chp10：線性代數的本質：外積

陳擎文老師

線性代數的學習重點與探討主題

觀念
- 數學符號的意義

基礎
- 向量
- 矩陣
- 聯立方程式
- 行列式

主題
- 線性映射
- 坐標轉換
- 特徵向量

線性代數的學習重點

觀念

- 數學符號的意義

基礎

- 向量，張量
- 3D矩陣
- 行列式
- 聯立方程式

- 矩陣乘法
- 反矩陣
- 行空間，rank，零空間
- 非方陣的矩陣轉換

- 內積
- 外積

主題

- 線性映射
- 坐標轉換
- 特徵向量，特徵值

線性代數授課的兩條線

- (1). 了解線性代數的本質
  - 了解其背後的物理意義
  - 了解關鍵重點
- (2). 學習如何計算
  - 了解數學的定義，公式，定理，證明
  - 練習計算

參考資料

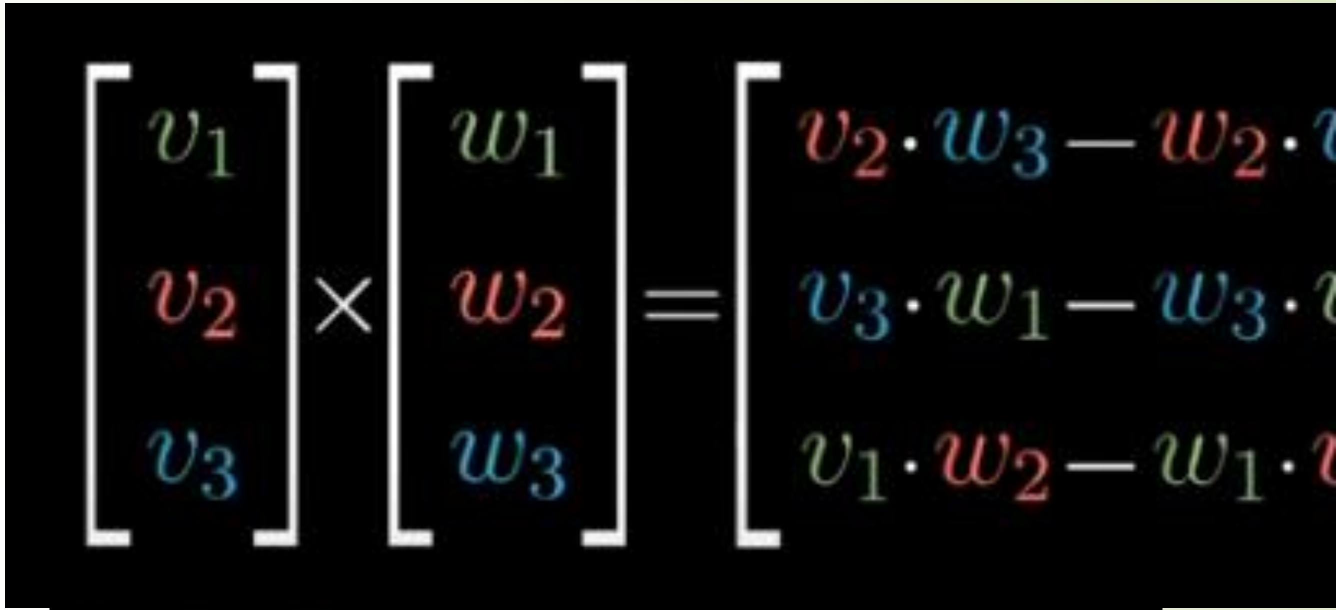
- https://www.youtube.com/watch?v=eu6i7WJeinw

探討主題

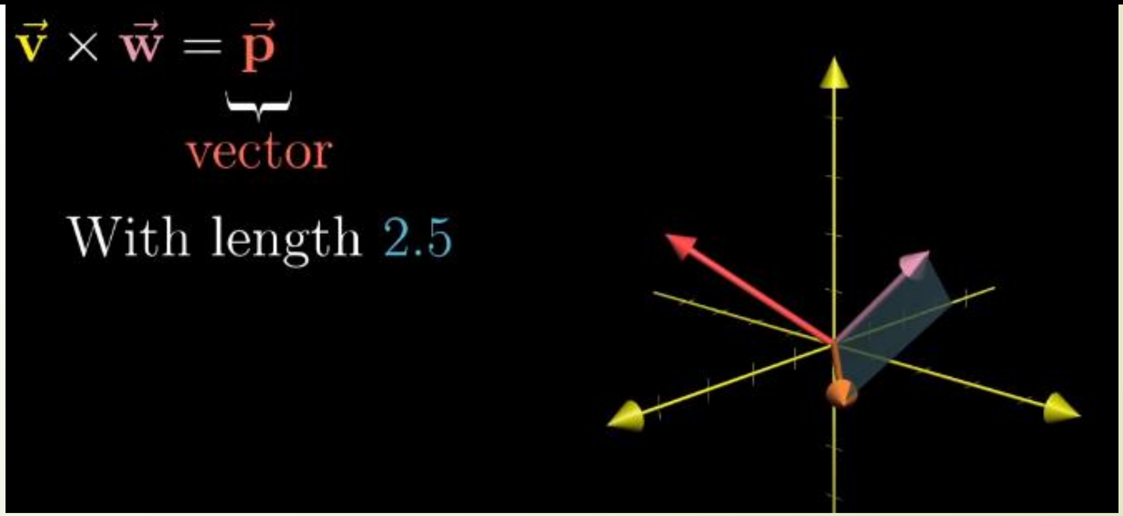
- 外積(cross product)

