chp13：線性代數的本質：

變換基底向量，$A^{-1}MA=$
視角轉換＋動作轉換

陳擎文老師

線性代數的學習重點與探討主題

觀念

- 數學符號的意義

基礎

- 向量
- 矩陣
- 聯立方程式
- 行列式

主題

- 線性映射
- 坐標轉換
- 特徵向量

線性代數的學習重點

觀念

- 數學符號的意義

基礎

- 向量，張量
- 3D矩陣
- 行列式
- 聯立方程式

- 矩陣乘法
- 反矩陣
- 行空間，rank，零空間
- 非方陣的矩陣轉換

- 內積
- 外積
- Cramers rule
- 變換基底向量

主題

- 線性映射
- 坐標轉換
- $A^{-1}MA$=視角轉換＋動作轉換
- 特徵向量，特徵值

線性代數授課的兩條線

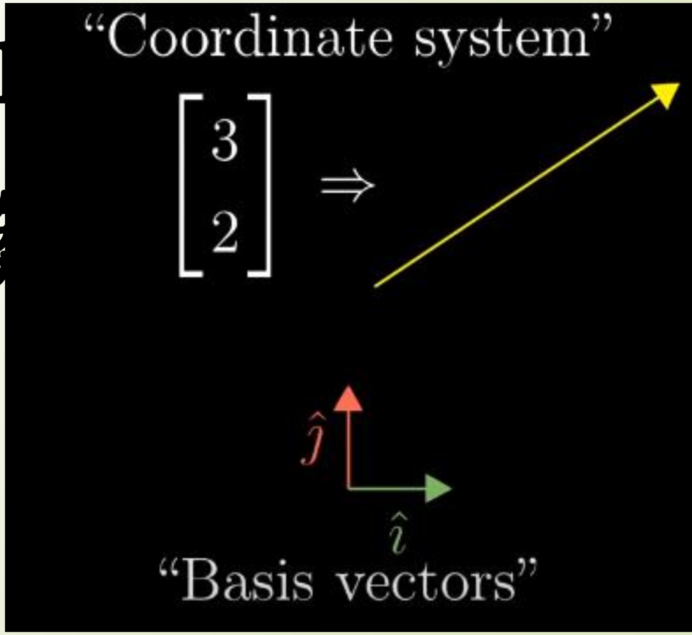
- (1). 了解線性代數的本質
  - 了解其背後的物理意義
  - 了解關鍵重點
- (2). 學習如何計算
  - 了解數學的定義，公式，定理，證明
  - 練習計算

參考資料

- https://www.youtube.com/watch?v=P2LTAUO1TdA

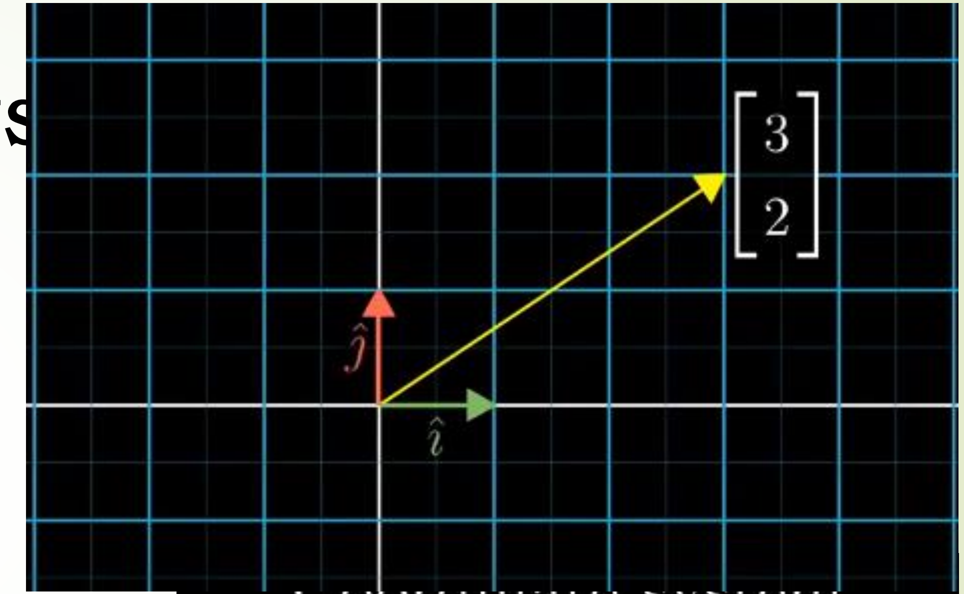
探討主題

- 基底向量：basis vector
- 變換基底向量：transform the basis vector
- 座標系統：coordinate syste
- $A^{-1}MA$：視角轉換＋動作轉
- 逆矩陣：inverse matrices

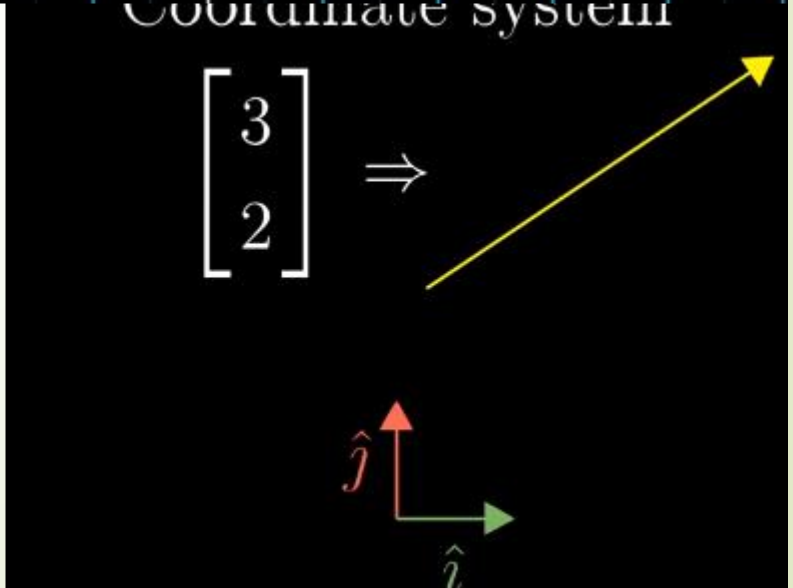


座標系統裡面的基底向量

- 座標系統：coordinate sys
  - 座標裡面的某點向量(3, 2)=$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$

