chp12：線性代數的本質：行列式計算，Cramers Rule

陳擎文老師

線性代數的學習重點與探討主題

觀念
- 數學符號的意義

基礎
- 向量
- 矩陣
- 聯立方程式
- 行列式

主題
- 線性映射
- 坐標轉換
- 特徵向量

線性代數的學習重點

觀念

- 數學符號的意義

基礎

- 向量，張量
- 3D矩陣
- 行列式
- 聯立方程式

- 矩陣乘法
- 反矩陣
- 行空間，rank，零空間
- 非方陣的矩陣轉換

- 內積
- 外積
- Cramers rule

主題

- 線性映射
- 坐標轉換
- 特徵向量，特徵值

線性代數授課的兩條線

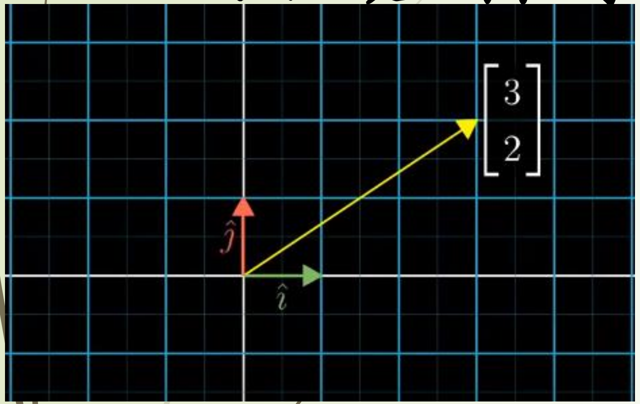
- (1). 了解線性代數的本質
  - 了解其背後的物理意義
  - 了解關鍵重點
- (2). 學習如何計算
  - 了解數學的定義，公式，定理，證明
  - 練習計算

參考資料

- https://www.youtube.com/watch?v=jBsC34PxzoM

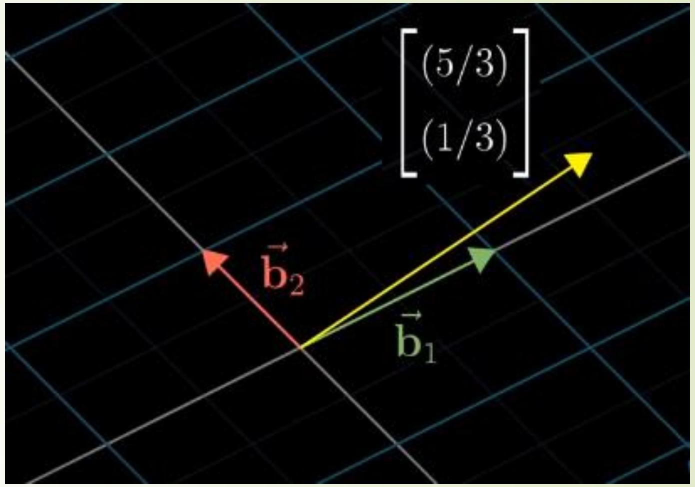
逆矩陣的物理意義：由S座標反推S'座標

- **兩個座標系統看同一個位置的p向量**



正轉換公式 $= \begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}_{S'基底} = \begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}_{s基底}$

逆轉換公式 $= \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}_{s基底} = \begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1}_{S'基底}$



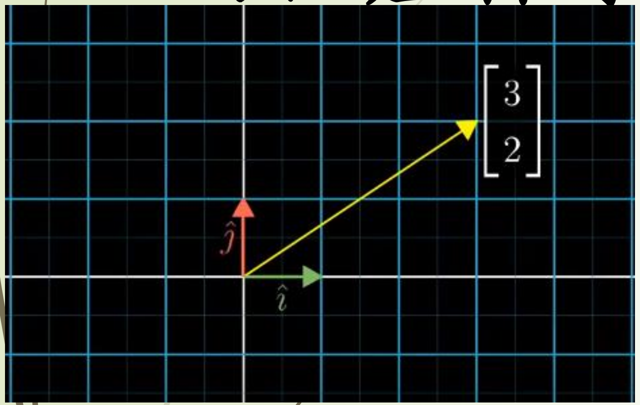
- S座標 $\qquad$ S'座標

- 應用範例3：在S座標的$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$，在$S'$座標是？

- $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}_{s基底} = \begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1}_{S'基底}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_{s基底} = \begin{bmatrix}1/3 & 1/3\\-1/3 & 2/2\end{bmatrix}_{S'基底}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5/3\\1/3\end{bmatrix}_{s基底}$

