chp1：線性代數的本質：向量是什麼？

陳擎文老師

線性代數的學習重點與探討主題

觀念
- 數學符號的意義

基礎
- 向量
- 行列式
- 聯立方程式
- 矩陣

主題
- 線性映射
- 坐標轉換
- 特徵向量

線性代數授課的兩條線

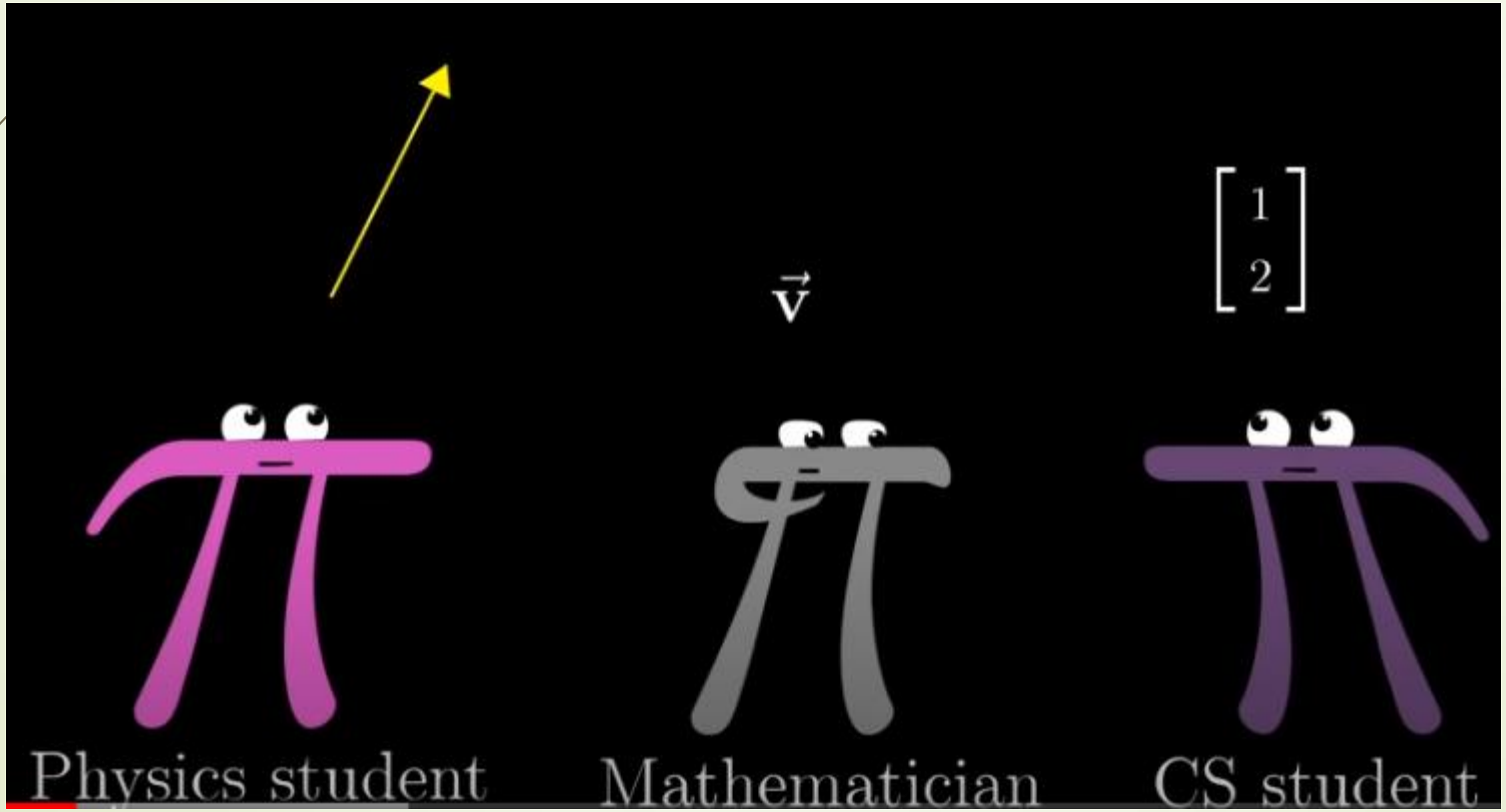
- (1). 了解線性代數的本質
  - 了解其背後的物理意義
  - 了解關鍵重點
- (2). 學習如何計算
  - 了解數學的定義，公式，定理，證明
  - 練習計算