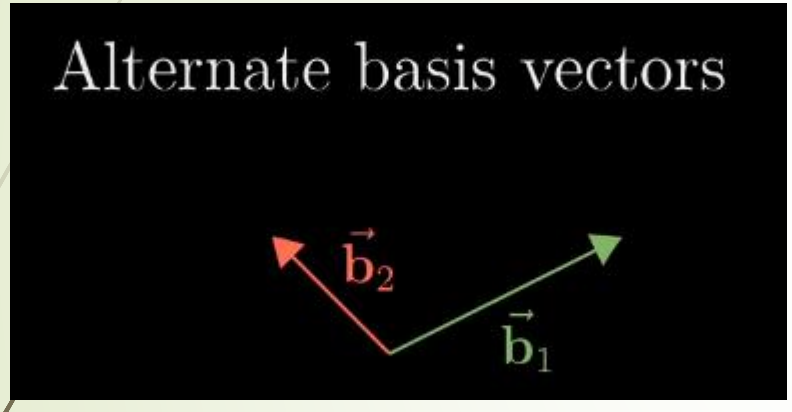


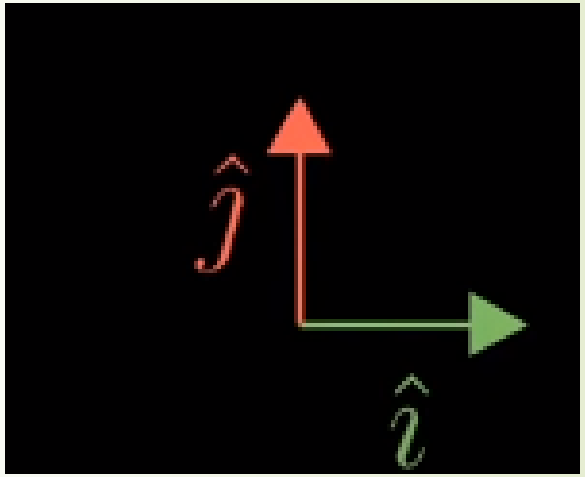
- 基底向量：basis vector
  - (i, j)就是基底向量
  - 就是單位向量



兩個座標系統看世界

- 兩個座標系統看世界

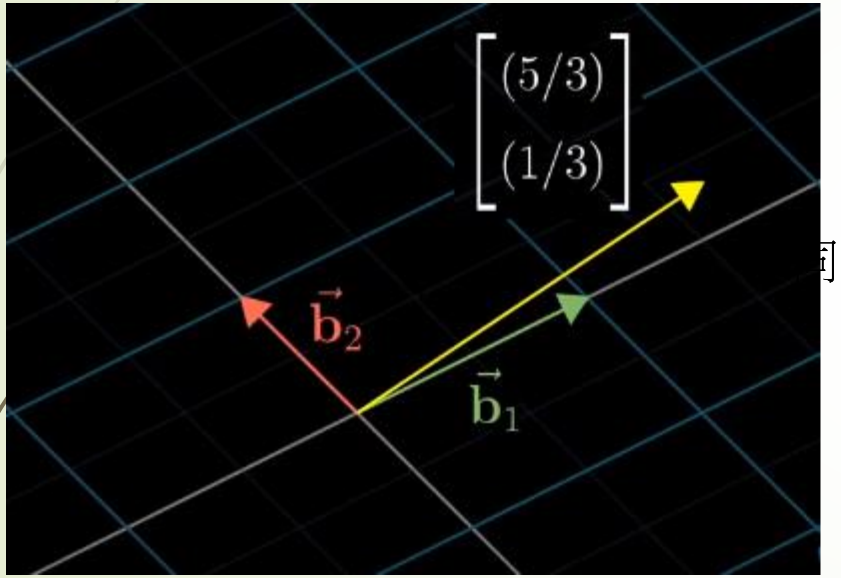




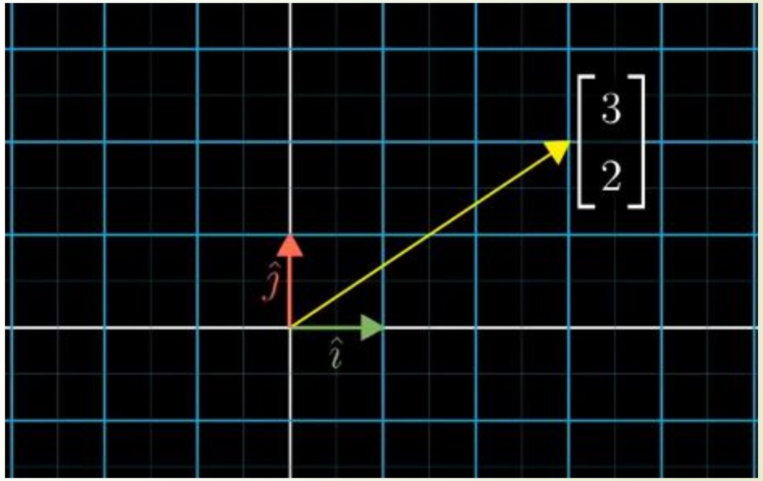
- S’ 座標　　　　S座標
- S’ $=\{y_1, \ y_2 \cdots y_n\}$　　　　S$=\{x_1, \ x_2 \cdots x_n\}$

