
        ])
#注意：y矩陣，是以row為單位
Y = np.array([
        [5],[-1],[9]
        ])
#計算行列式det(A)
AY= np.array([
        [2,3,5,],
        [9,3,-1],
        [0,4,9]
        ])
```

```
A_det = np.linalg.det(A)
AY_det = np.linalg.det(AY)
if A_det !=0: #有唯一解
    X = np.linalg.solve(A, Y)
    print(’方程式，有唯一解，X=\n’, X)
elif A_det ==0 and AY_det==0:
    print(’方程式，無限多解’)
elif A_det ==0 and AY_det !=0:
    print(’方程式，無解’)
```

```
方程式，有唯一解，X=
 [[ 1.]
 [-1.]
 [ 2.]]
```

(Page. 182)

- (2). 若某向量v相對於基底的坐標向量為 $(v)_s=(-1,3,2)$，試求v=？

，可得

$$\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$$
$$= (-1)(1,2,1) + 3(2,9,0) + 2(3,3,4) = (11,31,7)$$

範例8-1：多項式相對於標準基底的座標向量

- (1). 求多項式p(x)，相對於向量空間 P_n 標準基底S的座標$(\mathrm{p})_s$為？ (Page. 181)
- 已知p(x)：

$$\mathbf{p}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

- 對 p(x) 使用標準基底 S = $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$，多項式可得相對於S基底的座標向量為

$$(\mathbf{p})_S = (c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

為什麼多項式p(x)是使用標準基底S={1, x, $x^2, \ldots, x^n$}

$$\mathbf{p}_1 = 1 - x, \quad \mathbf{p}_2 = 5 + 3x - 2x^2, \quad \mathbf{p}_3 = 1 + 3x - x^2$$

- 代入多項式：

$$k_1(1 - x) + k_2(5 + 3x - 2x^2) + k_3(1 + 3x - x^2) = 0$$

- 以次方分類：

$$(k_1 + 5k_2 + k_3) + (-k_1 + 3k_2 + 3k_3)\boxed{x} + (-2k_2 - k_3)\boxed{x^2} =$$

- 多項式的係數=0

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + k_3 &= 0 \\ -k_1 + 3k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_2 - k_3 &= 0 \end{aligned}$$

- 所以，標準基底S={1, x, $x^2, \ldots, x^n$}

範例8-2：矩陣相對於標準基底的座標向量

- (1). 求矩陣向量 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 相對於向量空間 M22 標準基底S的座標$(B)_S$=？ (Page. 181)

- 以標準基底進行線性組合

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 相對於S基底，B的座標向量為

$$(B)_S = (a, b, c, d)$$

6. 基底轉換=座標映射

(coordinate map)

重要

以下介紹課本的

基底轉換

座標映射

(coordinate map)

線性代數的學習重點與探討主題

觀念

- 數學符號的意義

基礎

- 向量
- 行列式
- 聯立方程式
- 矩陣

主題

- 線性映射
- 坐標轉換
- 特徵向量

線性代數的學習重點

觀念	• 數學符號的意義
基礎	• 向量，張量 • 行列式 • 矩陣
主題	• 線性映射（坐標轉換） • 特徵向量，特徵值

線性代數的最後所要探討的主題

線性轉換 Linear transform	基底座標轉換 Basis vector transform
特徵向量 Eigen vector	特徵值 Eigen value

線性映射

重要

基底變換，座標映射

- 兩個座標系統：基底B ←→ 基底B' (page. 188)
- 若向量v在兩個系統的座標的關係式（$[v]_B$ <--> $[v]_{B'}$ ）
- 已知基底： $B=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$ 和 $B'=\{\mathbf{u}'_1,\mathbf{u}'_2\}$
- 已知：u_1' =(a, b)，u_2' =(c, d)
- 新的基底向量B’ ，以舊基底B來表示代數式

$$[\mathbf{u}'_1]_B=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} \quad \text{和} \quad [\mathbf{u}'_2]_B=\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}'_1=a\mathbf{u}_1+b\mathbf{u}_2$$
$$\mathbf{u}'_2=c\mathbf{u}_1+d\mathbf{u}_2$$

方法1：理解法

重要

- 兩個座標系統：基底B ←→ 基底B' (page. 188)
- 若向量v在兩個系統的座標的關係式（$[\mathrm{v}]_B$ <--> $[\mathrm{v}]_{B'}$ ）
- 已知基底： $B=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$ 和 $B'=\{\mathbf{u}'_1,\mathbf{u}'_2\}$
- 已知： $[\mathbf{u}'_1]_B=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 和 $[\mathbf{u}'_2]_B=\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$
- 新基底向量B' ，以舊基底B來表示, 轉移矩陣P $P=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$
- **關鍵概念**： $[P]_{B'\to B} = \begin{bmatrix} (u'_1)_{B'\to B} & (u'_2)_{B'\to B} \end{bmatrix}$