外積的算法

- 外積的算法

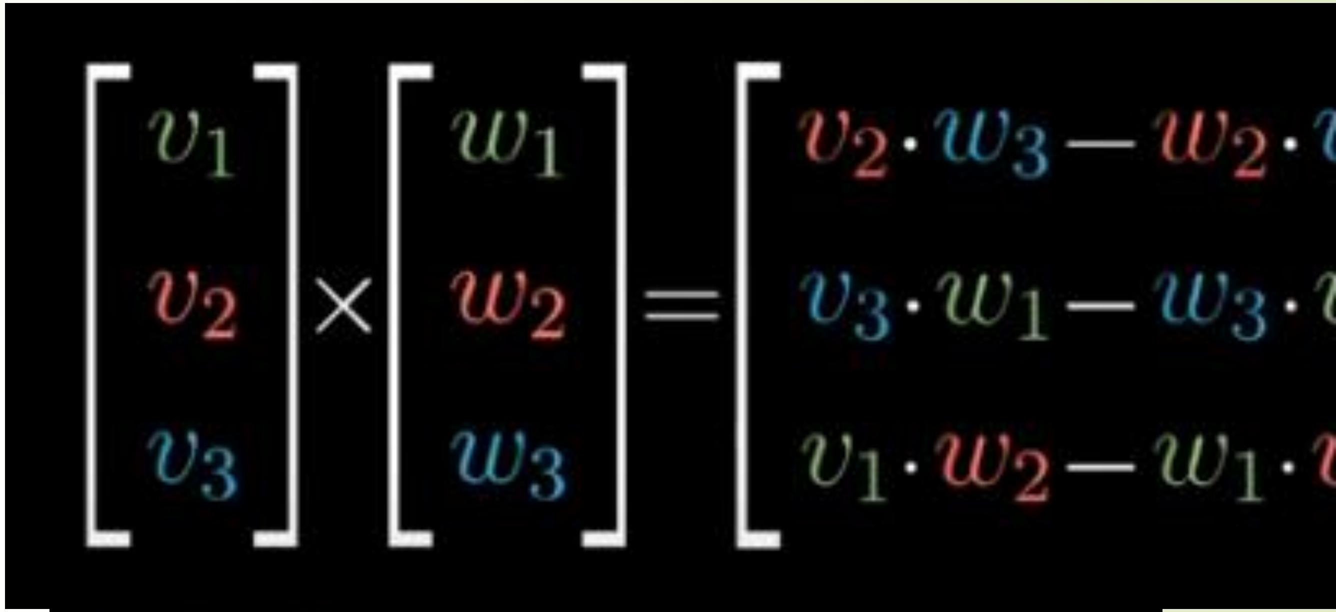


- 外積的結果是個向量

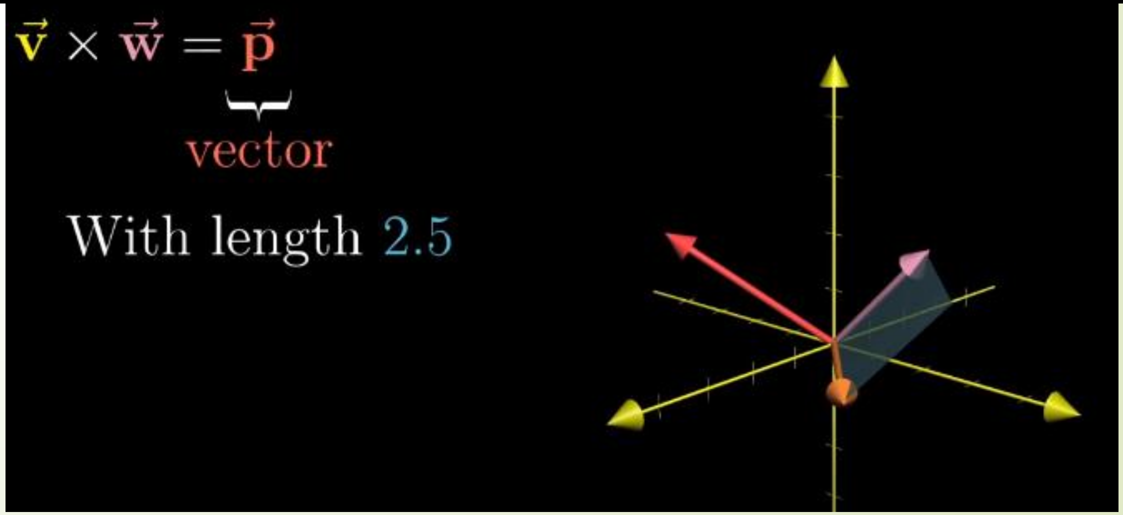


外積的算法

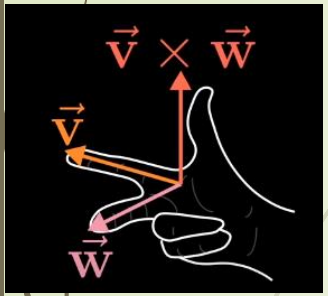
- 外積的算法



