chp11：線性代數的本質：

外積2(基於線性變換)

陳擎文老師

線性代數的學習重點與探討主題

觀念

- 數學符號的意義

基礎

- 向量
- 矩陣
- 聯立方程式
- 行列式

主題

- 線性映射
- 坐標轉換
- 特徵向量

線性代數的學習重點

觀念

- 數學符號的意義

基礎

- 向量，張量
- 3D矩陣
- 行列式
- 聯立方程式

- 矩陣乘法
- 反矩陣
- 行空間，rank，零空間
- 非方陣的矩陣轉換

- 內積
- **外積**

主題

- **線性映射**
- **坐標轉換**
- 特徵向量，特徵值

線性代數授課的兩條線

- (1). 了解線性代數的本質
  - 了解其背後的物理意義
  - 了解關鍵重點
- (2). 學習如何計算
  - 了解數學的定義，公式，定理，證明
  - 練習計算

參考資料

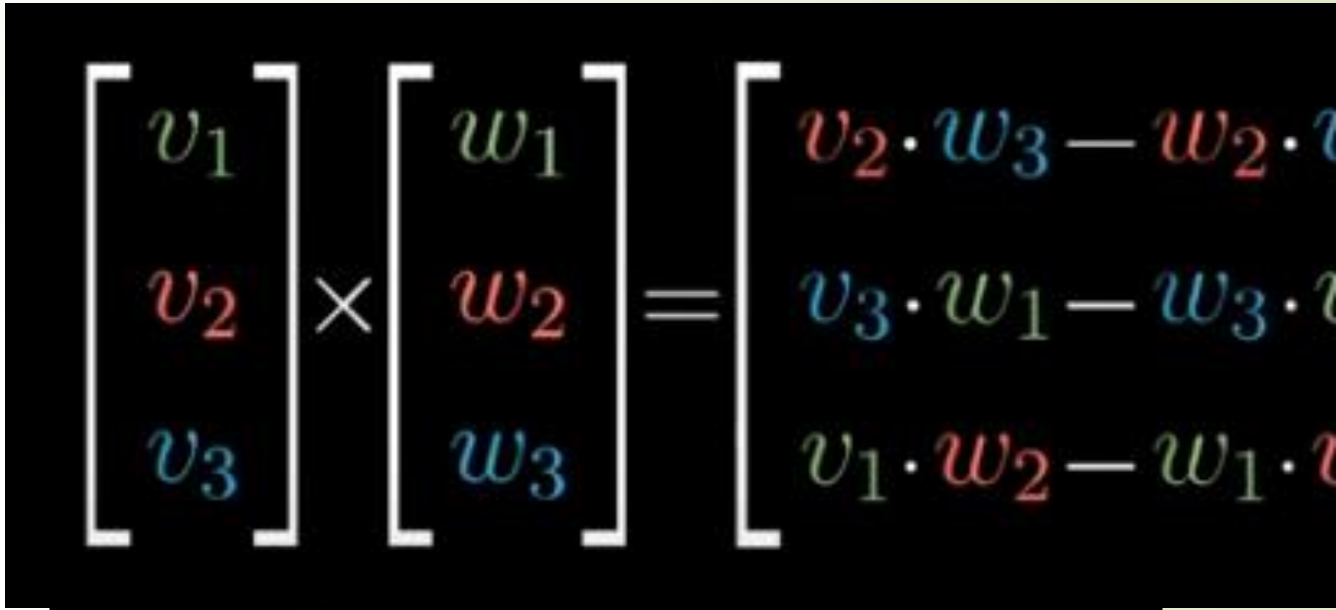
- https://www.youtube.com/watch?v=BaM7OCEm3G0