已知 $u_1'=(a,b)_B$ $\Rightarrow$ 根據 $P_{S\to 舊}=[[V_1][V_2][V_3]]$

$u_2'=(c,d)_B$ 所以 $P_{B'\to B}=[[u_1']_B, [u_2']_B, [u_3']_B]=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

重要

若在新座標的向量 $[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$，請問在舊座標為？

- 已經新的基底B' ，與舊基底B的關係(page. 188)

$$[\mathbf{u}_1']_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad [\mathbf{u}_2']_B = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_1' = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2$$
$$\mathbf{u}_2' = c\mathbf{u}_1 + d\mathbf{u}_2$$

- 所以 $\mathbf{v} = k_1\mathbf{u}_1' + k_2\mathbf{u}_2' \longrightarrow \mathbf{v} = k_1(a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2) + k_2(c\mathbf{u}_1 + d\mathbf{u}_2)$

$$\mathbf{v} = (k_1 a + k_2 c)\mathbf{u}_1 + (k_1 b + k_2 d)\mathbf{u}_2$$

- 得到 $[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} k_1 a + k_2 c \\ k_1 b + k_2 d \end{bmatrix} \longrightarrow [\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} [\mathbf{v}]_{B'}$

- 公式：$[\mathbf{v}]_B = P[\mathbf{v}]_{B'}$

$P = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ P就是轉移矩陣

重要

在新座標的向量 $[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$，請問在舊座標為？

- $[\mathbf{v}]_B = P[\mathbf{v}]_{B'}$

$P = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ P就是轉移矩陣

- 在新座標的向量 $[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$，請問在舊座標為？

- 座標轉換結果：

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

-

(page. 188)

☆兩個坐標系統＝基底 $B \to$ 基底 B'，若向量 V 在兩個系統的坐標關係式

$([V]_B \longleftrightarrow [V]_{B'})$ 已知基底：$B\{u_1, u_2\}$ 和 $B' = \{u'_1, u'_2\}$

已知：$u'_1 = (a, b)$，$u'_2 = (c, d)$ 新的基底向量 B'，以舊基底 B 來表示代數式

$[u'_1]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 和 $[u'_2]_B = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ (1) 求 $P_{B' \to B}$ 転移矩陣 $u'_1 = a u_1 + b u_2$

$u'_2 = c u_1 + d u_2$

3. ① 2個坐標關係圖＝$(V)_B \underset{P_{B' \to B}}{\overset{P_{B \to B'}}{\rightleftarrows}} (V)_{B'}$

② 2個坐標關係式 $\begin{bmatrix} (V)_{B'} = P_{B \to B'} \cdot (V)_B \\ (V)_B = P_{B' \to B} \cdot (V)_B \end{bmatrix}$

③ 已知 $(u'_1)_B = (a, b)B$ 根據前面所述 $P_{S \to 直角} = [[V_1][V_2][V_3]]$

$(u'_2)_B = (c, d)B$ ∴ $P_{B' \to B} = [(u'_1)_B, [u'_2]_B [u'_3]_B] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

④ 請問若在新坐標的向量 $(V)_{B'} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$，在舊坐標為？ $(V)_B = ?$

根據公式＝$(V)_B = P_{B' \to B} \cdot (V)_{B'}$，已知 $P_{B' \to B} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 已知 $(V)_{B'} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$

7. 轉移矩陣
transition matrix

轉移矩陣P

- 從B'到B的**轉移矩陣**(transition matrix)，為了強調通常記作 $P_{B' \to B}$

$$P_{B' \to B} = \left[[\mathbf{u}_1']_B \mid [\mathbf{u}_2']_B \mid \cdots \mid [\mathbf{u}_n']_B\right]$$

- 從B到B'的轉移矩陣

$$P_{B \to B'} = \left[[\mathbf{u}_1]_{B'} \mid [\mathbf{u}_2]_{B'} \mid \cdots \mid [\mathbf{u}_n]_{B'}\right]$$

重要

範例1：計算轉移矩陣P

- 有兩個座標： $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ 和 $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ *(page. 190)*
- 座標基底： $\mathbf{u}_1 = (1, 0),\quad \mathbf{u}_2 = (0, 1),\quad \mathbf{u}'_1 = (1, 1),\quad \mathbf{u}'_2 = (2, 1)$
- 請計算轉移矩陣P