參考資料

- https://www.youtube.com/watch?v=fNk_zzaMoSs&list=PLZHQObOWTQDPD3MizzM2xVFitgF8hE_ab&index=1

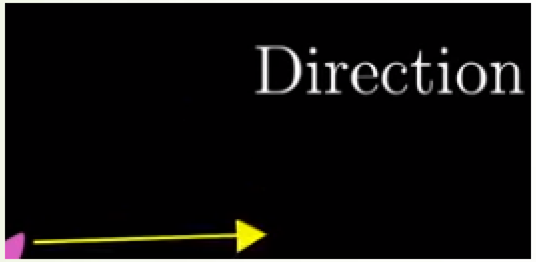
不同領域看待向量的角度

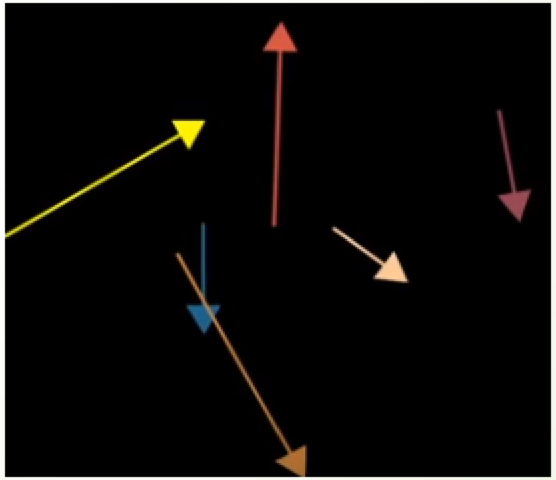
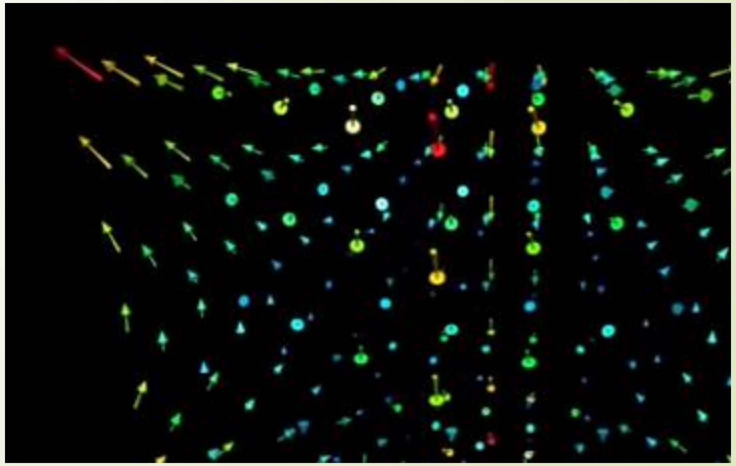
- 向量，vector
- 物理系，數學系，資訊系