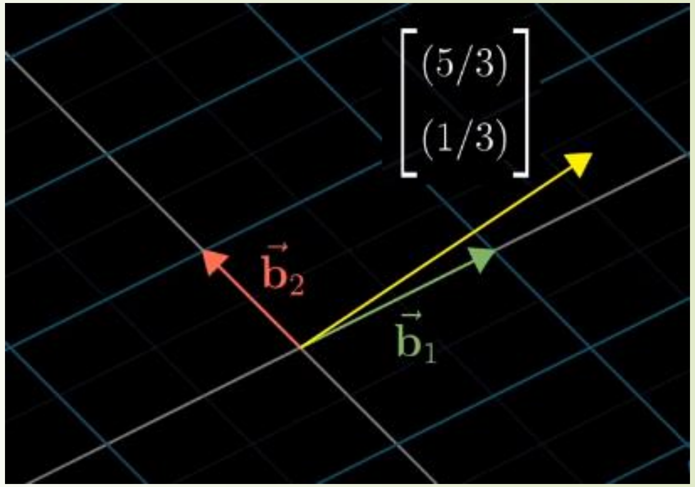
範例3：S座標$v=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$，用你矩陣轉換，求$S'$座標v′是？

- **兩個座標系統看同一個位置的p向量**



正轉換公式 $= \begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}_{S'基底} = \begin{bmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-1}\\\mathbf{1} & \mathbf{1}\end{bmatrix}_{s基底}$

逆轉換公式 $= \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}_{s基底} = \begin{bmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-1}\\\mathbf{1} & \mathbf{1}\end{bmatrix}^{-1}_{S'基底}$



- S座標　　　　　S'座標

- 應用範例3：在S座標的$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$，在$S'$座標是？

- $\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}_{s基底} = \begin{bmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-1}\\\mathbf{1} & \mathbf{1}\end{bmatrix}^{-1}_{S'基底}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_{s基底} = \begin{bmatrix}1/3 & \mathbf{1/3}\\\mathbf{-1/3} & \mathbf{2/2}\end{bmatrix}_{S'基底}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5/3\\1/3\end{bmatrix}_{s基底}$