  - (a) 求 B' 到 B 的轉移矩陣 $P_{B' \to B}$
  - (b) 求 B 到 B' 的轉移矩陣 $P_{B \to B'}$

範例1：計算轉移矩陣P

- (a) 求 B' 到 B 的轉移矩陣 $P_{B' \to B}$ (page. 190)
- 已經知道 $\mathbf{u}_1' = (1, 1), \quad \mathbf{u}_2' = (2, 1)$

$$\mathbf{u}_1' = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$
$$\mathbf{u}_2' = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

- 轉換矩陣 $P_{B' \to B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$[\mathbf{u}_1']_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 且 $[\mathbf{u}_2']_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$P_{B' \to B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

重要

範例1：計算轉移矩陣P（1）

- (b) 求 B 到 B' 的轉移矩陣 $P_{B \to B'}$ （page. 190）
- 已經知道 $\mathbf{u}'_1 = (1, 1), \quad \mathbf{u}'_2 = (2, 1)$ ➡ $\mathbf{u}'_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}'_2 = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$

$$\mathbf{u}_1 = \boxed{-\mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2}$$
$$\mathbf{u}_2 = \boxed{2\mathbf{u}'_1 - \mathbf{u}'_2}$$

- 方法1：

$$[\mathbf{u}_1]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 且 \quad [\mathbf{u}_2]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- 轉換矩陣 $P_{B \to B'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$P_{B \to B'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

重要

範例1：計算轉移矩陣P(2)反矩陣

- (b) 求 B 到 B' 的轉移矩陣 $P_{B \to B'}$ (page. 190)
- 已經知道:轉換矩陣$P_{B'\to B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ➡
- 方法2：逆轉：反矩陣=$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$
- 轉換矩陣$P_{B\to B'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

8. 座標轉換後的新座標

基底變換

- 若對於 V 中的每一向量 v，經過座標轉換後的新座標是

$$[\mathbf{v}]_B = P_{B' \to B}[\mathbf{v}]_{B'}$$

$$[\mathbf{v}]_{B'} = P_{B \to B'}[\mathbf{v}]_B$$

-

(page. 191)

重要

範例2：算某向量在另外座標系統的表示

- 有兩個座標： $B=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ 和 $B'=\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ （page. 191）
- 座標基底： $\mathbf{u}_1=(1,0), \quad \mathbf{u}_2=(0,1), \quad \mathbf{u}'_1=(1,1), \quad \mathbf{u}'_2=(2,1)$
- 請計算 $[\mathbf{v}]_{B'}=\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$ 在另外一個座標的表示 $[\mathbf{v}]_B$

重要

範例2：算某向量在另外座標系統的表示

- 有兩個座標：$B=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ 和 $B'=\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ (page. 191)
- 座標基底：$\mathbf{u}_1=(1,0), \quad \mathbf{u}_2=(0,1), \quad \mathbf{u}'_1=(1,1), \quad \mathbf{u}'_2=(2,1)$
- 請計算 $[\mathbf{v}]_{B'}=\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$ 在另外一個座標的表示$[\mathbf{v}]_B$
- $[\mathbf{v}]_B = P_{B'\to B}\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}_{B'} = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$
- $=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}$

9. 轉移矩陣與反矩陣的乘積=I

$$P'P=I$$

$$AA^{-1}=I$$

兩個轉移矩陣$P'P$互為可逆

- 從B'到B的**轉移矩陣**(transition matrix)，為了強調通常記作 $P_{B'\to B}$ (page. 191)

$$P_{B'\to B} = \big[[\mathbf{u}'_1]_B \mid [\mathbf{u}'_2]_B \mid \cdots \mid [\mathbf{u}'_n]_B\big]$$

- 從B到B'的轉移矩陣

$$P_{B\to B'} = \big[[\mathbf{u}_1]_{B'} \mid [\mathbf{u}_2]_{B'} \mid \cdots \mid [\mathbf{u}_n]_{B'}\big]$$

- 兩個轉移矩陣$P'P$互為可逆 $(P_{B'\to B})(P_{B\to B'}) = I$