物理系看向量vector

- 向量：是空間上的箭頭arrow
  - 向量 = 長度 + 方向
  - 2D向量，3D向量



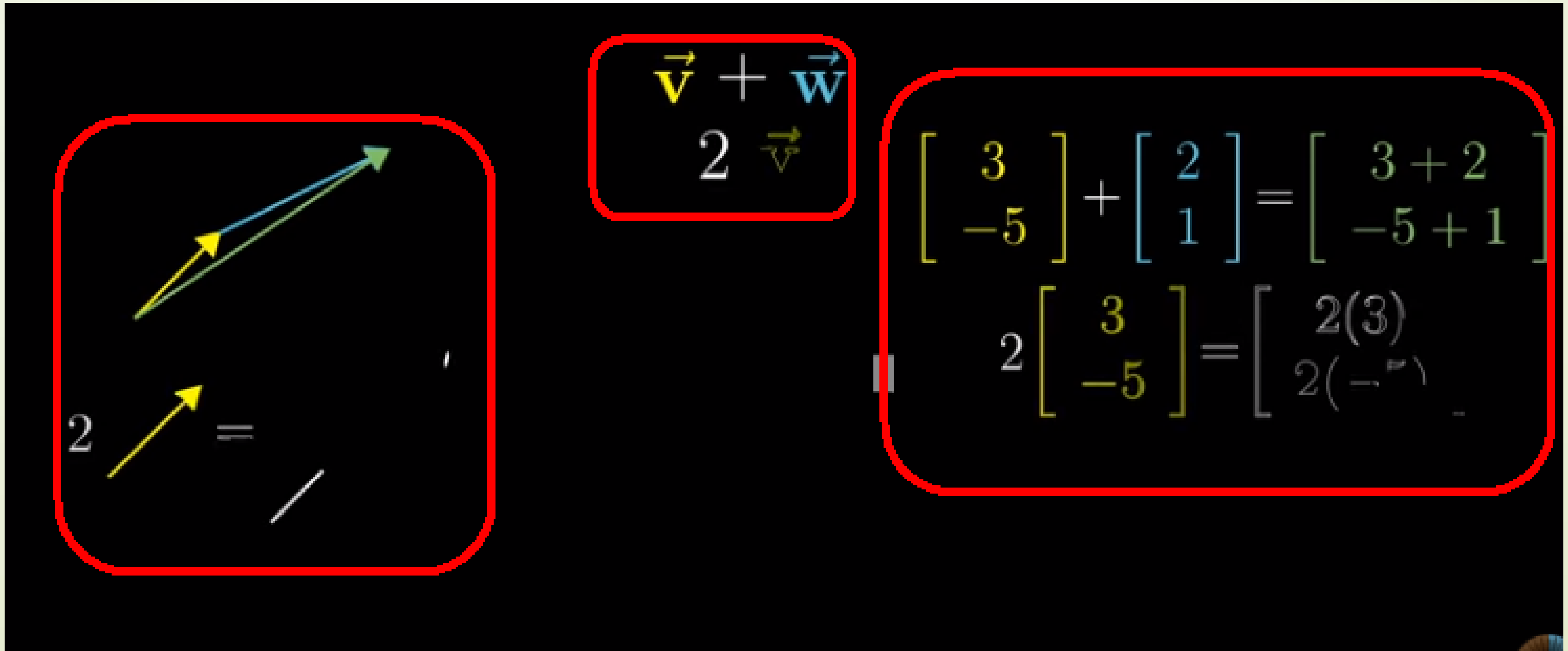
資訊系看向量vector

- 向量：是有序列的數據組合
  - 就是，（矩陣）
  - 二維矩陣，三維矩陣

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2.3 \\ -7.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

數學系看向量vector

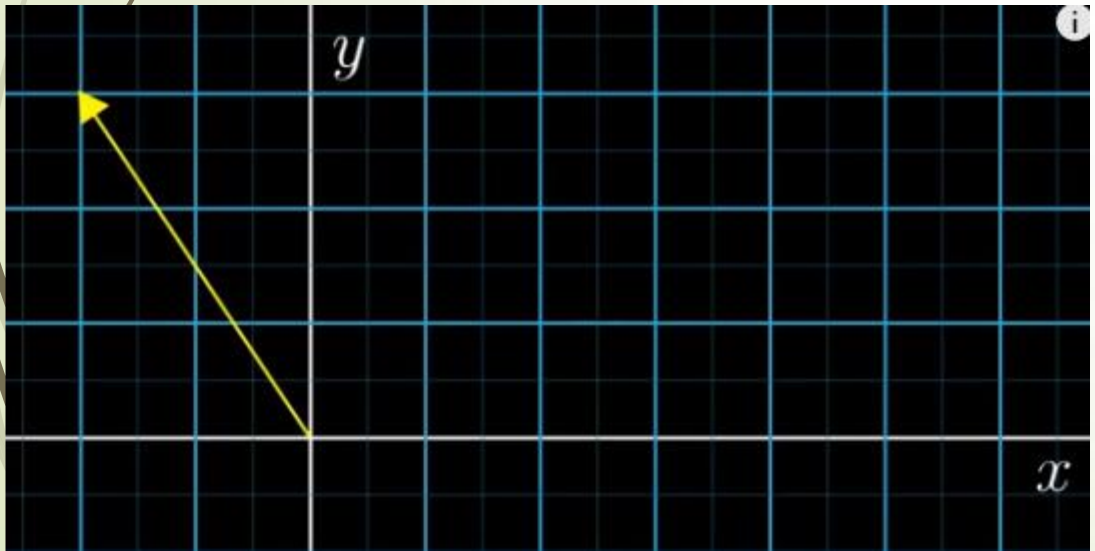
- 希望能夠定義一個通式，能夠符合所有可能（物理系，資訊系）
- 因為是通式，所以就會很抽象，模擬兩可，包天包地
  - 向量：可以是任何內容，只要兩個向量相加，或乘以係數，都是有意義數