探討主題

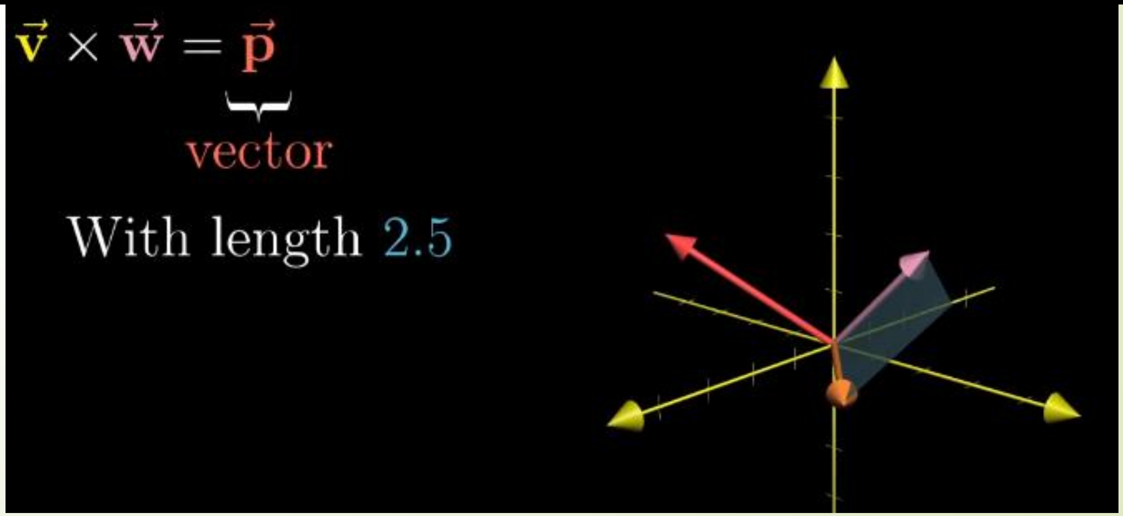
- 外積(cross product)