- 範例1：

$$(P_{B'\to B})(P_{B\to B'}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

重要

10. 計算轉移矩陣
方法2：快速解法

重要

計算 $P_{B\to B'}$ 的步驟

- (1)課本的4步驟解法（太麻煩）
  - 步驟 1、形成矩陣 $[B' \mid B]$。 (page. 192)
  - 步驟 2、用初階行操作以減少矩陣步驟 1 而簡化行階梯形式。
  - 步驟 3、所得的矩陣將是 $[I \mid P_{B\to B'}]$。
  - 步驟 4、從步驟 3 的右側矩陣提取矩陣的 $P_{B\to B'}$。

計算 $P_{B \to B'}$ 的快速解法

- (2)快速解法：**計算交叉基底**
  - **求 B' 到 B 的轉移矩陣 $P_{B' \to B}$**
  - 公式：
  - $P_{B' \to B}$

[B 基底 | B' 基底] = [新基底 | 舊基底] = $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

範例3：計算轉移矩陣P

- 有兩個座標： $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ 和 $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ *(page. 192)*
- 座標基底： $\mathbf{u}_1 = (1, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1), \quad \mathbf{u}'_1 = (1, 1), \quad \mathbf{u}'_2 = (2, 1)$
- **(a) 求 B' 到 B 的轉移矩陣 $P_{B' \to B}$**
- 公式：

$$\boxed{[\,新基底 \mid 舊基底\,] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]}$$

因為左邊已經是單位矩陣，不需要再進行化簡了，可發現轉移矩陣為

$$P_{B' \to B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

重要

範例3：計算轉移矩陣P

- 有兩個座標：$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ 和 $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ (page. 192)
- 座標基底：$\mathbf{u}_1 = (1, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1), \quad \mathbf{u}'_1 = (1, 1), \quad \mathbf{u}'_2 = (2, 1)$
- (b) 求 B 到 B' 的轉移矩陣 $P_{B \to B'}$

$$[\text{新基底} \mid \text{舊基底}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

化簡此矩陣使左邊為單位矩陣，得

$$[I \mid \text{舊到新的轉移}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

- 的轉移矩陣 $P_{B \to B'}$ $\quad P_{B \to B'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

4. 範例3. (p.192)　使用方法2：快速解法

有兩個座標：$B=\{u_1,u_2\}$ 和 $B'=\{u'_1,u'_2\}$

座標基底：$u_1=(1,0)$，$u_2=(0,1)$，$u'_1=(1,1)$，$u'_2=(2,1)$

(1) 求 B' 到 B 的轉移矩陣 $P_{B'\to B}$　(交叉基底法)

① 根據快速公式 $P_{B'\to B}=[B\text{基底} \mid B'\text{基底}]$

計算簡化列梯形 $=\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&1&2\\0&1&1&1\end{array}\right]$

$\therefore P_{B'\to B}=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$ ※

(2) 求 B 到 B' 的轉移矩陣 $P_{B\to B'}$

根據公式交叉基底 $P_{B\to B'}$

$=\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right]$ $\times(-1)$

(2) 求 B 到 B' 的轉移矩陣 $P_{B\to B'}$

根據公式交叉基底 $P_{B\to B'}$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \times(-1)$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \times(-1)$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \times(-2)$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\therefore P_{B\to B'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} ※$$

(3) 證明：$P_{B'\to B} \cdot P_{B\to B'} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，彼此為反矩陣

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2, & 2-2 \\ -1+1, & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ※$$

故 $P_{B'\to B}$ 與 $P_{B\to B'}$，彼此為反矩陣。

範例9：使用方法2快速解法(交叉基底)
重新計算p. 181的範例9

- (1)求v=(5, -1, 9)相對於基底$S=\{v_1, v_2, v_3\}$的座標向量=？

  $v_1=(1, 2, 1)$，$v_2=(2, 9, 0)$，$v_3=(3, 3, 4)$

- (2)若某向量v相對於基底的坐標向量為$(v)_S=(-1, 3, 2)$，試求v=？

(Page. 181)

5. 範例 9 (p.181) 使用方法 2：交叉基底法

沒標註就是直角

(1) 求 $v=(5,-1,9)$ 相对於基底 $S=\{v_1, v_2, v_3\}$ 的座標向量 = ?