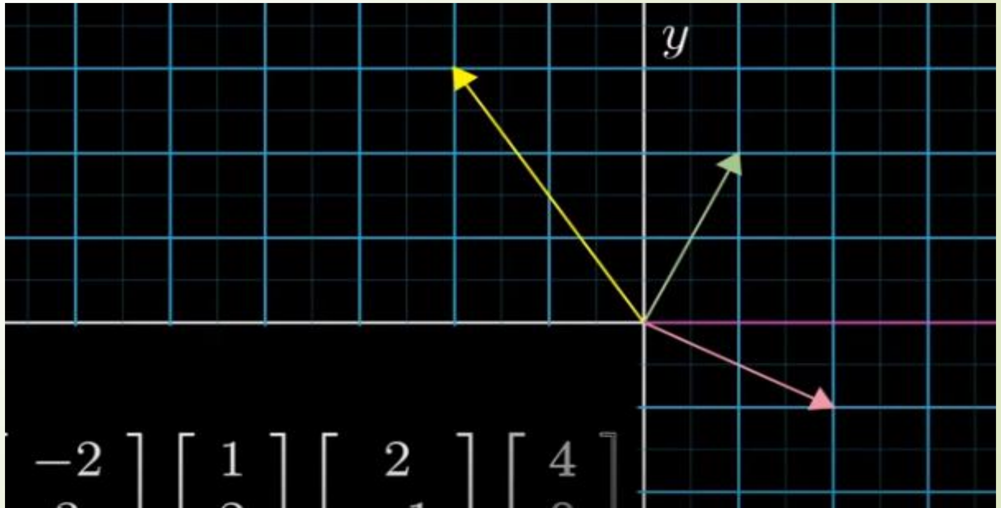


線性代數的向量與物理系的不同

- 物理的向量：是空間上任何箭頭，可以到處平移
- 線性代數的向量：
  - 由原點(0, 0)出發的箭頭
  - 每個箭頭都可以用矩陣數字表示(1, 2) = $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

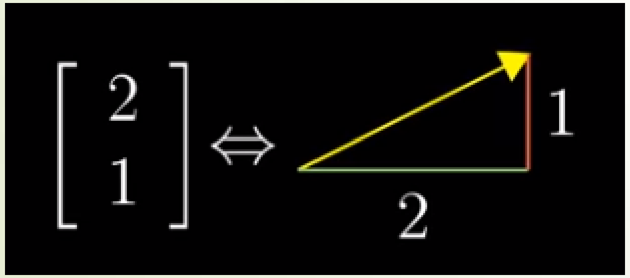
$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