外積的算法

- 外積的算法



- 外積的結果是個向量

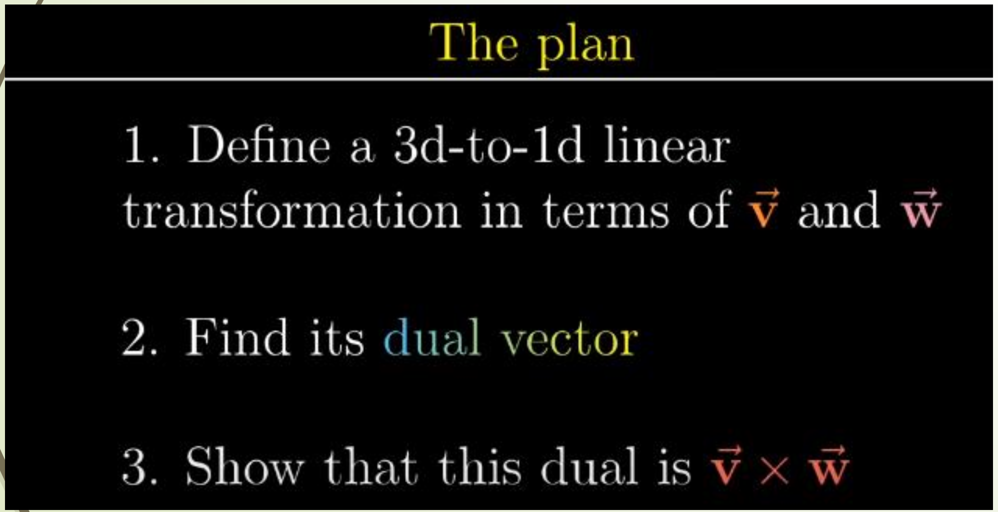


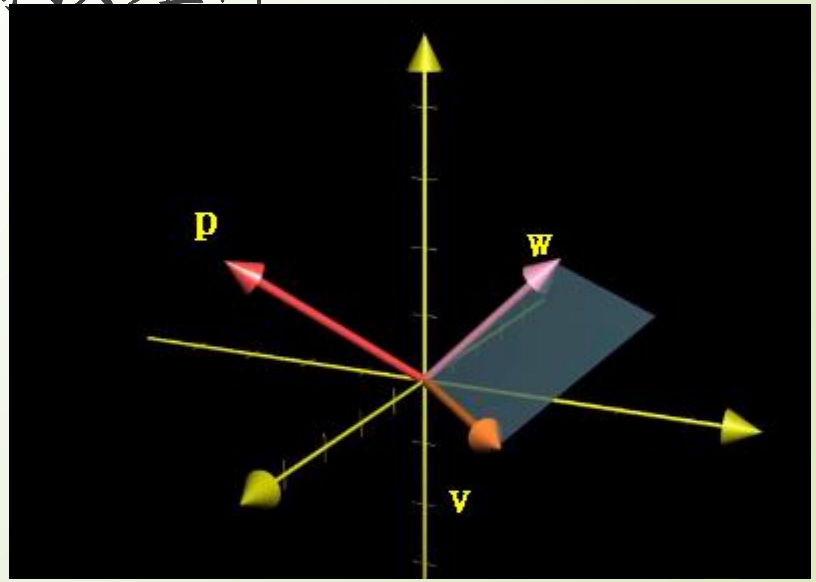
證明：$\vec{v}x\vec{w}$外積的這個向量$p==\begin{bmatrix} v2w3-v3w2) \\ v1w3-v3w1 \\ v1w2-v2w1 \end{bmatrix}$