兩個座標系統看同一個位置的p向量

- 兩個座標系統看同一個位置的p向量



同一個向量p，



- S'座標

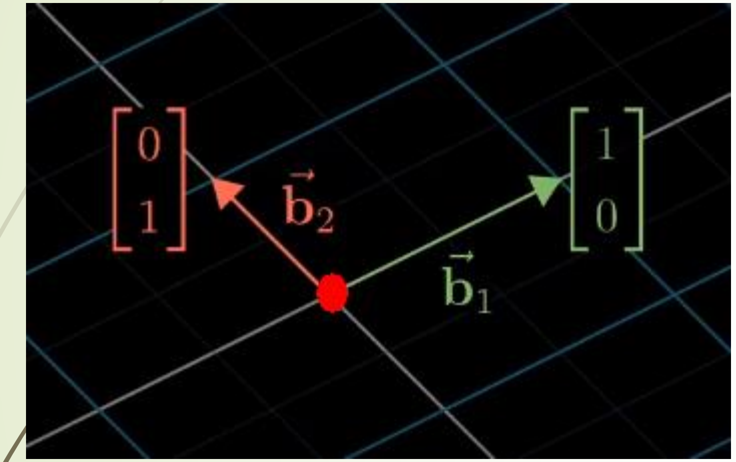
S座標

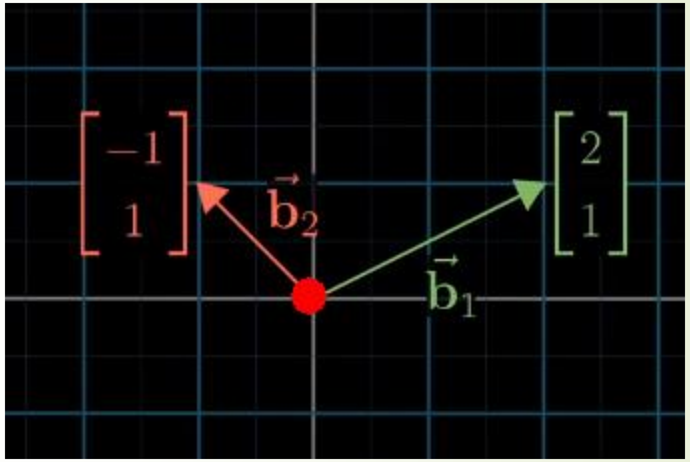
- p’ $=\begin{bmatrix}5/3\\1/3\end{bmatrix} = 5/3b_1+1/2b_2$

p’ $=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=3i+2j$

1. 兩個座標系統的轉換關係：(i, j)表示

- **兩個座標系統的基底向量轉換關係**





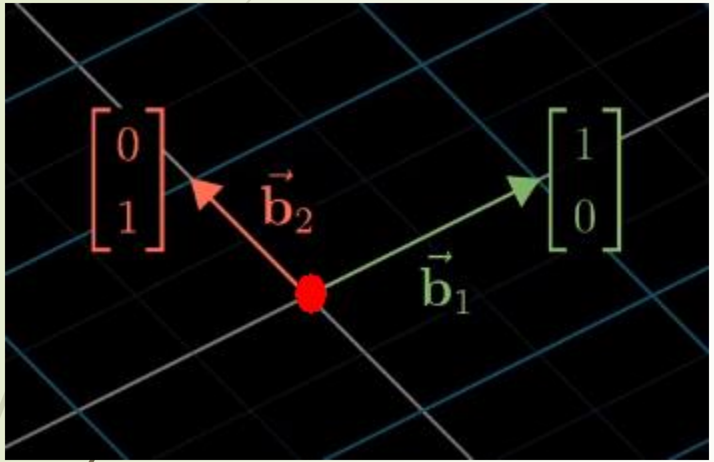
- $\boldsymbol{S'}$座標　　　　　　　　　　S座標

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\,i + 1\,j$$

$$b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1\,i + 1\,j$$

範例1：在S'座標系統的$v' = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$，在$S$座標是？

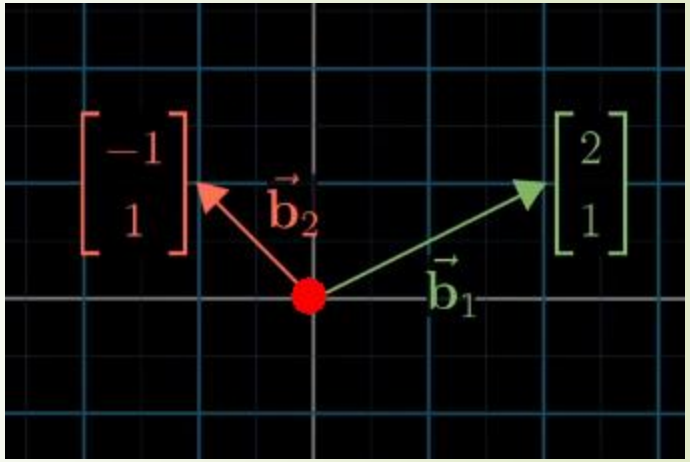
- S'座標



$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2i + 1j$

$b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1i + 1j$

S座標

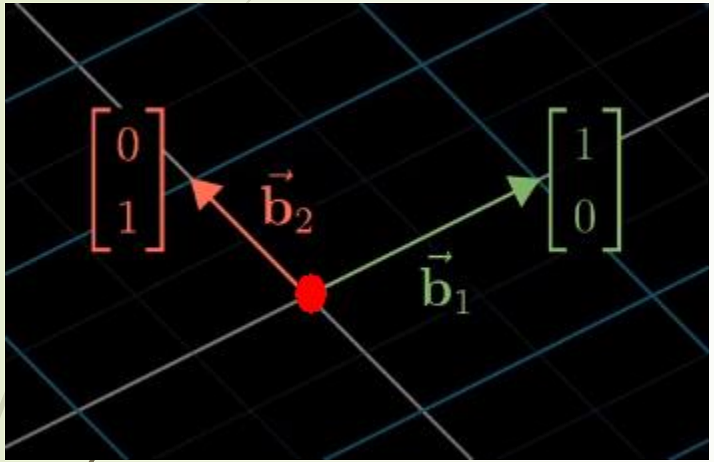


- $v' = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{S'} = -1b_1 + 2b_2 = -1(2i + 1j) + 2(-1i + 1j)$
- $= -4i + 1j = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_S$