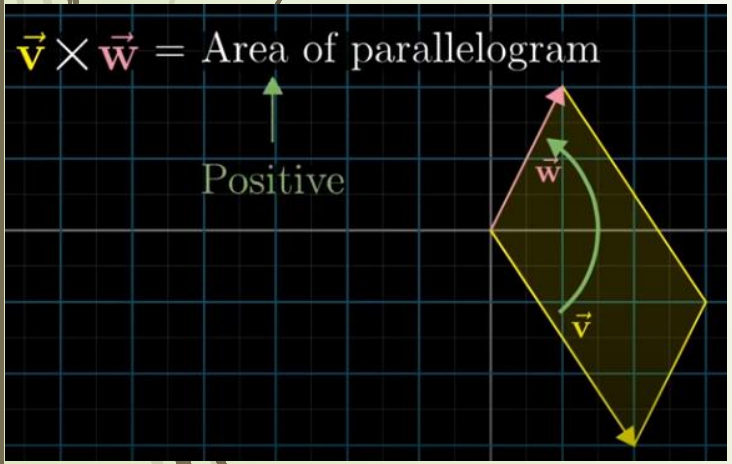
- 外積的結果是個向量

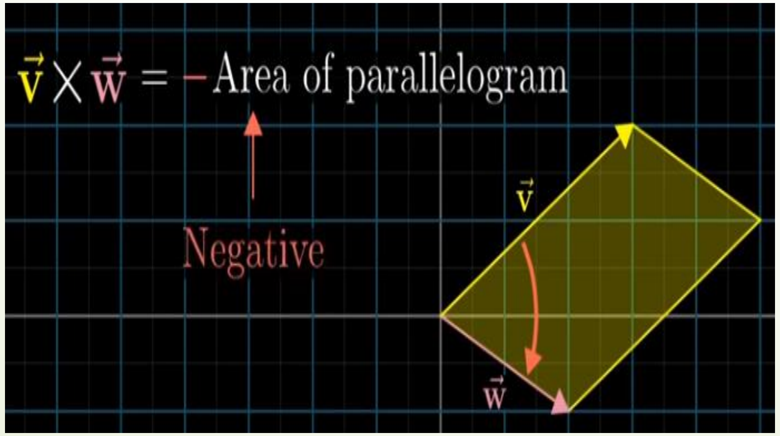


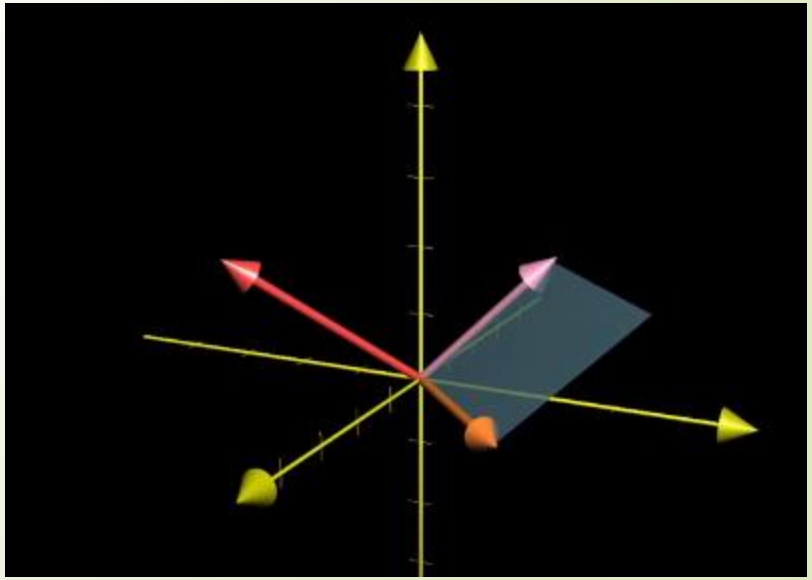
外積(cross product)的物理意義(1)