探討主題

- 聯立方程式：Simultaneous equations
- 克萊瑪法則：Cramer’s rule

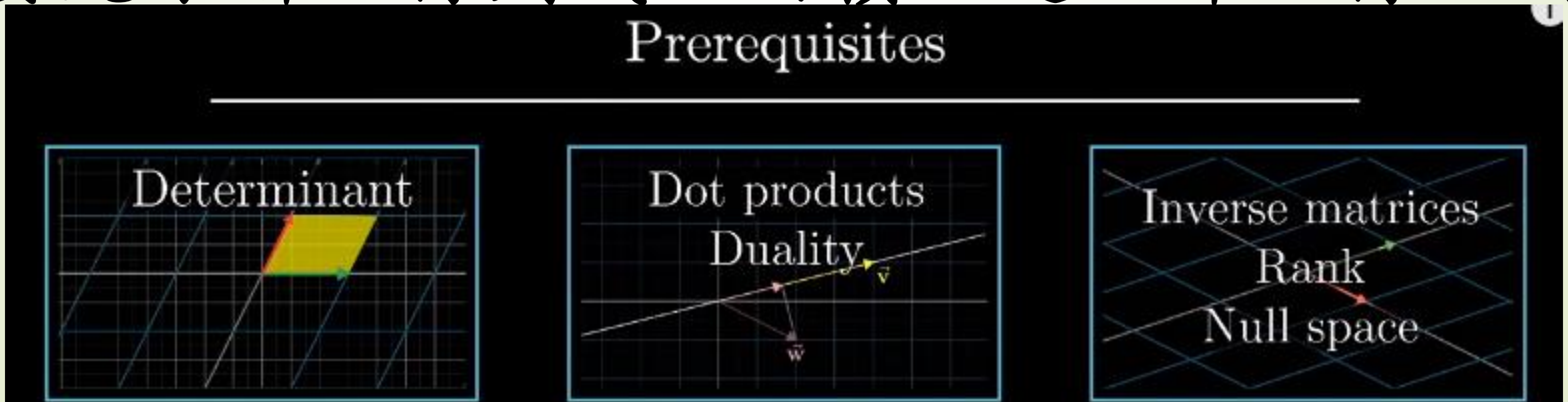
克萊瑪法則：Cramer’ s rule

- 解釋Cramer’ s rule的物理意義

“Cramer’s rule”

$$\overbrace{x=\frac{\det\left(\begin{bmatrix}7 & 2 & 3\\ -8 & 0 & 2\\ 3 & 6 & -9\end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix}-4 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ -4 & 6 & -9\end{bmatrix}\right)}\quad y=\frac{\det\left(\begin{bmatrix}-4 & 7 & 3\\ -1 & -8 & 2\\ -4 & 3 & -9\end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix}-4 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ -4 & 6 & -9\end{bmatrix}\right)}\quad z=\frac{\det\left(\begin{bmatrix}-4 & 2 & 7\\ -1 & 0 & -8\\ -4 & 6 & 3\end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix}-4 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ -4 & 6 & -9\end{bmatrix}\right)}}$$

- 但是要先了解：行列式，內積，逆矩陣，行空間，rank，零空間



聯立方程式的解法

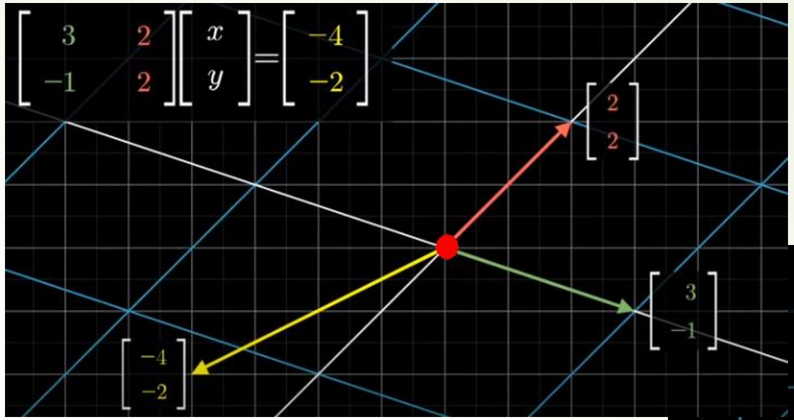
- 計算方法：
- (1).高斯消去法Gaussian eliminiation
  - 計算速度較快
- (2).克萊瑪法則：Cramer’ s rule
  - 有助於理解線性代數的物理意義

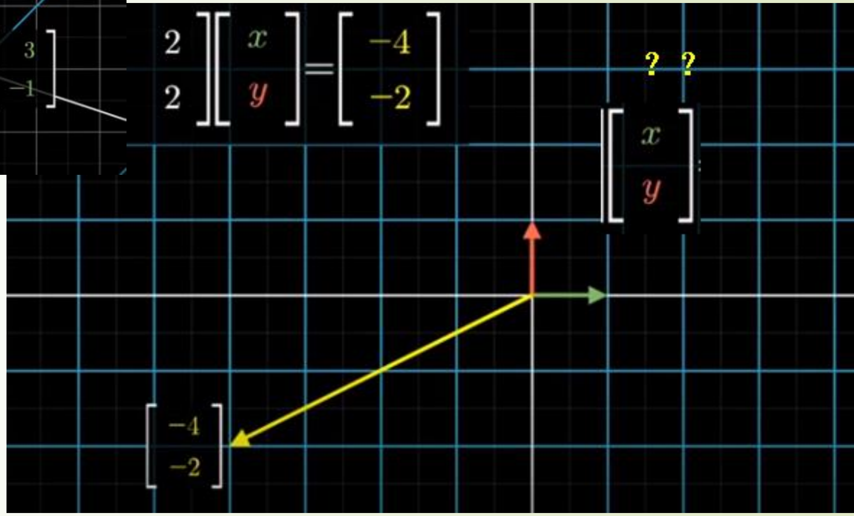
範例1：解聯立方程式

- 1. 聯立方程式:

  2x-1y = 4

  0x+1y = 2



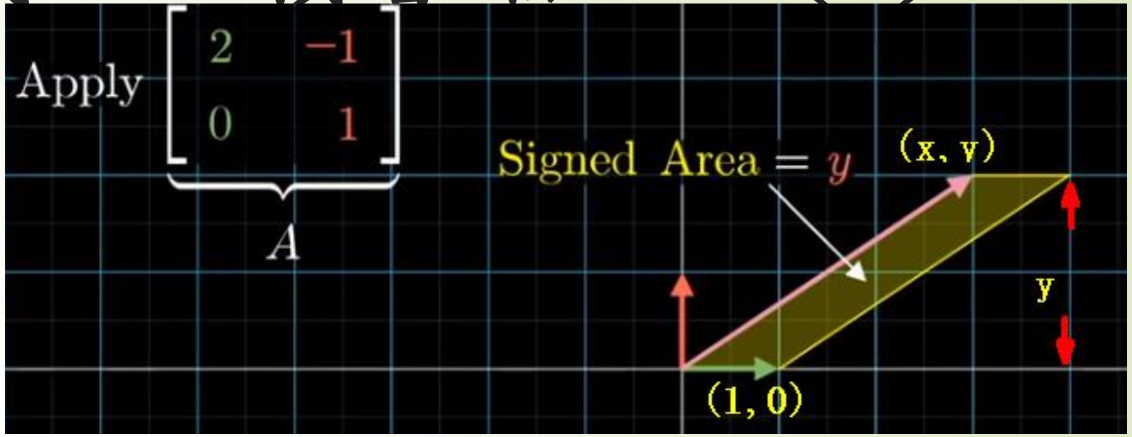


- 2. 用座標轉換角度思考：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- 3. 一個向量$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$經過轉換後，變成$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$，請問未變換前的$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$在哪裡？

範例1：解聯立方程式：面積會縮放dt(A)



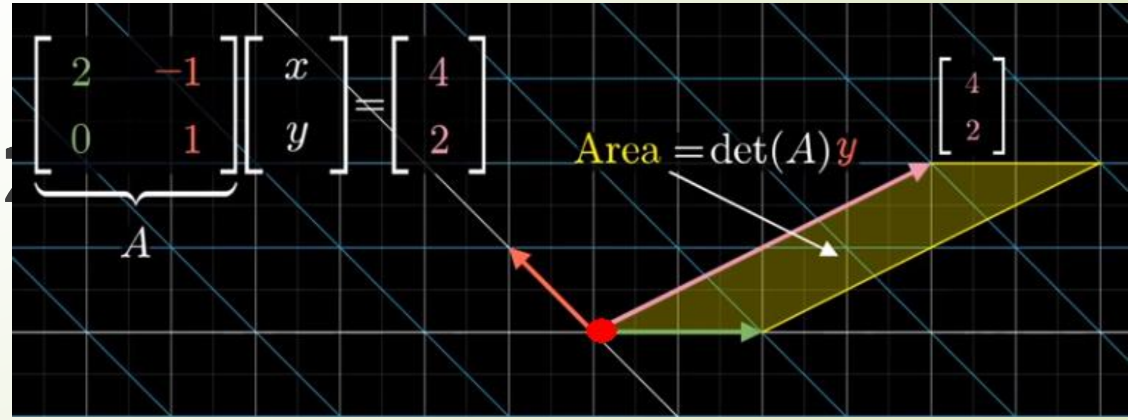
- 4. 用座標轉換角度思考：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