範例2：S'座標$v' = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$，用矩陣轉換，求$S$座標是？

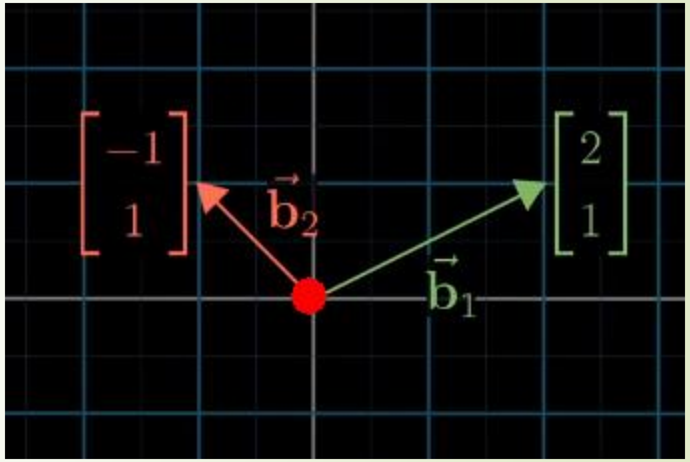
- S'座標

S座標



$$b_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=2\,i+1\,j$$

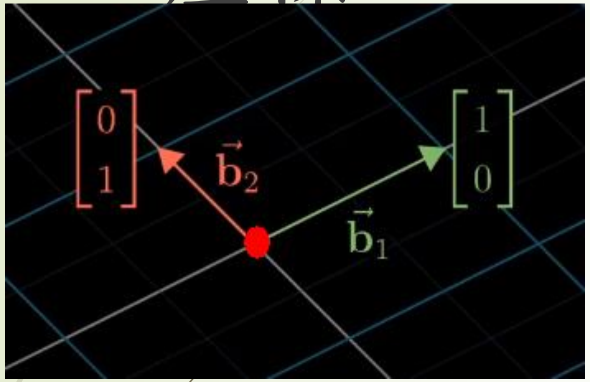
$$b_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=-1\,i+1\,j$$



- $v_S = \begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}_{S'\to S}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}_{S'}$
- $=\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}_S$

2. 兩個座標系統的轉換關係：矩陣表示

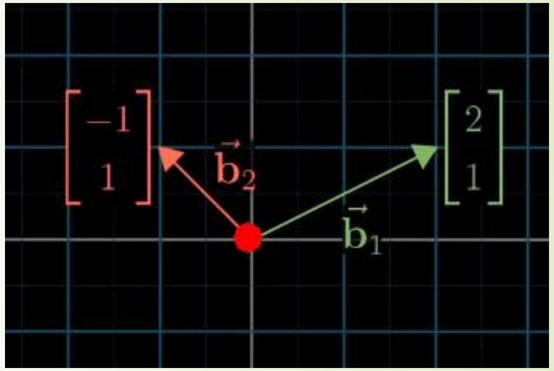
- S' 座標



$$b_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=2\,i+1\,j$$

$$b_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=-1\,i+1\,j$$

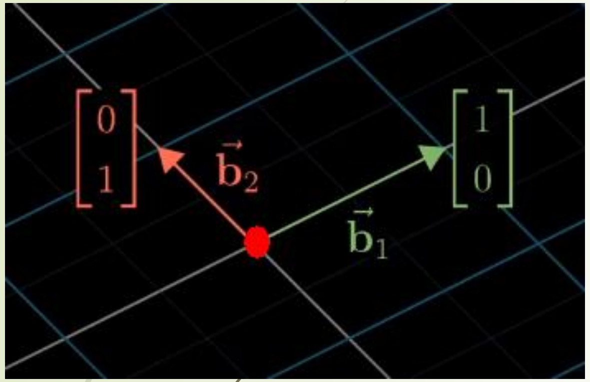
S座標



- 轉換公式 $=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}_{S'基底}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\1&1\end{bmatrix}_{s基底}$
- 應用範例2：在S'座標的$\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$，在S座標是？
- $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}_{S'基底}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\1&1\end{bmatrix}_{s基底}=\begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}_{s}$