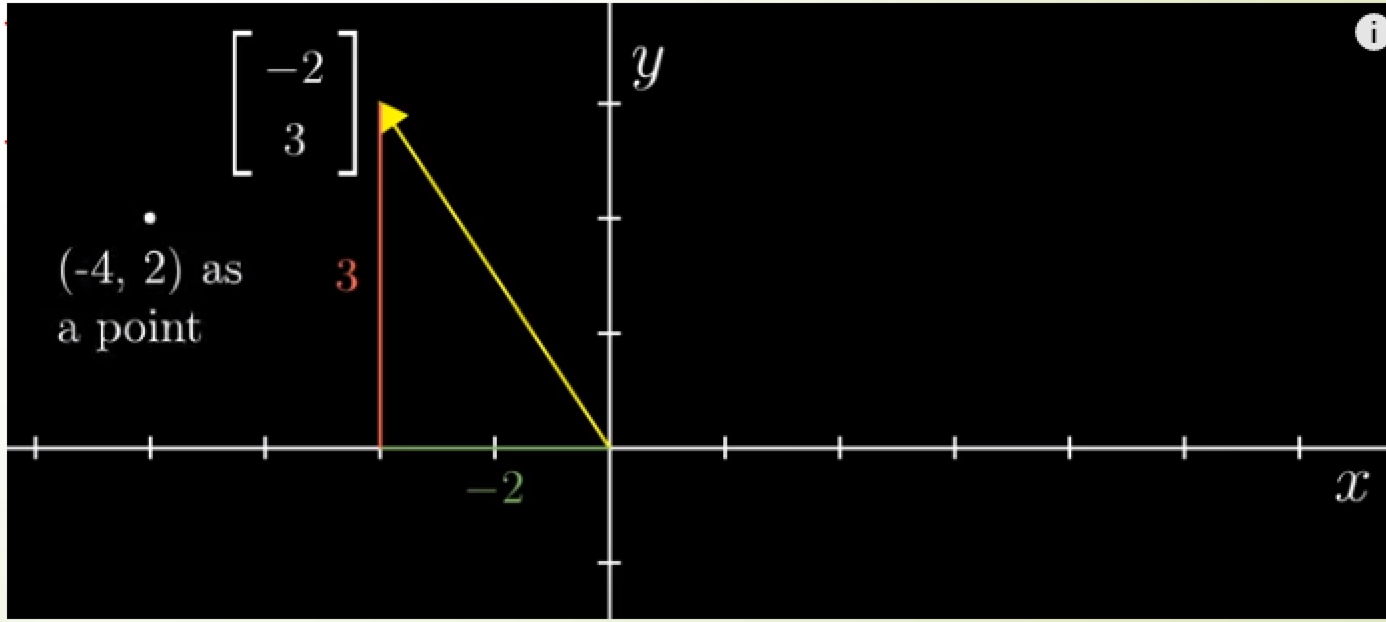




線性代數的2維向量

- 空間上的某一點p位置（由原點到p的箭頭）
- 向量v = 的表示法有二種：
  - (1). 點坐標表示法(1, 2)
  - (2). 矩陣表示法= $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$



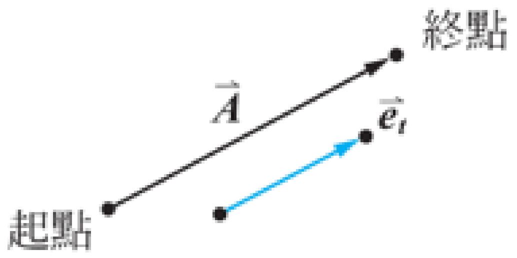


n維實數向量

- 一、定義與性質

1. 何謂向量

凡是具有大小與方向的量稱為向量

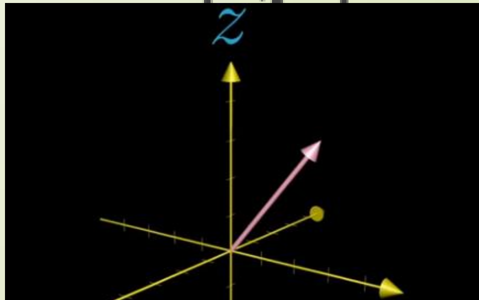


若$|\vec{A}|$表示$\vec{A}$的大小，$\vec{e}_t$表示$\vec{A}$所指的方向，

則 $\vec{A}=|\vec{A}|\vec{e}_t$ 。

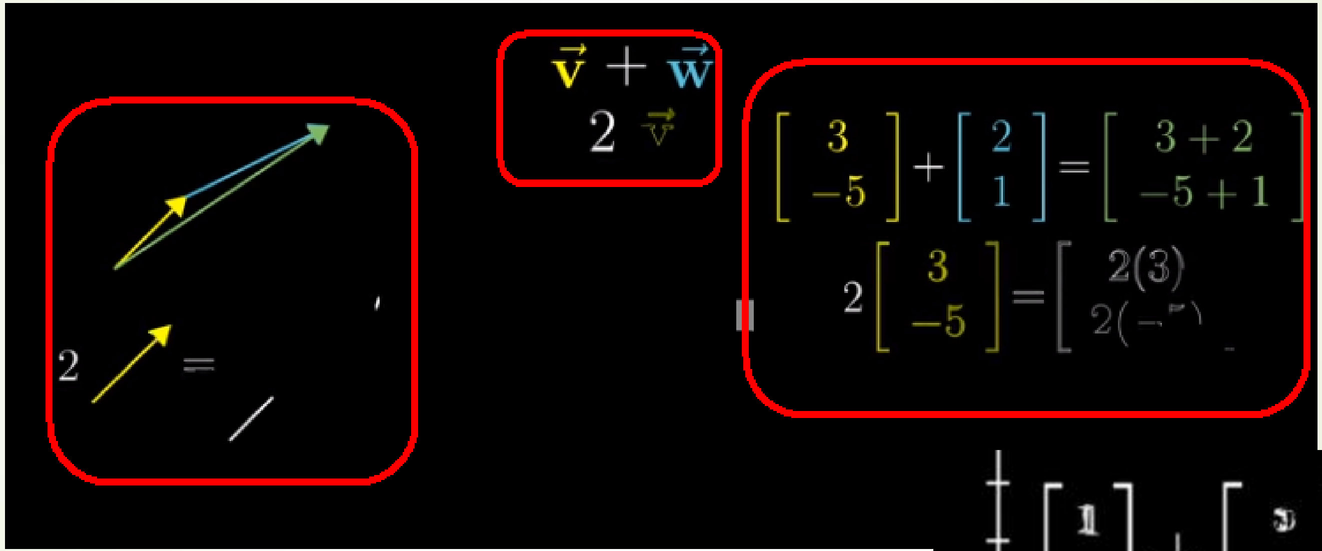
- 3維向量 = v =點坐標表示法$(-1,\ -3,\ 1)$ = 矩陣表示法 $\begin{bmatrix}-1\\-3\\1\end{bmatrix}$