- $\vec{v} x \vec{w}$=向量
  - 其長度值：vw形成的平行四邊形面積，若v在w右邊，為正值
  - 其方向：方向垂直平行四邊形，長度值為面積
  - 方向：可以用右手定則，左手定則判定
- $\vec{v} x \vec{w}$=vw形成的平行四邊形面積，若w在v右邊，為負值

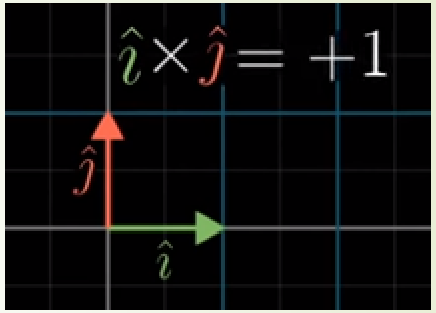


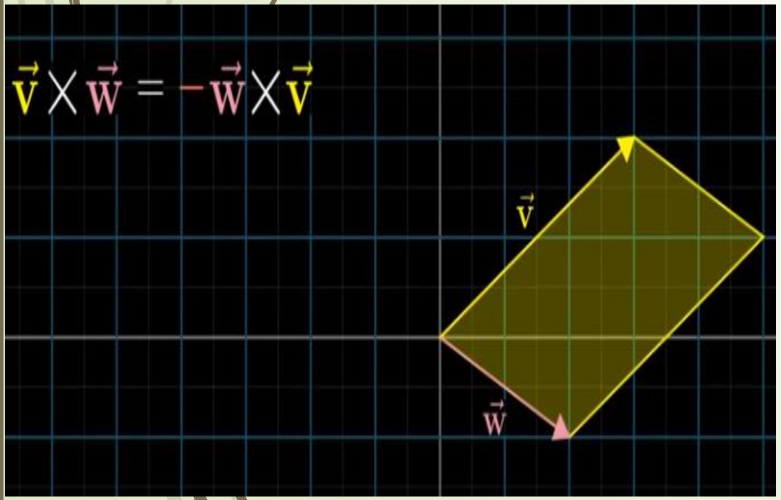


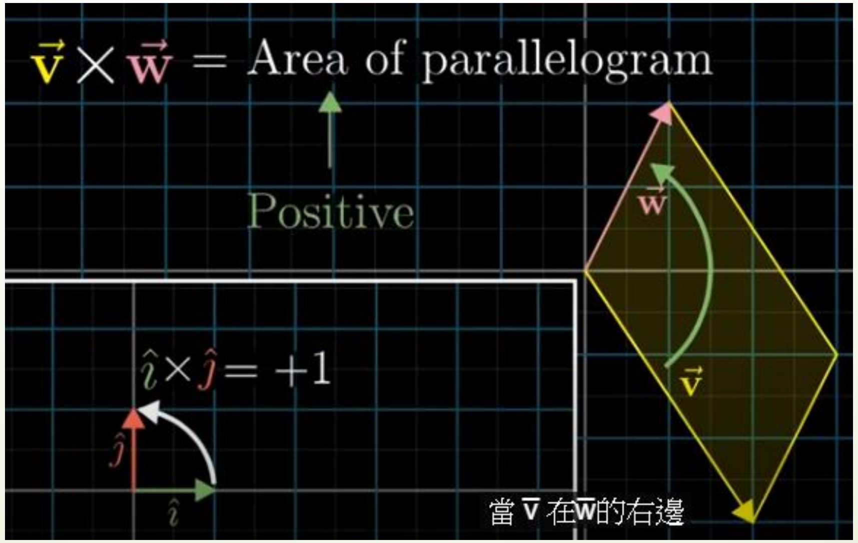


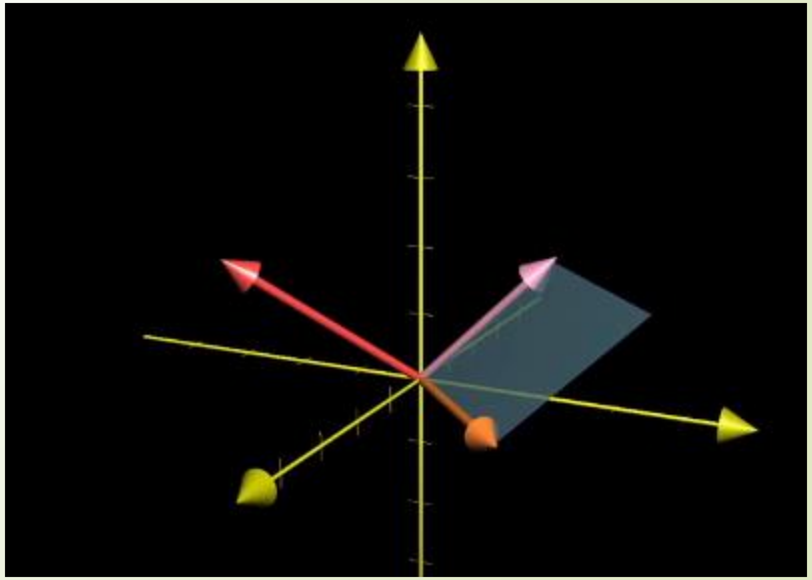
外積交換次序，值變負

- $\vec{v}x\vec{w} = -\vec{w}x\vec{v}$
- 原因：因為vw的方向相反