3. 兩個座標系統的轉換關係：逆推轉換

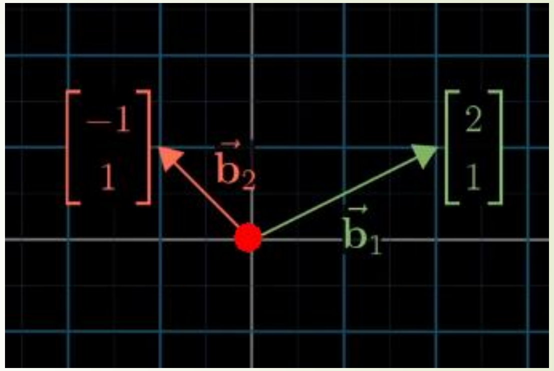
- S'座標



$$b_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=2\,i+1\,j$$

$$b_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=-1\,i+1\,j$$

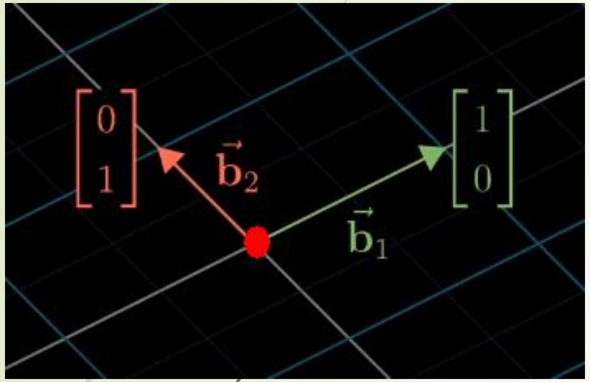
S座標



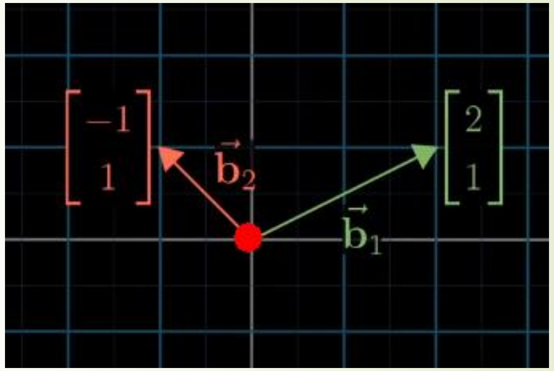
- 1. 正轉換公式 $=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}_{S'基底}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}_{s基底}$
- 2. 逆轉換公式 $=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}_{s基底}=\begin{bmatrix}? & ?\\? & ?\end{bmatrix}_{S'基底}=\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1}_{S'基底}$

逆矩陣的物理意義：由s座標反推S'座標

- S座標



- S'座標



$$b_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=2\,i+1\,j$$

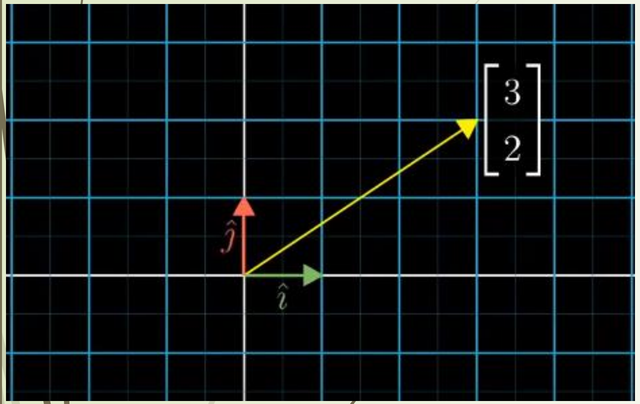
$$b_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=-1\,i+1\,j$$

- **1.** 正轉換公式 $=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}_{S'基底}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\1&1\end{bmatrix}_{s基底}$

- 2. 逆轉換公式 $=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}_{s基底}=\begin{bmatrix}?&?\\?&?\end{bmatrix}_{S'基底}=\begin{bmatrix}2&-1\\1&1\end{bmatrix}^{-1}_{S'基底}$

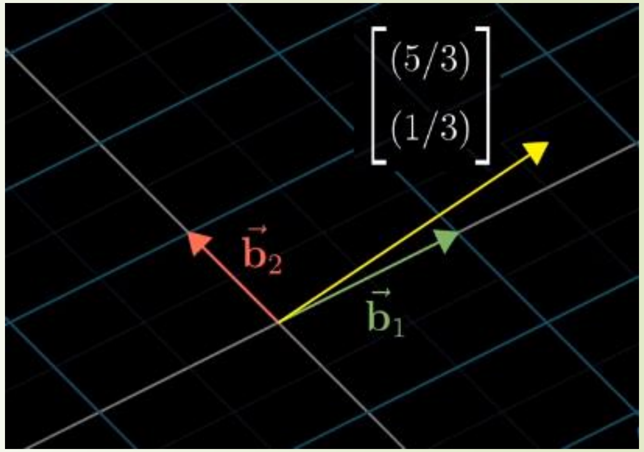
逆矩陣的物理意義：由s座標反推S'座標

- 兩個座標系統看同一個位置的p向量



正轉換公式 $= \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{S'基底} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{s基底}$

逆轉換公式 $= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{s基底} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}_{S'基底}$



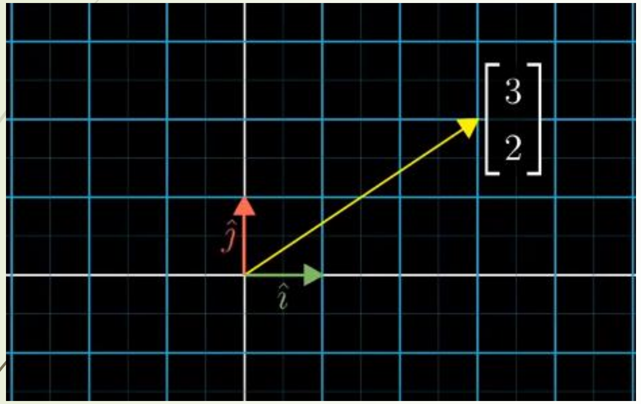
- S座標 S'座標

- 應用範例3：在S座標的$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$，在$S'$座標是？

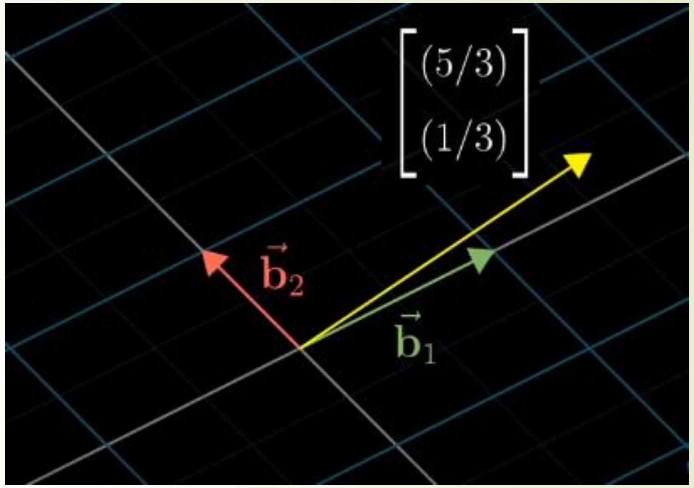
- $\begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix}_{s'基底} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}_{S'基底} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_{s基底}$ =??