- n維向量 = v = $(x_1, x2, ..\ xn)$ = $\begin{bmatrix}x1\\x2\\\vdots\end{bmatrix}$

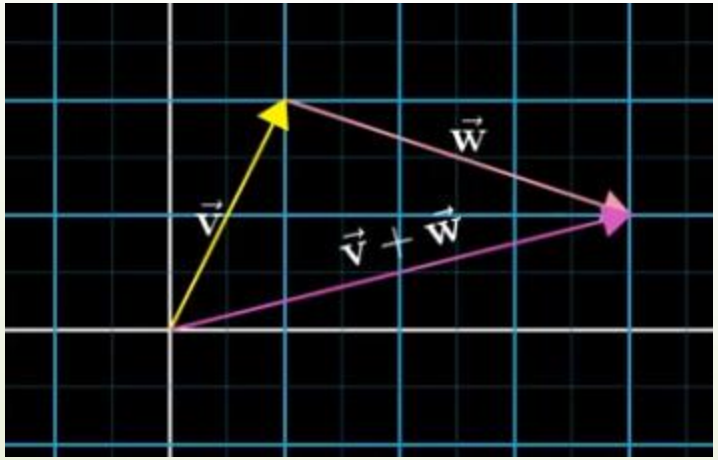


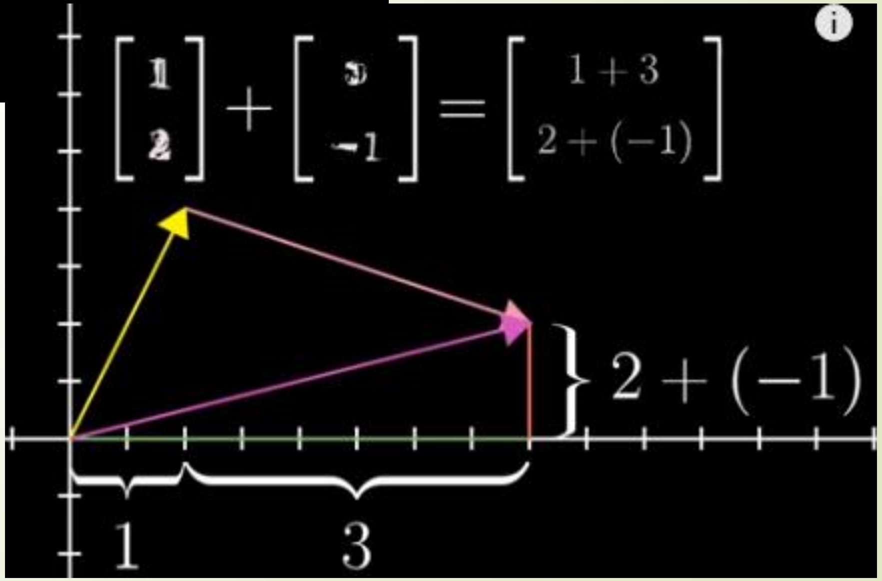
何謂線性代數的『線性』？

- 1.必須符合addition**合成率**＋scaling乘以係數的**縮放率**



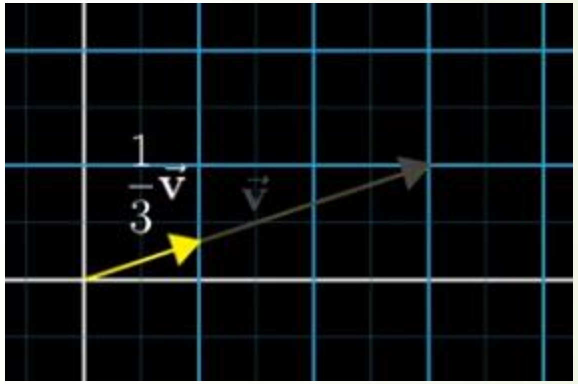
- **可合成：**



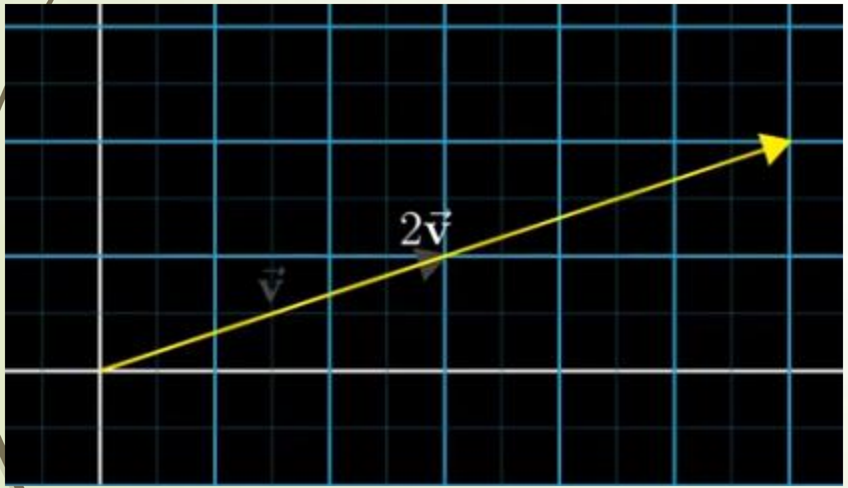


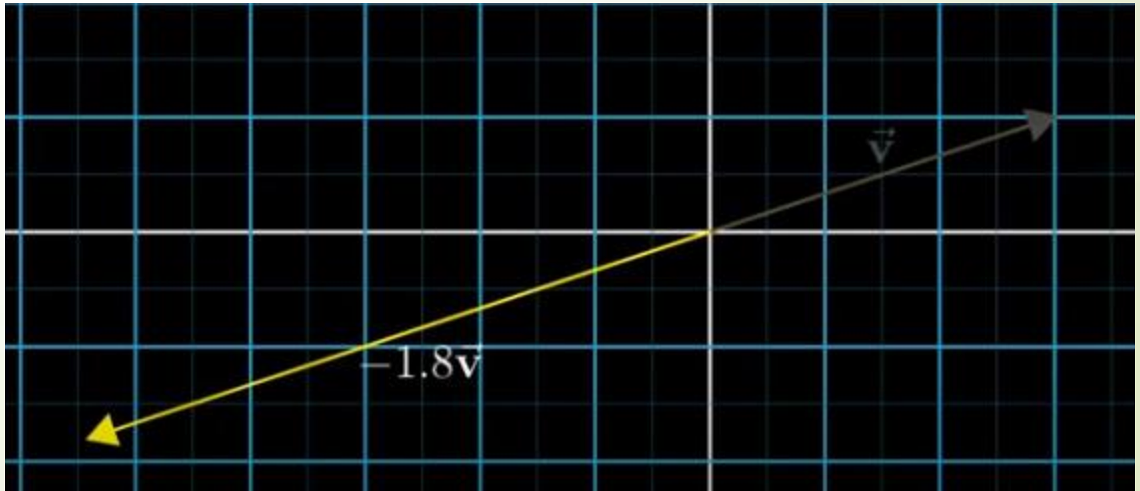
何謂線性代數的『線性』？

- 必須符合addition**合成率**＋scaling乘以係數的**縮放率**
- **2. 可自由縮放**
  - **Scaling = 純量乘法**
  - Scalar = 純量



$$2\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x\\2y\end{bmatrix}$$





廣義的線性代數

- 因為只要符合addition**可合成**＋scaling乘以係數的**可縮放**，就是線性代數
- 所以，符合這個規律的，**就不只是向量，矩陣而已**
- **函數f(x)若符合，也可以用線性代數來處理**
  - 例如：**量子物理的波動函數**
- 所以課表的符號寫法很抽象，就要包天包地，什麼都可以處理