- 外積用右手定則判定正負



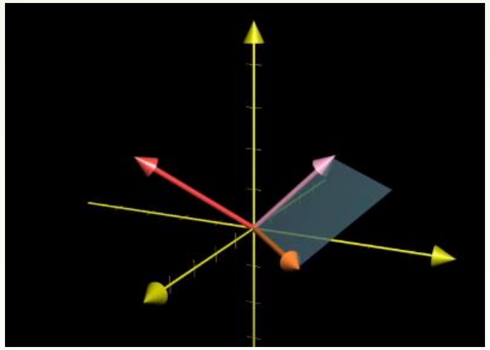


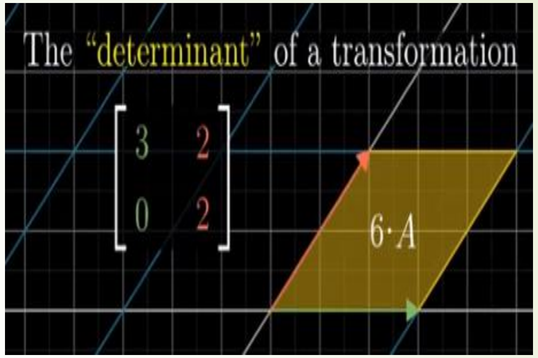


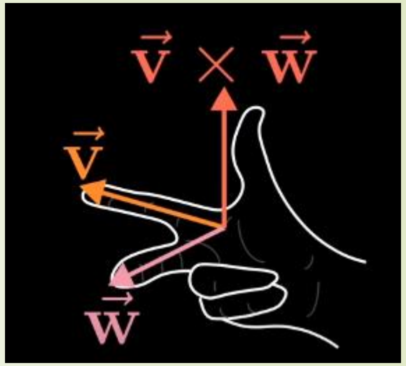


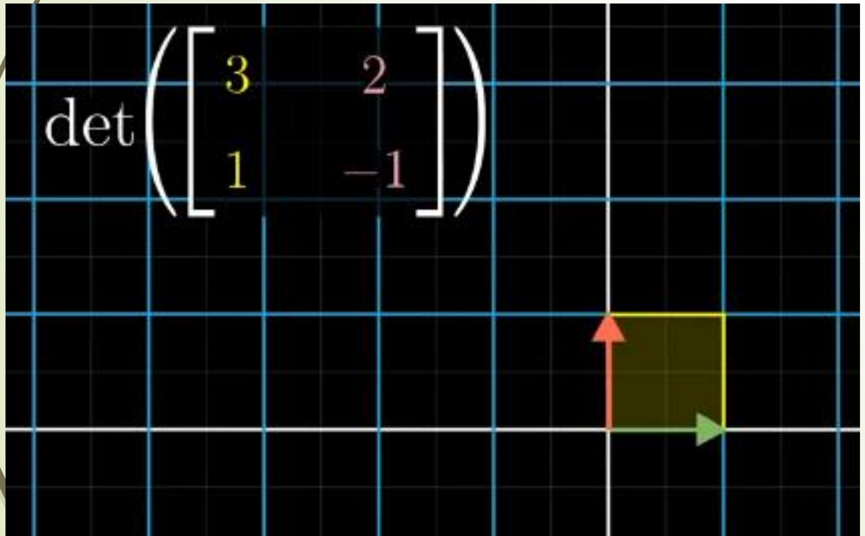
外積的物理意義(2)，向量長度=行列式=面積

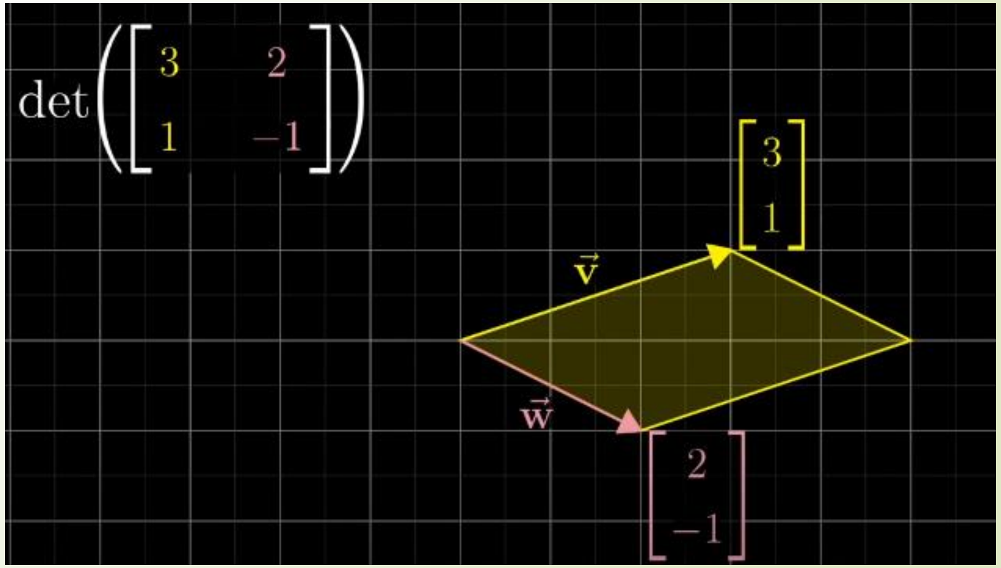
- $\vec{v}x\vec{w}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\mathrm{x}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$