證明：$\vec{v}x\vec{w}$外積的這個向量dual vector p

$$p==\begin{bmatrix} v2w3-v3w2) \\ v1w3-v3w1 \\ v1w2-v2w1 \end{bmatrix}$$

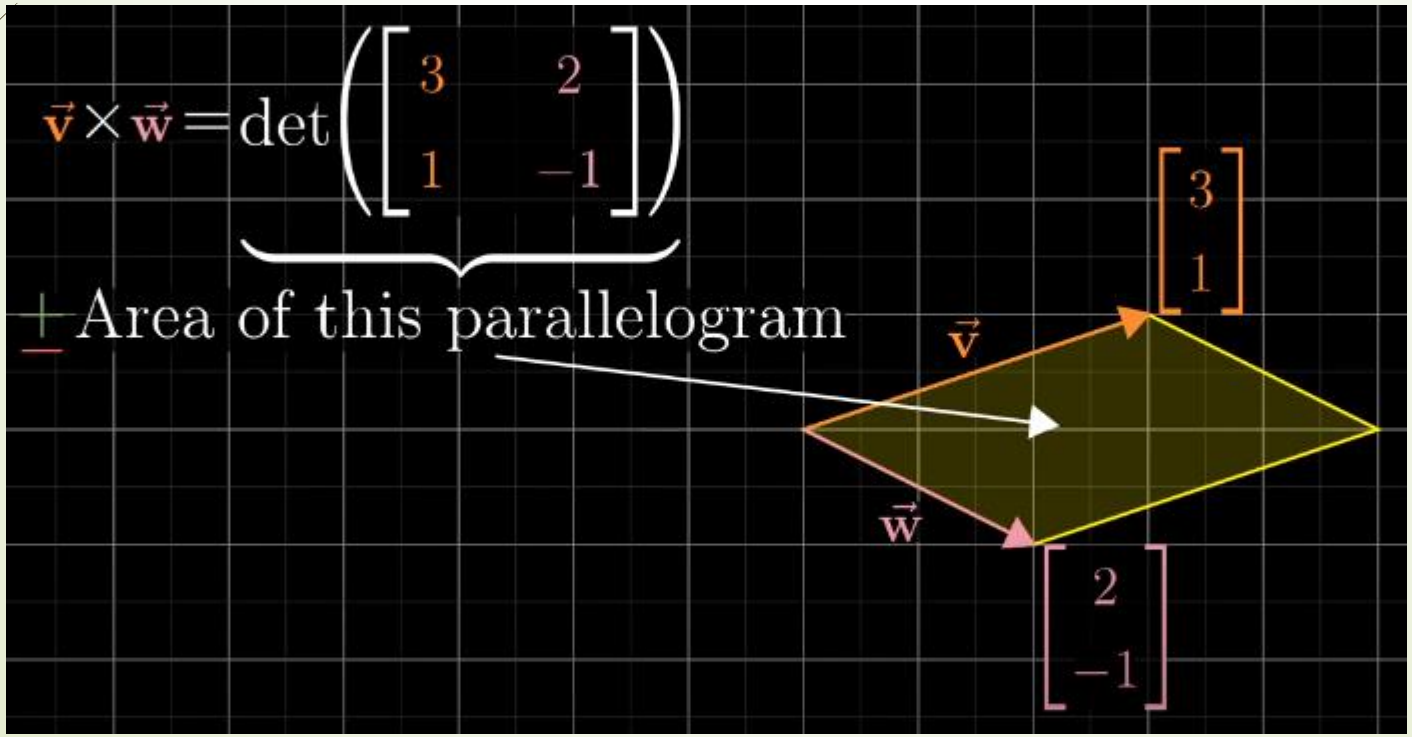
就是座標轉換（3D到1D直線)那個轉換矩陣





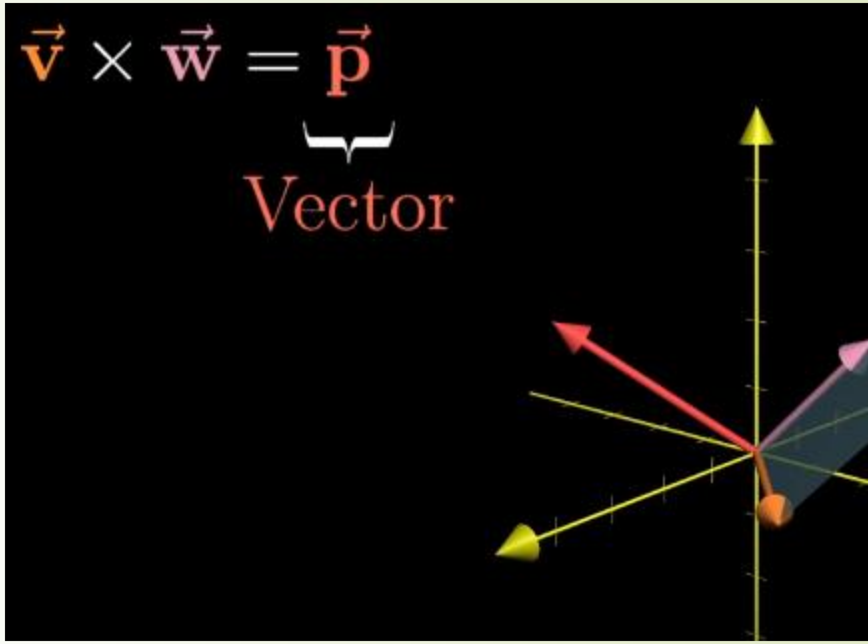
複習：2D的外積

- $\vec{v} x \vec{w} = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} \mathrm{x} \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \det(\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}) = 3-2=1$
- 向量(0, 0, 1)，垂直xy平面



複習：3D的外積

- $\vec{v} x \vec{w} = \begin{bmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} w1 \\ w2 \\ w3 \end{bmatrix}$