向量的摘要重點-1

- 1. 向量的表示法有四種：
  - (1). 幾何向量（箭頭表示）
  - (2). 點座標表示：v=(3, 5)
  - (3). 矩陣表示：v=$\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$
  - (4). 所有平行箭頭（沒有通過原點）

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$$

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$$

- 2. 向量運算，有四種：
  - 向量加法
  - 向量減法
  - 向量係數乘法
  - 向量乘積

向量的摘要重點-2

- 3. 列向量，行向量
  - (1). 列向量：$\begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}$
  - (2). 行向量：$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$
- 4. R^n =所有nx1向量所構成的集合
  - 二維向量空間=所有$\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix}$形成的集合= $\mathbb{R}^2$
  - 三維向量空間：
  - ...
  - n 維向量空間：

$\mathbb{R}^2$ $\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix}$

向量的摘要重點

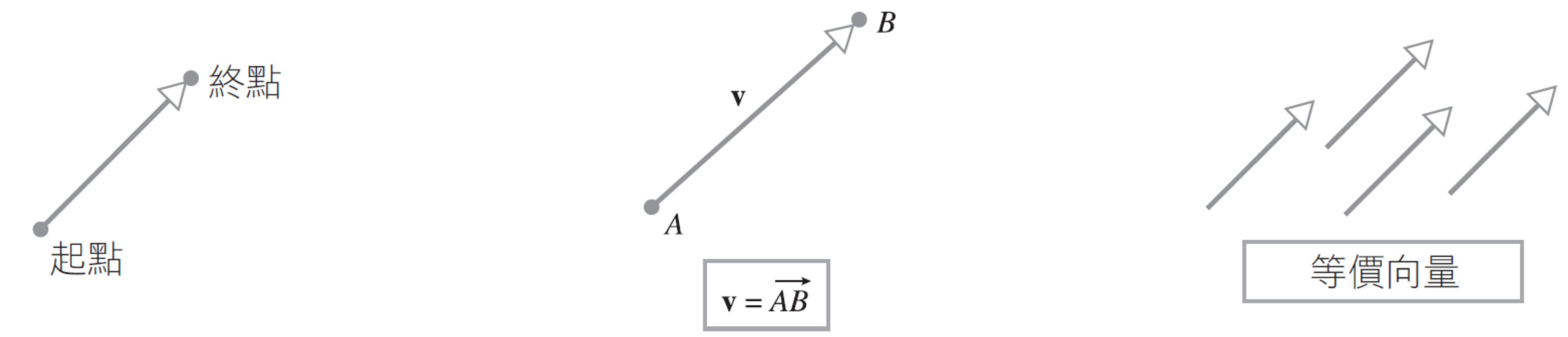
- 5. 各種類型的向量集合：
  - (1). 點向量=v=(3, 5)=$\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$
  - (2). 線向量集合=$\left\{c\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\middle|\, c\text{為任意實數}\right\}$，y=x直線
  - (3). 軸向量集合=$\left\{c\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\middle|\, c\text{為任意實數}\right\}$，x軸
  - (4). 平面集合=$\left\{c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\middle|\, c_1c_2\text{為任意實數}\right\}$ $\mathbb{R}^2$
  - (5). 空間集合=$\left\{c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\middle|\, c_1c_2c_3\text{為任意實數}\right\}$ $\mathbb{R}^3$

幾何向量（箭頭表示）

幾何向量(page. 112)

- 若欲表示起點為 A、終點為 B 的向量：

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$$



➲ 圖 3.1.1　➲ 圖 3.1.2　➲ 圖 3.1.3

起點不在原點之向量

起點不在原點之向量(page. 116)

- 有時必須考慮起點不在原點之向量$\overrightarrow{P_1P_2}$，表示向量的起點在 $P_1(x_1, y_1)$、終點在 $P_2(x_2, y_2)$，此向量的各分量為

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \tag{4}$$

- 在三維空間中，起點為 $P_1(x_1, y_1, z_1)$、終點為 $P_2(x_2, y_2, z_2)$的向量為

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \tag{5}$$