  - 結果：是個向量
  - 其長度值：**平行四邊形面積=行列式值**= $\det\left(\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & -1\end{bmatrix}\right)$
  - 其方向：**垂直vw平面，用右手定則，左手定則判斷**





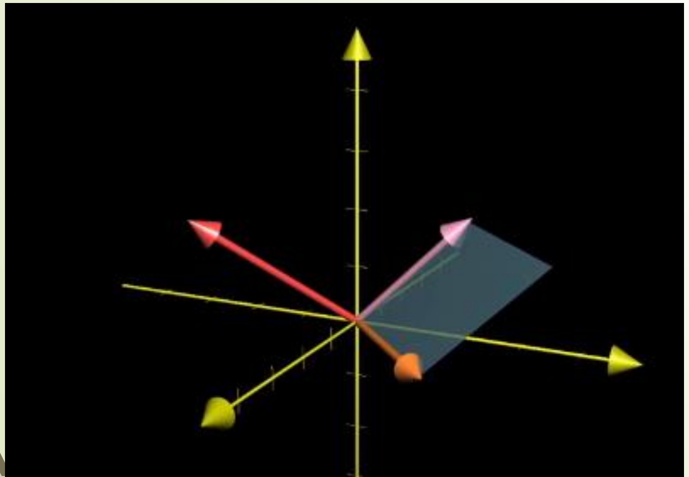


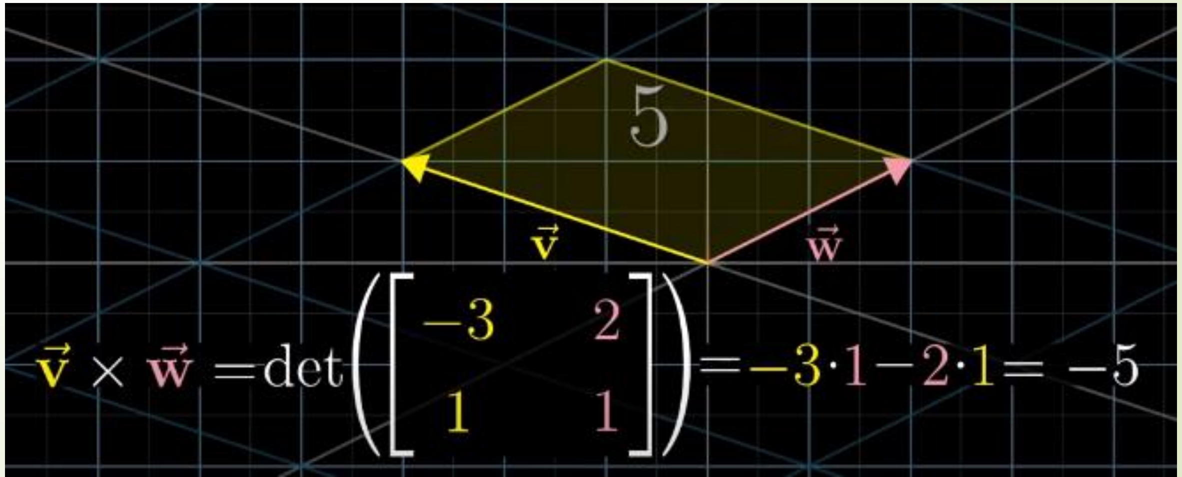




範例1：計算$\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}x\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