範例3：S座標 $v=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$，用你矩陣轉換，求$S'$座標v'是？

- **兩個座標系統看同一個位置的p向量**



同一個向量v



- S座標

S'座標

- $\begin{bmatrix}x1\\x2\end{bmatrix}_{s基底} = \begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1}_{s'基底}$

- 應用範例3：在S座標的$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$，在$S'$座標是？

$$=\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1}_{s'基底}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_{s基底}=\begin{bmatrix}1/3 & 1/3\\-1/3 & 2/3\end{bmatrix}_{s'基底}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_{s基底}=\begin{bmatrix}5/3\\1/3\end{bmatrix}_{s'基底}$$

結論：正轉換，逆轉換

- 1. 正轉換

$$A_{轉成s基底}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{S'基底} = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix}_{s基底}$$

$Ax=v$

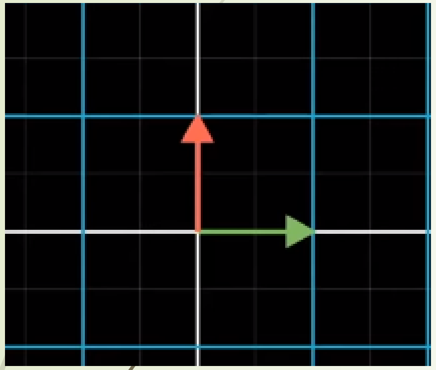
- 2. 逆轉換

$$A^{-1}_{轉成s'基底}\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix}_{s基底} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{S'基底}$$

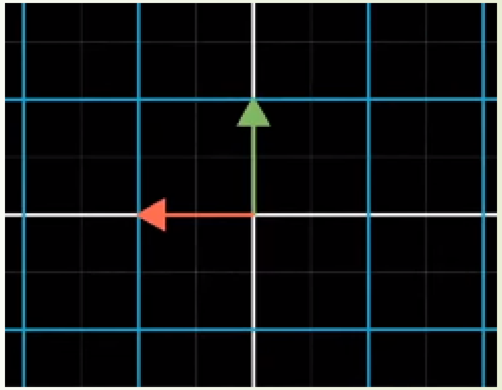
$x=\mathrm{A}^{-1}v$

4. S座標逆時針旋轉90度的轉換矩陣

S座標



Sr座標



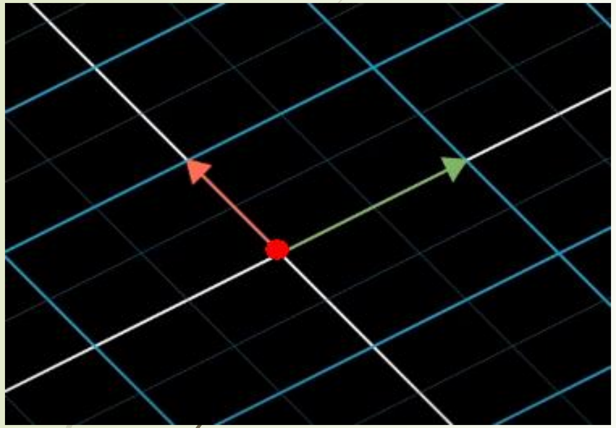
$$x_{1r}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{s\text{基底}}$$

$$x_{2r}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}_{s\text{基底}}$$

1. 旋轉換公式 $=\begin{bmatrix}x_{1r}\\x_{2r}\end{bmatrix}_{sr\text{基底}}=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}_{s\rightarrow sr\text{基底}}$

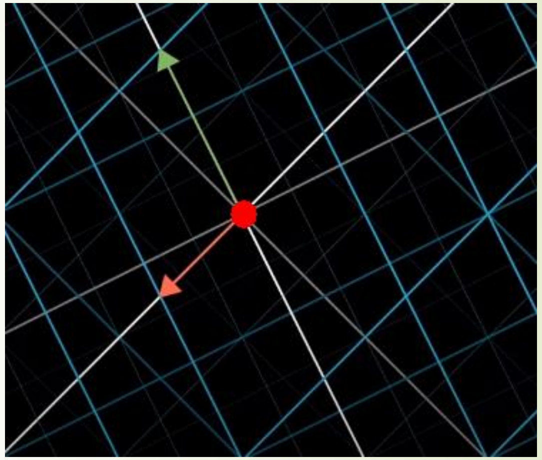
5. 求S'座標逆時針旋轉90度的轉換矩陣？

- S'座標



？？？

S'r座標

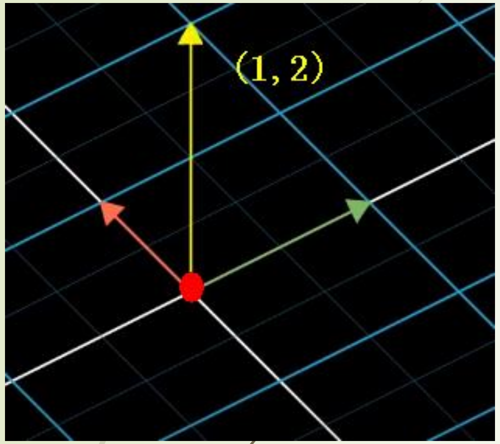


(1). 注意：S'座標的旋轉矩陣A不是$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，那是直角S坐標的旋轉矩陣，不是$S'$座標的旋轉矩陣