=一個3D向量，垂直於vw平面

$= det(\begin{bmatrix} i & v1 & w1 \\ j & v2 & w2 \\ k & v3 & w3 \end{bmatrix})$

$= i(v2w3-v3w2)+j(v1w3-v3w1)+k(v1w2-v2w1)$

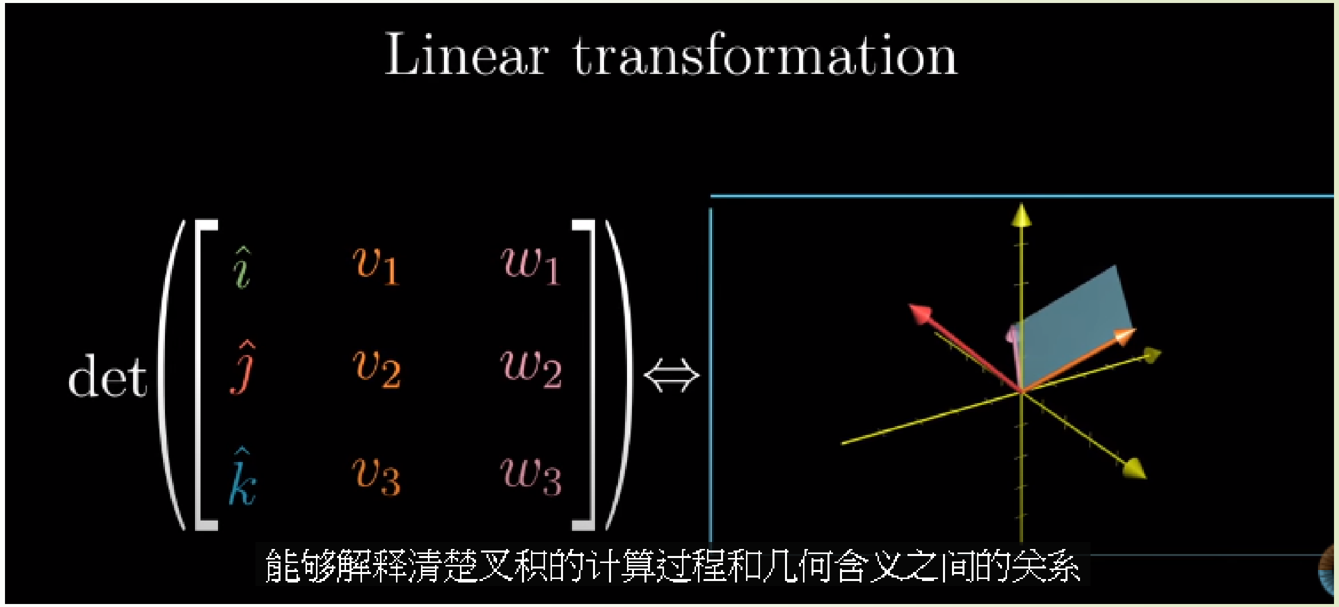
$=$向量$(ai+bj+ck) = \begin{bmatrix} v2w3-v3w2 \\ v1w3-v3w1 \\ v1w2-v2w1 \end{bmatrix}$

- 這個p向量，值=vw的平行四邊形面積

已經證明外積的向量就是這個垂直的p向量

已經證明(1)：外積向量就是這個垂直p向的量

- 了解外積cross product與幾何的對應關係



- $\vec{v} x \vec{w} = \begin{bmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} w1 \\ w2 \\ w3 \end{bmatrix}$

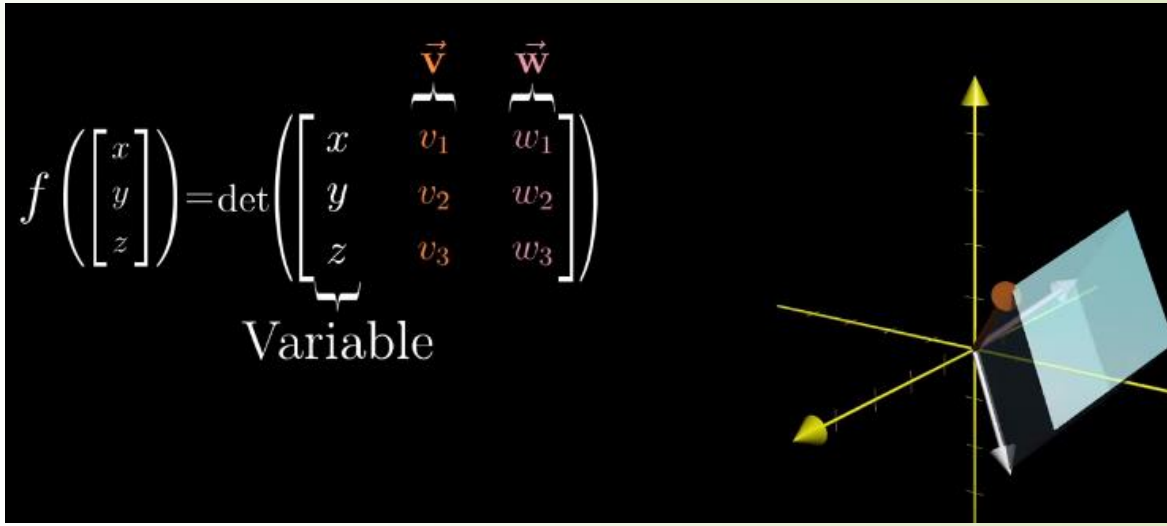
- $= det\left(\begin{bmatrix} i & v1 & w1 \\ j & v2 & w2 \\ k & v3 & w3 \end{bmatrix} \right)$