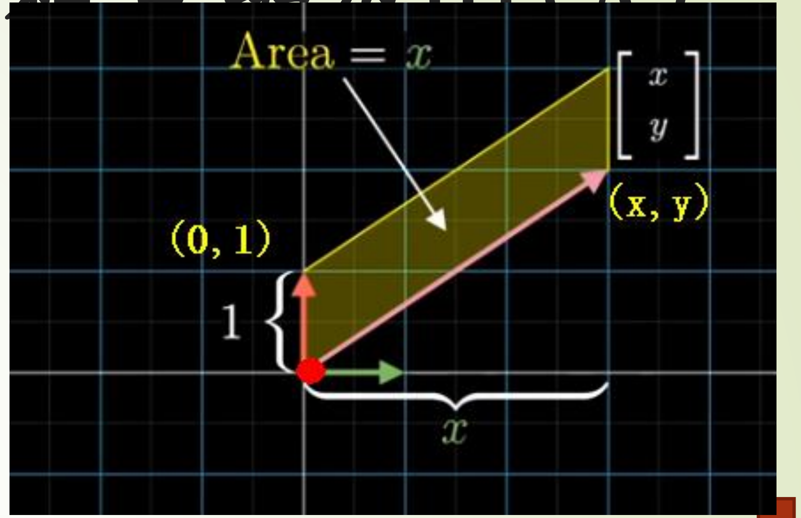
- 5. 已經知道，變換後面積會縮放dt(A)
- 6. 變形前單位平行四邊形面積=1*y，變形後變成Area2

Area2 =1*y*det(A)

$$y=\frac{Area2}{det(A)} = \frac{det(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix})}{det(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})} = \frac{4}{2} = 2$$



範例1：解聯立方程式：面積會縮放dt(A)



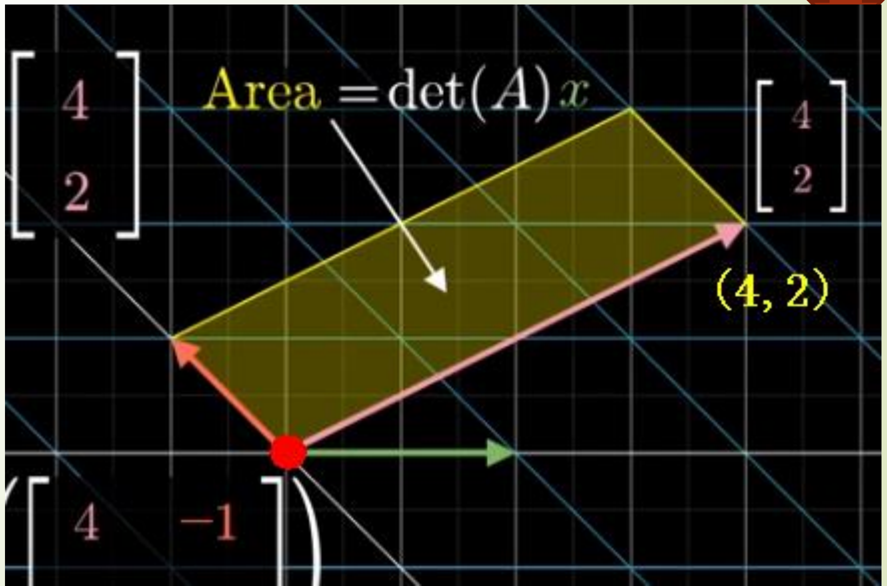
- 4. 用座標轉換角度思考：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- 5. 已經知道，變換後面積會縮放dt(A)
- 6. 變形前單位平行四邊形面積=1*x，變形後變成Area2

Area2 =1*x*det(A)

$$x=\frac{\text{Area2}}{\det(A)}=\frac{\det\left(\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)}=\frac{6}{2}=3$$