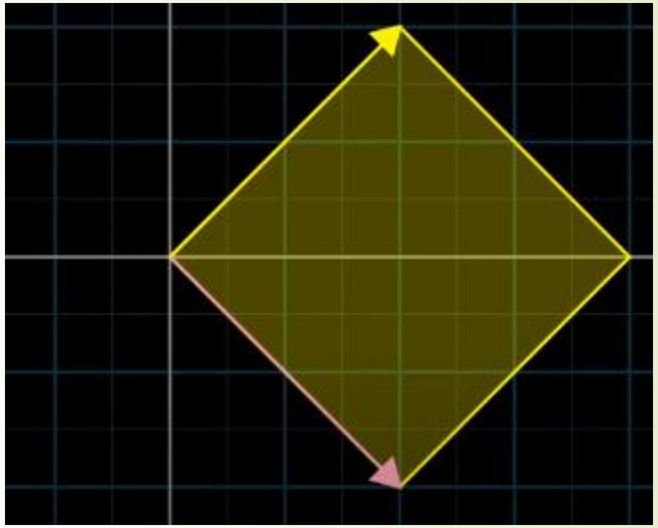
- 計算$\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}x\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ =
- 其值：det($\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & -1\end{bmatrix}$)=-3-2 = -5
- 方向：因為vw符合左手定則，為負
- 符合：左手，食指為v，中指為w，左手為負值