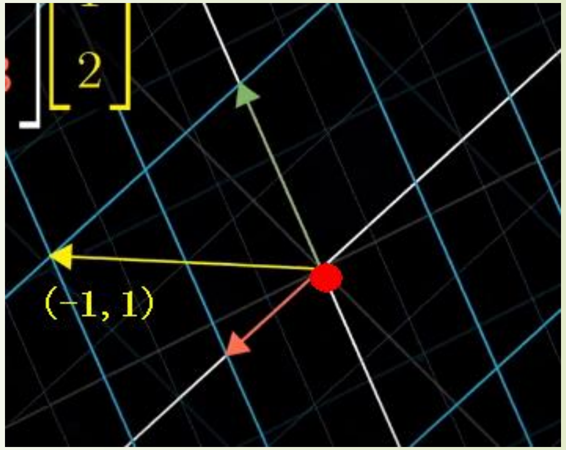
(2). 原理：把S'座標 →轉成S座標→再旋轉90度$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ → 再轉成S'座標

範例4：求S'座標的$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$逆時針旋轉90度的位置？

S'座標



$S'r$座標



？？？

正轉換公式 $= \begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}_{S'基底} = \begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}_{s基底}$

逆轉換公式 $= \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}_{s基底} = \begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1}_{S'基底}$

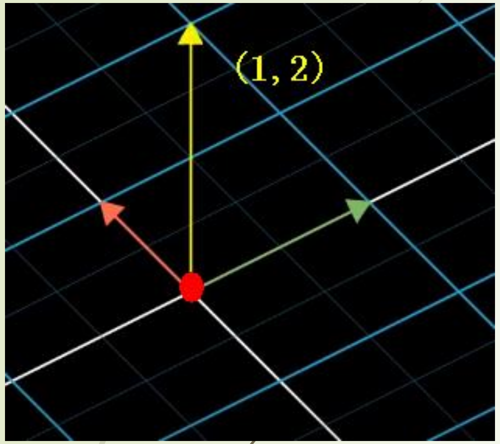
(1). **原理**：把S'座標 →轉成S座標→再旋轉90度$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$ → 再轉成S'座標

- $p = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}_{sr} \begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}_{s基底} \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}_{sr} \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix}_{s基底}$
- $p' =$

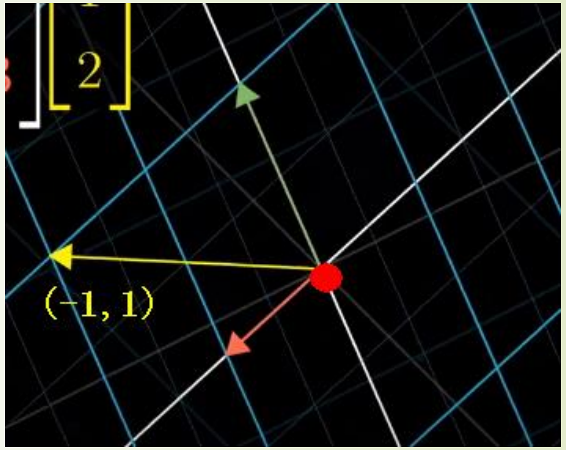
$\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1}_{S'基底} \begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix}_{s基底} = \begin{bmatrix}1/3 & 1/3\\-1/3 & 2/3\end{bmatrix}_{S'基底} \begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix}_{s基底} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}_{S'基底}$

範例4：求S'座標的$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$逆時針旋轉90度的位置？

S'座標



S'r座標



？？？

正轉換公式 $= \begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}_{S'基底} = \begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}_{s基底}$

逆轉換公式 $= \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}_{s基底} = \begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1}_{S'基底}$

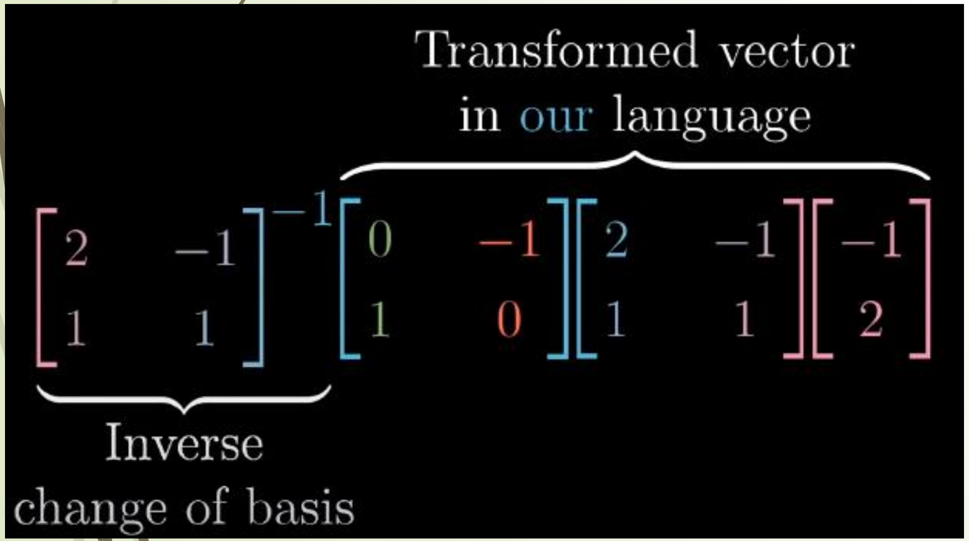
(1). **原理**：把S'座標 →轉成S座標→再旋轉90度$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$ → 再轉成S'座標