$= i(v2w3\text{-}v3w2) + j(v1w3\text{-}v3w1) + k(v1w2\text{-}v2w1)$

$= \begin{bmatrix} v2w3 - v3w2 \\ v1w3 - v3w1 \\ v1w2 - v2w1 \end{bmatrix}$

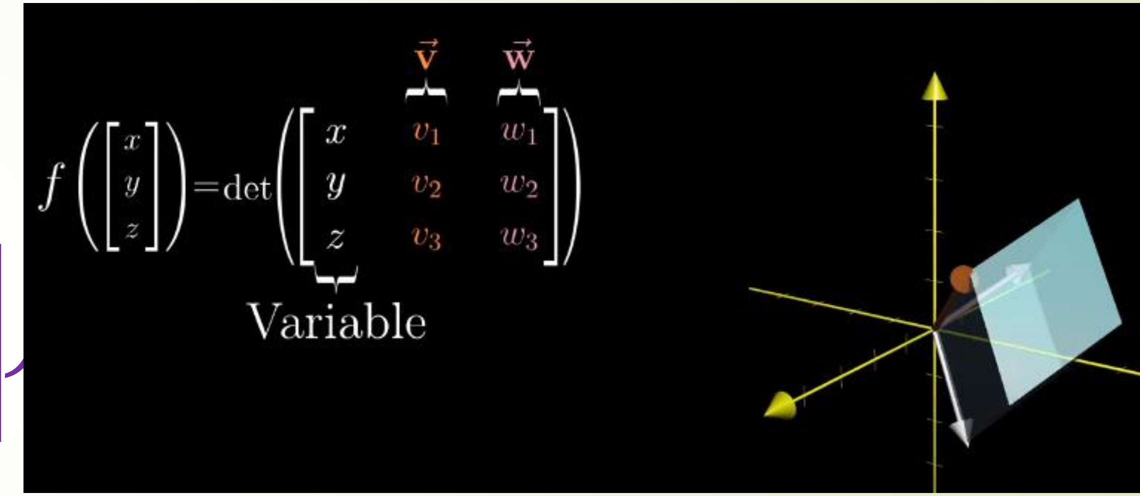
證明2：用3D變換成1D線數組的函數(1)

- $F\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=det\left(\begin{bmatrix}x & v1 & w1\\y & v2 & w2\\z & v3 & w3\end{bmatrix}\right)$
  - 輸入input = 3D向量(x, y, z)
  - 輸出output = 1D直線數組
- $=x(v2w3-v3w2)+y(v1w3-v3w1)+z(v1w2-v2w1)$
- 物理意義：
  - 輸入一個向量(x, y, z)
  - f(..)值= v, w與(x, y, z)形成的平行六面體的體積



證明2： 3D變換成1D線數組的函數(2)

- 第二種方法表示: 3D變換成1D線數組（內積）
- 內積：$\begin{bmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p1 & p2 & p3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$
- 第一種數學式=第二種數學式
- $\begin{bmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = det\left(\begin{bmatrix} x & v1 & w1 \\ y & v2 & w2 \\ z & v3 & w3 \end{bmatrix}\right)$
  - 輸入input = 3D向量(x, y, z)
  - 輸出output = 1D直線數組
- $=x(v2w3-v3w2)+y(v1w3-v3w1)+z(v1w2-v2w1)$
- 物理意義：
  - 輸入一個向量(x, y, z)
  - f(..)值= v, w與(x, y, z)形成的平行六面體的體積