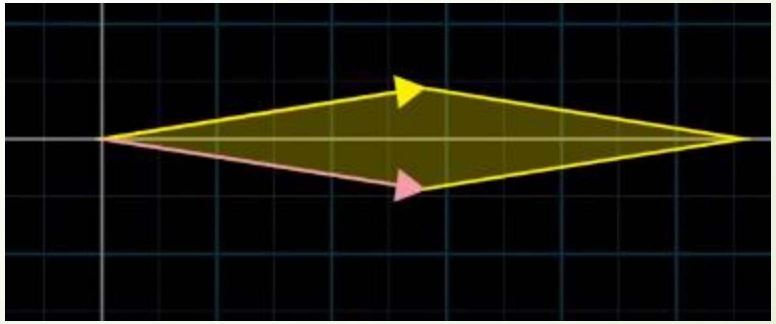


兩向量$\vec{v}\vec{w}$垂直的外積面積最大

- $\vec{v}x\vec{w}=$ 平行四邊形面積
- (1) $\vec{v},\vec{w}$互相垂直

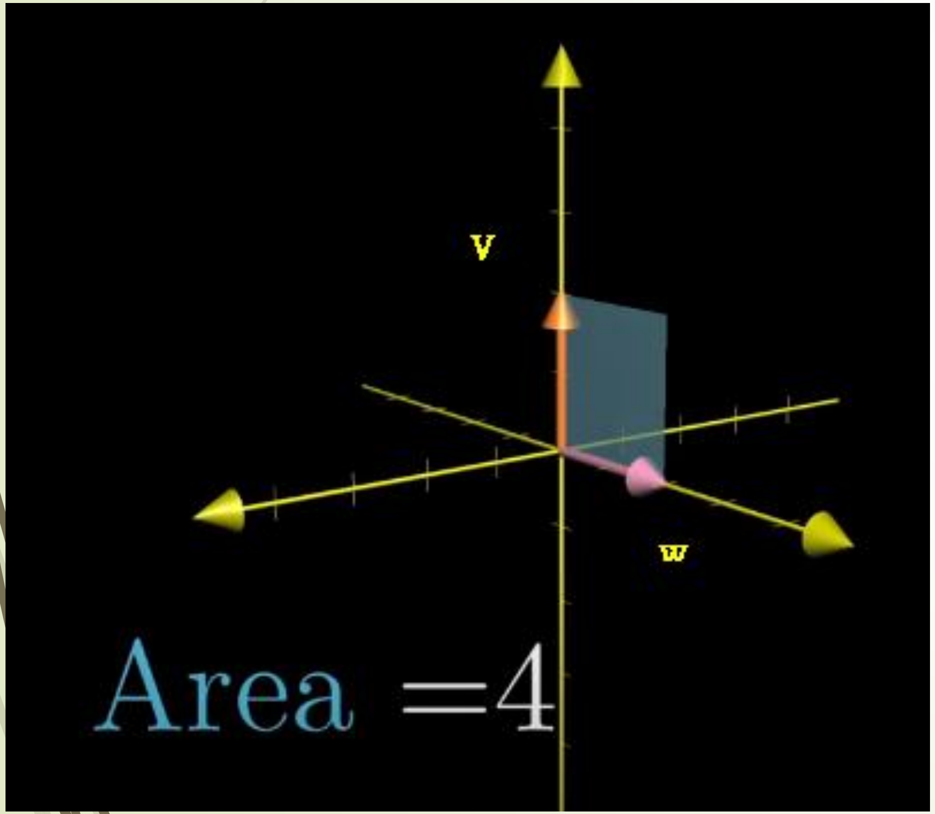


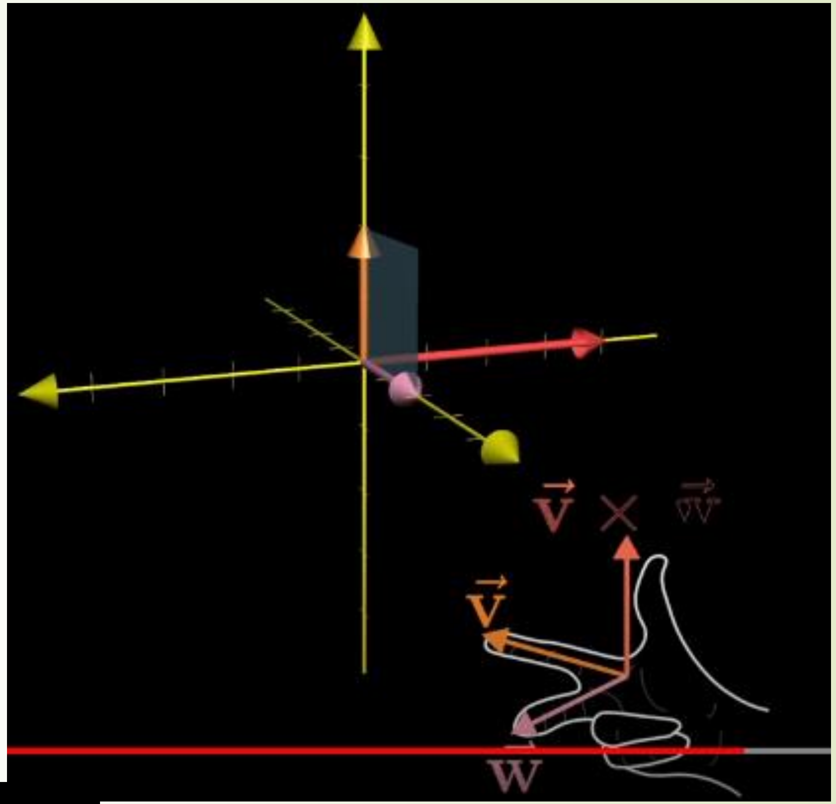
- (2) $\vec{v},\vec{w}$不互相垂直

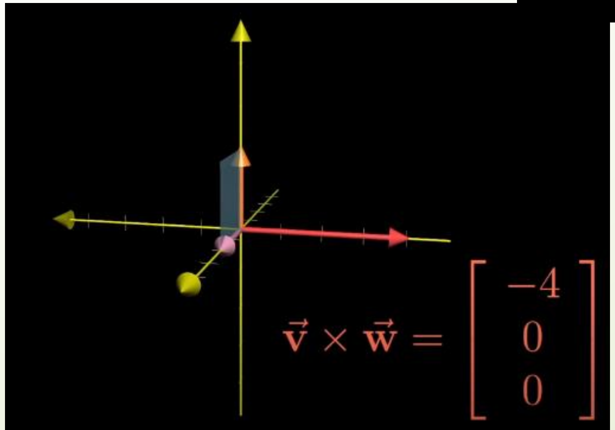


範例2：判斷外積結果的向量方向

- 求$\vec{v}x\vec{w}$的向量方向







外積向量算法的物理意義(3)

- $\vec{v} x \vec{w} = \begin{bmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} w1 \\ w2 \\ w3 \end{bmatrix}$
- $= det\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{v1} & \boldsymbol{w1} \\ \boldsymbol{j} & \boldsymbol{v2} & \boldsymbol{w2} \\ \boldsymbol{k} & \boldsymbol{v3} & \boldsymbol{w3} \end{bmatrix}\right)$
- $i(v2w3\text{-}v3w2)+j(v1w3\text{-}v3w1)+k(v1w2\text{-}v2w1)$
- 向量$(ai+bj+ck) = \begin{bmatrix} v2w3-v3w2 \\ v1w3-v3w1 \\ v1w2-v2w1 \end{bmatrix}$