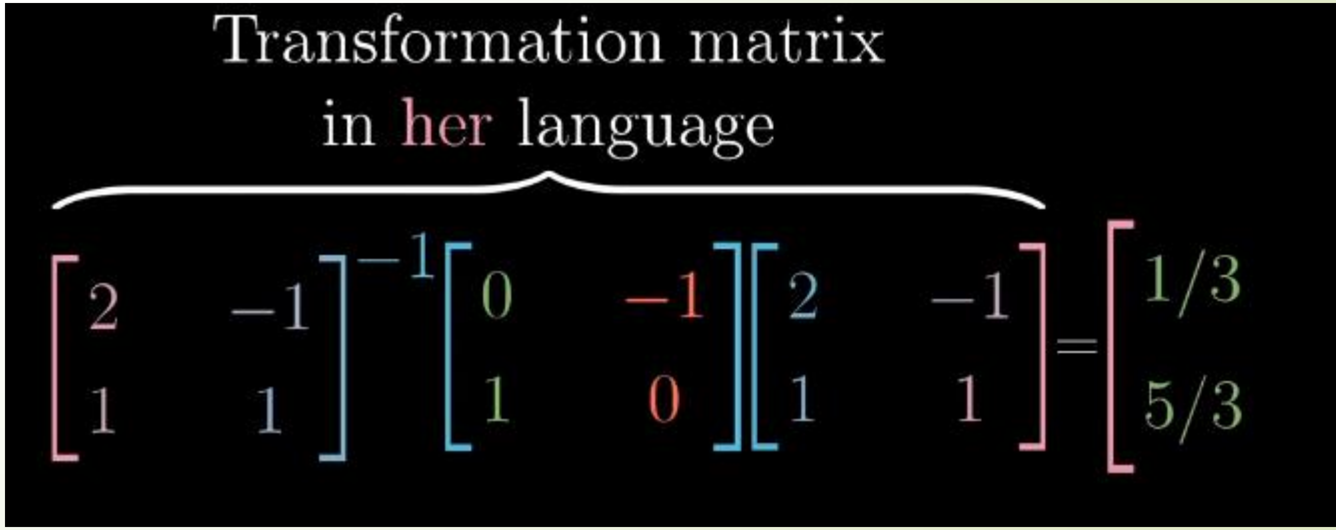
- $p = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}_{sr} \begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}_{s基底} \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}_{sr} \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix}_{s基底}$
- $p' =$

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1}_{S'基底} \begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix}_{s基底} = \begin{bmatrix}1/3 & 1/3\\-1/3 & 2/3\end{bmatrix}_{S'基底} \begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix}_{s基底} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}_{S'基底}$$

結論：S'座標的$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$逆時針旋轉90度的位置？

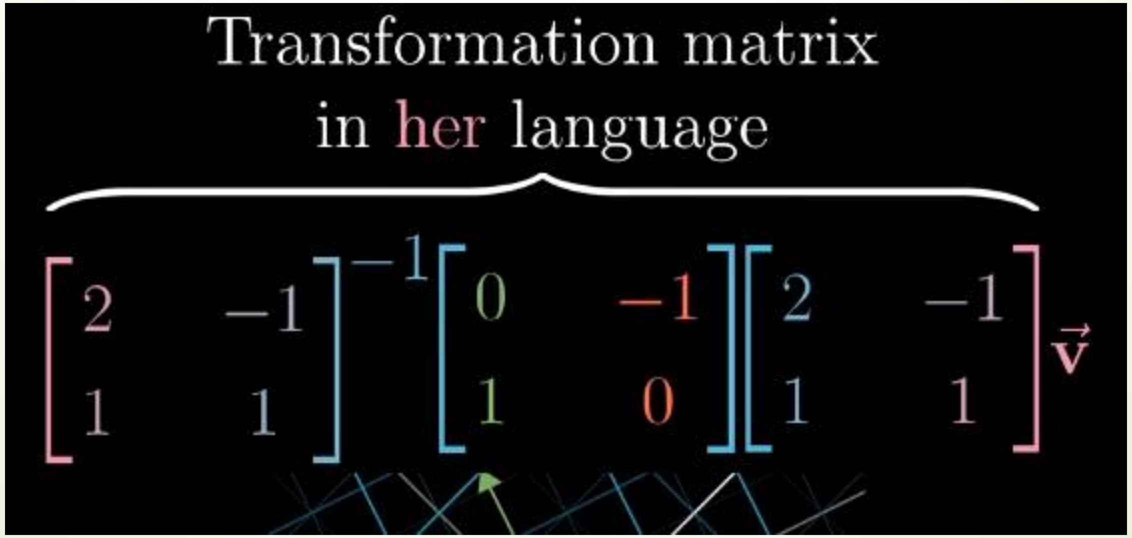
- 在S'座標的向量$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，轉90度後的位置（$S'$座標）
- $\begin{bmatrix}2&-1\\1&1\end{bmatrix}^{-1}_{S'\text{基底}}\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}_{sr}\begin{bmatrix}2&-1\\1&1\end{bmatrix}_{s\text{基底}}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$





6. 通式：S'座標的$\vec{v}$向量更動後的位置？

- 在S'座標的向量$\vec{v}$，更動移動後，的位置（S'座標）
- $\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}_{S'基底}$ M 變動轉換矩陣 $\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}_{s基底}$ $\vec{v}$



7. 通式：$A^{-1}MA$ =二次轉換=視角轉換＋動作轉換

- 在S'座標的向量$\vec{v}$，更動移動後，的位置（S'座標）
- $\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1}_{S'\text{基底}}$ M 變動轉換矩陣 $\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}_{s\text{基底}}$ $\vec{v}$
- =$A^{-1}MA$
  - A是視角轉換矩陣
  - M是動作轉換矩陣