證明2： 3D變換成1D線數組的函數(3)，結合內積與外積

- $\begin{bmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = det\left(\begin{bmatrix} x & v1 & w1 \\ y & v2 & w2 \\ z & v3 & w3 \end{bmatrix}\right)$
  - 輸入input = 3D向量(x, y, z)
  - 輸出output = 1D直線數組
  - p = dual vector = dual matrices
- $p1x+p2y+p3z=x(v2w3-v3w2)+y(v1w3-v3w1)+z(v1w2-v2w1)$
- 結果：算出其dual vector p(3D轉換到1D的矩陣)
- $\begin{bmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v2w3-v3w2) \\ v1w3-v3w1 \\ v1w2-v2w1 \end{bmatrix}$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}}^{\vec{p}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix} x & \overbrace{v_1}^{\vec{v}} & \overbrace{w_1}^{\vec{w}} \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{bmatrix}\right)$$

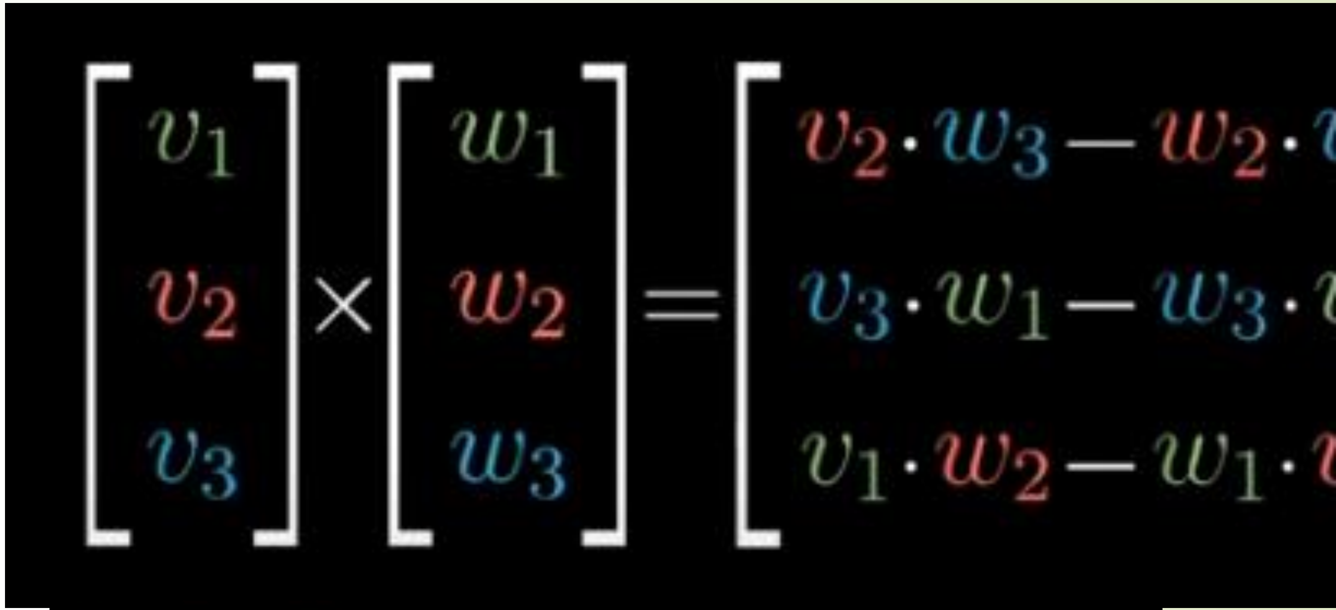
已經證明外積的向量就是這個垂直的p向量

結論：外積$\vec{v} x \vec{w} = \begin{bmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} w1 \\ w2 \\ w3 \end{bmatrix}$