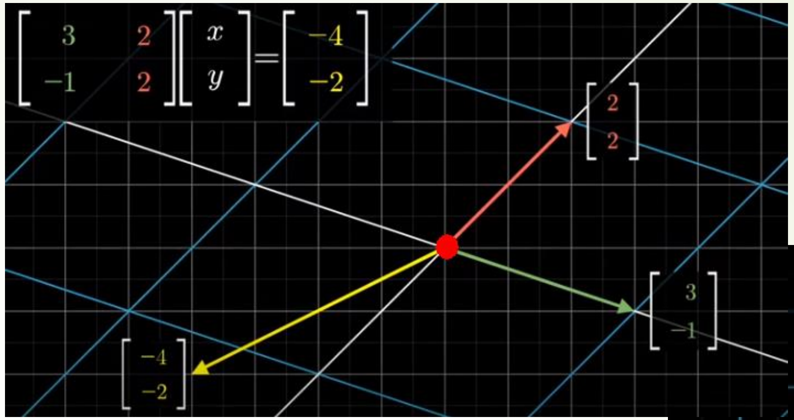
- 7. 算出解(x, y)=(3, 2)

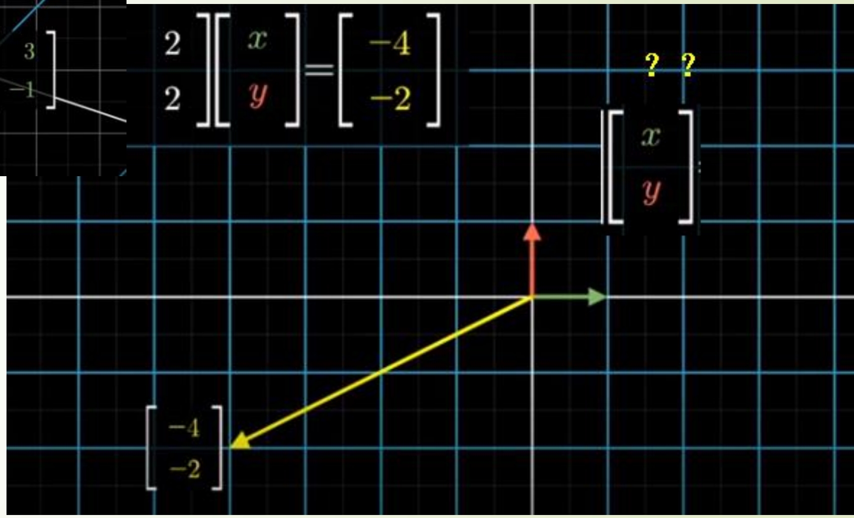
範例2：解聯立方程式

- 1. 聯立方程式:

$3x+2y = -4$

$-1x+2y = -2$





- 2. 用座標轉換角度思考：

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- 3. 一個向量$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$經過轉換後，變成$\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$，請問未變換前的$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$在哪裡？

範例2：解聯立方程式

- 2. 用座標轉換角度思考：

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- $x = \dfrac{\det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{-4} & 2 \\ \mathbf{-2} & 2 \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right)} = \dfrac{-8+4}{6+2} = \dfrac{-1}{2}$

- $y = \dfrac{\det\left(\begin{bmatrix} 3 & \mathbf{-4} \\ -1 & \mathbf{-2} \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right)} = \dfrac{-6-4}{6+2} = \dfrac{-5}{4}$

克萊瑪法則：Cramer’ s rule

- Cramer’ s rule的規律

$$\overbrace{x = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & -9 \end{bmatrix}\right)} \quad y = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} -4 & 7 & 3 \\ -1 & -8 & 2 \\ -4 & 3 & -9 \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & -9 \end{bmatrix}\right)} \quad z = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} -4 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & -8 \\ -4 & 6 & 3 \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & -9 \end{bmatrix}\right)}}^{\text{“Cramer's rule”}}$$

範例3：解聯立方程式

$$3x + 2y + 7z = -4$$

$$1x + 2y - 4z = -2$$

$$4x + 0y + 1z = 5$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & -9 \end{bmatrix}\right)}$$

$$x = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & -9 \end{bmatrix}\right)} \quad y = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} -4 & 7 & 3 \\ -1 & -8 & 2 \\ -4 & 3 & -9 \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & -9 \end{bmatrix}\right)} \quad z = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} -4 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & -8 \\ -4 & 6 & 3 \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & -9 \end{bmatrix}\right)}$$