$v_1=(1,2,1)$ $v_2=(2,9,0)$ $v_3=(3,3,4)$

① 注意：v 沒有下標 $\Rightarrow v=v_{直角}$

② 2 個坐標系統 関係圖 $(v)_{直角} \underset{P_{S\to 直角}}{\overset{P_{直角\to S}}{\rightleftarrows}} (v)_S$

③ 2 個 坐標系統 関係式

$(v)_S = P_{直角\to S} \cdot (v)_{直角}$

$(v)_{直角} = P_{S\to 直角} \cdot (v)_S$

使用大 S 曲線 驗証公式正確性。

④ 已知 $(V)_{直角}=(5,-1,9)$，欲求 $(V)_S$

根据公式：$(V)_S = P_{直直\to S}\cdot(V)_{直角}$

∴必须算 $P_{直角\Rightarrow S}$

⑤ 根据交叉基底快速法：$P_{直角\to S}$

计算简化列梯形

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

⑤根據交叉基底法: $P_{\text{直角}\to 5} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 9 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 9 & -5 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -2 & -5 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -36 & 8 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -2 & -5 \end{array}\right]$$

$$\left(\det(P_{\text{直角}\to 5}) = \left|\begin{array}{ccc|cc} -36 & 8 & 21 & -36 & 8 \\ 5 & -1 & -3 & 5 & -1 \\ 9 & -2 & -5 & 9 & -2 \end{array}\right| = -1\right)$$

$$V_5 = \begin{bmatrix} -36 & 8 & 21 \\ 5 & -1 & -3 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -180-8+189 \\ 25+1-27 \\ 45+2-45 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \#$$

重要

11. 實戰基底轉換，坐標映射的典型範例

重要

實戰練習題：基底轉換

- 令$B_1 = \{u_1, u_2\}$和$B_2 = \{v_1, v_2\}$為R^2的基底，
- 其中$u_1=(1,2)$、$u_2=(2,3)$、$v_1=(1,3)$、$v_2=(1,4)$
  - 求轉移矩陣$P_{B2\to B1}$
  - 求轉移矩陣$P_{B1\to B2}$
  - 確認$P_{B2\to B1}$和$P_{B1\to B2}$互為反矩陣
  - 令w＝(1, 0)，求$[w]_{B1}$，並利用轉移矩陣$P_{B1\to B2}$求$[w]_{B2}$
  - 令w＝(3, －3)，求$[w]_{B2}$，並利用轉移矩陣$P_{B2\to B1}$求$[w]_{B1}$

(1)計算：轉移矩陣$P_{B2\to B1}$

- (1). $P_{B2\to B1}$
- B1 B2
- $\left[\begin{matrix}1 & 2\\2 & 3\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}1 & 1\\3 & 4\end{matrix}\right] = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\0 & -1 & 1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 5\\0 & -1 & 1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 5\\0 & 1 & -1 & -2\end{bmatrix}$
- $P_{B2\to B1} = \begin{bmatrix}3 & 5\\-1 & -2\end{bmatrix}$

(2)計算：轉移矩陣$P_{B1\to B2}$

- $(2).\ P_{B1\to B2}$
- B2 B1
- $\boxed{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}}\boxed{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 1 & -1 & -3\end{bmatrix}$
- $P_{B1\to B2} = \begin{bmatrix}2 & 5\\ -1 & -3\end{bmatrix}$

(3) 令w=(1,0)，求$[w]_{B1}$

- (1). $P_{直角\to B1}$
- B1 直角
- $\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\2 & 3 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\0 & -1 & -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -3 & 2\\0 & -1 & -2 & 1\end{bmatrix}$
- $=\begin{bmatrix}1 & 0 & -3 & 2\\0 & 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$
- $P_{直角\to B1}=\begin{bmatrix}-3 & 2\\2 & -1\end{bmatrix}$
- $[w]_{B1}=\begin{bmatrix}-3 & 2\\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$

（4）w=(1, 0)，求$[\mathrm{w}]_{B1}$，再用轉移矩陣$P_{B1\to B2}$求$[\mathrm{w}]_{B2}$

- (2). $[\mathrm{w}]_{B1}=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\ 2\end{bmatrix}$
- 前面已經計算得知：$P_{B1\to B2}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ -1 & -3\end{bmatrix}$
- $[\mathrm{w}]_{B2}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -3\end{bmatrix}$

（5）令w=(3, −3)，求$[w]_{B2}$

- (1). $P_{直角\rightarrow B2}$
- B1 ← 直角（B2： v_1 = (1, 3)、v_2 = (1, 4)）
- $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$
- $P_{直角\rightarrow B2} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$
- $$[w]_{B2} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -12 \end{bmatrix}$$

(6) 令w=(3, -3)，求$[w]_{B2}$，並利用轉移矩陣 $P_{B2\to B1}$求$[w]_{B1}$

- (1). $[w]_{B2}=\begin{bmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\ -12\end{bmatrix}$
- $P_{B2\to B1}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -1 & -2\end{bmatrix}$
- (2). 求$[w]_{B1}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}15\\ -12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-15\\ 9\end{bmatrix}$

解答

(d) If $\mathbf{w} = (1, 0)$, $\mathbf{w}_{B_1} = (-3, 2)$, so $\mathbf{w}_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

(e) If $\mathbf{w} = (3, -3)$, $\mathbf{w}_{B_2} = (15, -12)$, so $\mathbf{w}_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 9 \end{pmatrix}$.