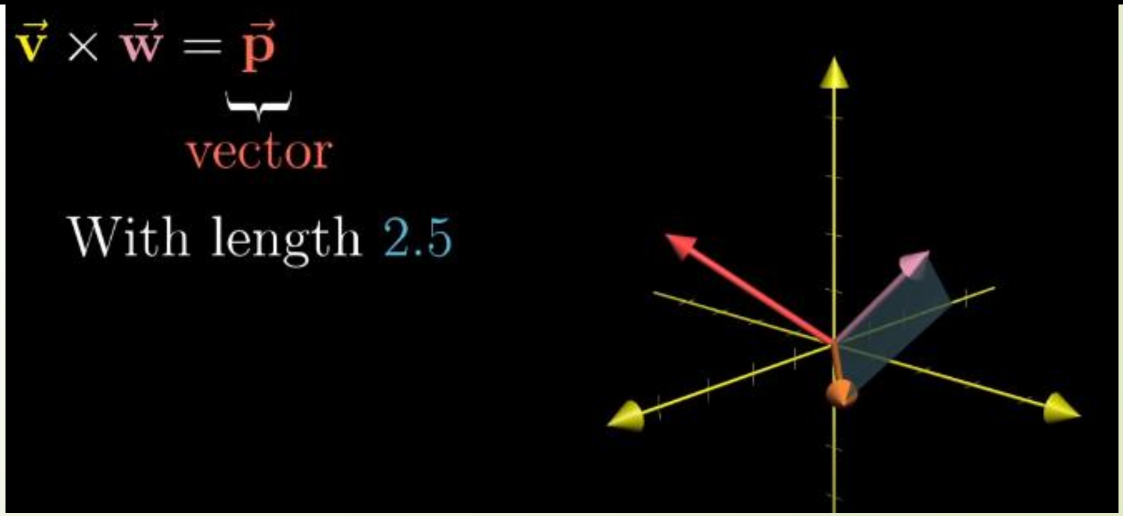
- 1. $\vec{v} x \vec{w}$外積的垂直向量p = $\begin{bmatrix} v2w3 - v3w2 \\ v1w3 - v3w1 \\ v1w2 - v2w1 \end{bmatrix}$
- 2. 外積$\vec{v} x \vec{w}$向量p的值 =$\vec{v} x \vec{w}$的平行四邊形面積=det($\begin{bmatrix} v1 & w1 \\ v2 & w2 \\ v3 & w3 \end{bmatrix}$
- 3. 這個垂直向量p的dual matrices轉換1D矩陣 $\begin{bmatrix} v2w3 - v3w2 & v1w3 - v3w1 & v1w2 - v2w1 \end{bmatrix}$，可以把任何3D向量，轉換到1D的垂直向量線$p$上

已經證明：外積的算法

- 外積的算法



- 外積的結果是個向量



注意：外積的垂直向量p，同時是轉換到1D直線p矩陣

- 1. p向量(外積算法)

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \cdot w_3 - w_2 \cdot \\ v_3 \cdot w_1 - w_3 \cdot \\ v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot \end{bmatrix}$$

- **2.P矩陣**

- $[v2w3-v3w2 \quad v1w3-v3w1 \quad v1w2-v2w1] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

= 把3D向量轉換到1D的P向量直線上

外積相關定理

Numerical formula	Facts you could (painfully) verify computationally
$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_2 w_3 - v_3 w_2 \end{bmatrix}$	$\vec{\mathbf{v}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}) = 0$ $\vec{\mathbf{w}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}) = 0$ $\theta = \cos^{-1}\left(\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} / (\lvert\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert\rvert \cdot \lvert\lvert\vec{\mathbf{w}}\rvert\rvert)\right)$ $\lvert\lvert(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})\rvert\rvert = (\lvert\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert\rvert)(\lvert\lvert\vec{\mathbf{w}}\rvert\rvert)\sin(\theta)$