碩士班考題

例 16： Let $\mathbf{B}=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$, $\mathbf{B}'=\left\{\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

(a)Find the transformation matrix $\mathbf{P}$ from $\mathbf{B}$ basis to basis $\mathbf{B}'$

(b)let $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}$, Find $[\mathbf{x}]_B$ and $[\mathbf{x}]_{B'}$ （台大電機）

碩士班考題

$$(a)\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{P}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-3&1&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}$$

$$(b)\mathbf{x}=\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$=-2\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\therefore [\mathbf{x}]_B=\begin{bmatrix}-1\\3\\3\end{bmatrix},\ [\mathbf{x}]_{B'}=\begin{bmatrix}-2\\-3\\-1\end{bmatrix}$$

重要

12. 結論：

計算轉移矩陣$P_{B' \to B}$有兩個方法

方法1：理解法

方法2：快速解法

方法1：理解法

根據 $P_{S\to 直角} = [[v_1][v_2][v_3]]$

所以 $P_{B'\to B} = [[u_1']_B, [u_2']_B, [$

求v=(5, -1, 9)相對於基底S={v_1, v_2, v_3

v_1=(1, 2, 1), v_2=(2, 9, 0), $v_{3s\text{->}直角}$=(3, 3, 4)

- 解：
- (1). 兩個座標系統轉換關係：$[T]_{s\to 直角}[v_s]=[v_{直角}]$
- (2)因為基底S={v_1, v_2, v_3}的$v_{1..}$是S相對於直角坐標的
- 所以 $[T]_{s\to 直角} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & \mathbf{3} \\ 1 & 0 & \mathbf{4} \end{bmatrix}$
- 關鍵概念：$[P]_{s\to 直角} = \begin{bmatrix} (v_1)_{s\text{->}直角} & (v_2)_{s\text{->}直角} & (v_3)_{s\text{->}直角} \end{bmatrix}$

重要

方法1：理解法

- 兩個座標系統：基底B ←→ 基底B' (page. 188)
- 若向量v在兩個系統的座標的關係式 ($[v]_B$ <--> $[v]_{B'}$)
- 已知基底：$B=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$ 和 $B'=\{\mathbf{u}'_1,\mathbf{u}'_2\}$
- 已知：$[\mathbf{u}'_1]_B=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ 和 $[\mathbf{u}'_2]_B=\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$
- 新基底向量B' ，以舊基底B來表示, 轉移矩陣P $P=\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}$
- **關鍵概念**：$[P]_{B'->B}=\left[(u'1)_{B'->B}\quad(u'2)_{B'->B}\right]$

已知 $u_1'=(a,b)_B$ $\Rightarrow$ 根據 $P_{S\to 舊}=[[V_1][V_2][V_3]]$

$u_2'=(c,d)_B$ 所以 $P_{B'\to B}=[[U_1']_B,[U_2']_B,[U_3']_B]=\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}$

重要

方法2：計算 $P_{B\to B'}$ 的快速解法

- (2)快速解法：計算交叉基底
  - 求 B' 到 B 的轉移矩陣 $P_{B'\to B}$
  - 公式：
  - $P_{B'\to B}$

[B 基底 | B' 基底] =

[新基底 | 舊基底] = $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

快速公式 $P_{B'\to B}$ = [B基底 | B'基底]

簡化列梯形 = $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

根據公式交叉基底 $P_{B\to B'}$

$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$