chp14：線性代數的本質：
特徵向量、特徵值、特徵基底

陳擎文老師

線性代數的學習重點與探討主題

觀念

- 數學符號的意義

基礎

- 向量
- 矩陣
- 聯立方程式
- 行列式

主題

- 線性映射
- 坐標轉換
- 特徵向量

線性代數的學習重點

觀念

- 數學符號的意義

基礎

- 向量，張量
- 3D矩陣
- 行列式
- 聯立方程式

- 矩陣乘法
- 反矩陣
- 行空間，rank，零空間
- 非方陣的矩陣轉換

- 內積
- 外積
- Cramers rule
- 變換基底向量

主題

- 線性映射
- 坐標轉換
- $A^{-1}MA$=視角轉換＋動作轉換
- 特徵向量，特徵值，特徵基底

線性代數授課的兩條線

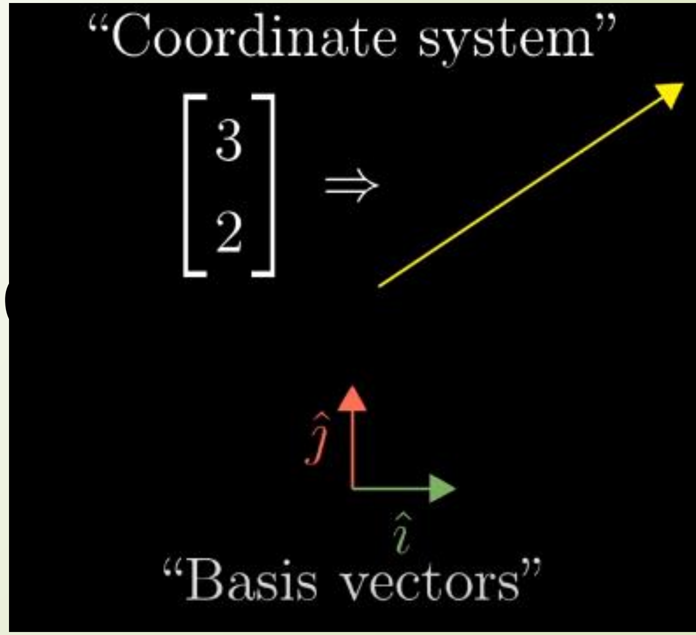
- (1). 了解線性代數的本質
  - 了解其背後的物理意義
  - 了解關鍵重點
- (2). 學習如何計算
  - 了解數學的定義，公式，定理，證明
  - 練習計算

參考資料

- https://www.youtube.com/watch?v=PFDu9oVAE-g&t=379s

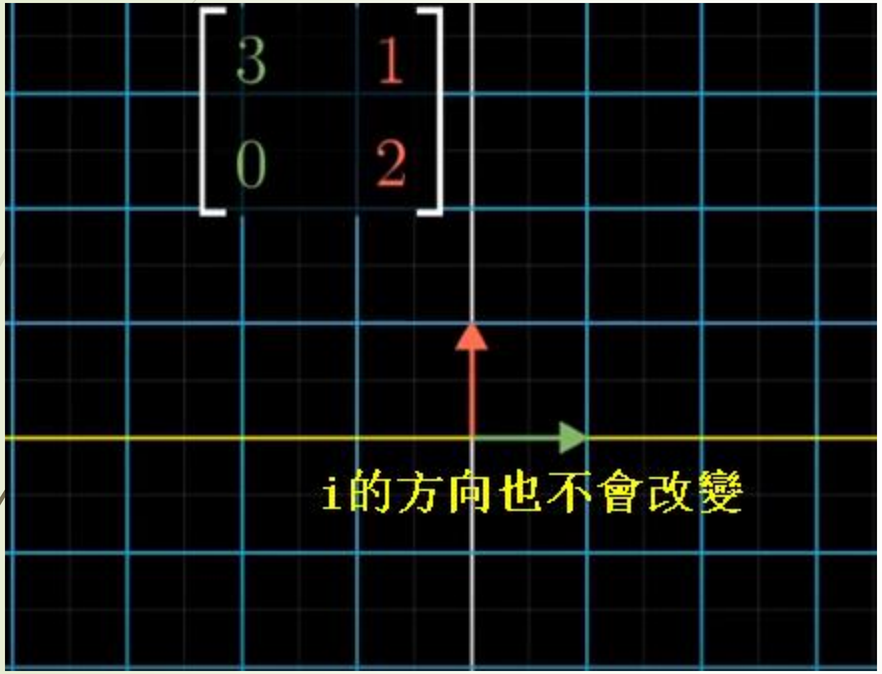
探討主題

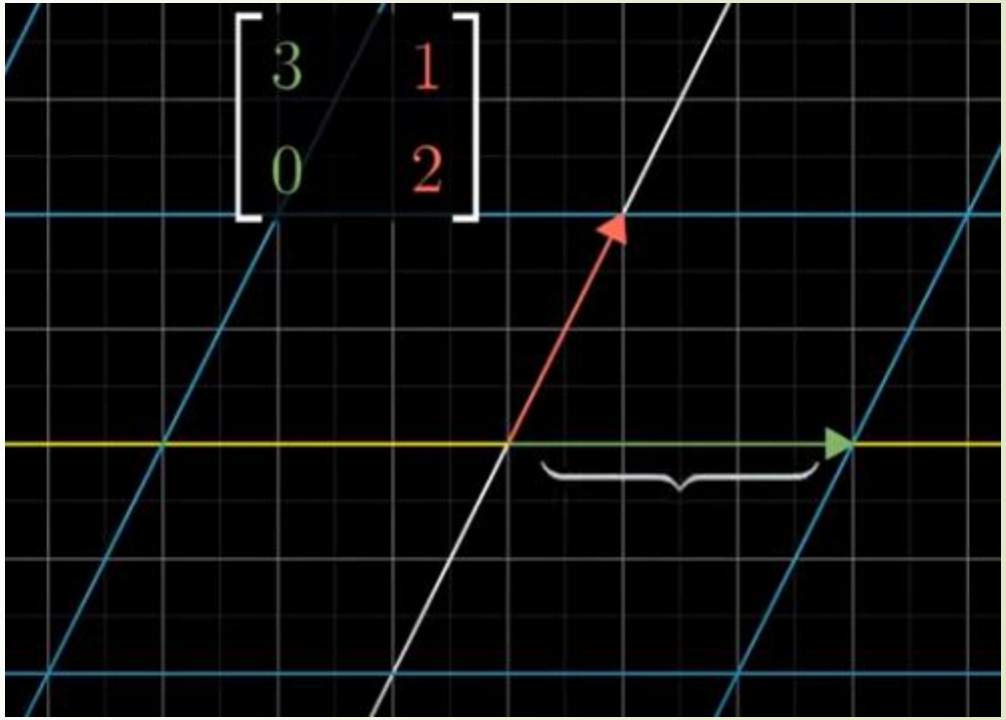
- $A^{-1}MA$：視角轉換＋動作轉換
- 特徵向量：Eigenvectors(德國語)
- 特徵值：Eigenvalues
- 特徵基底：EigenBasis
- 對角線矩陣：Diagonal Matri



1. 特徵向量：Eigenvectors

- 座標轉換前後，有些向量所在方向不會被改變
- (1).

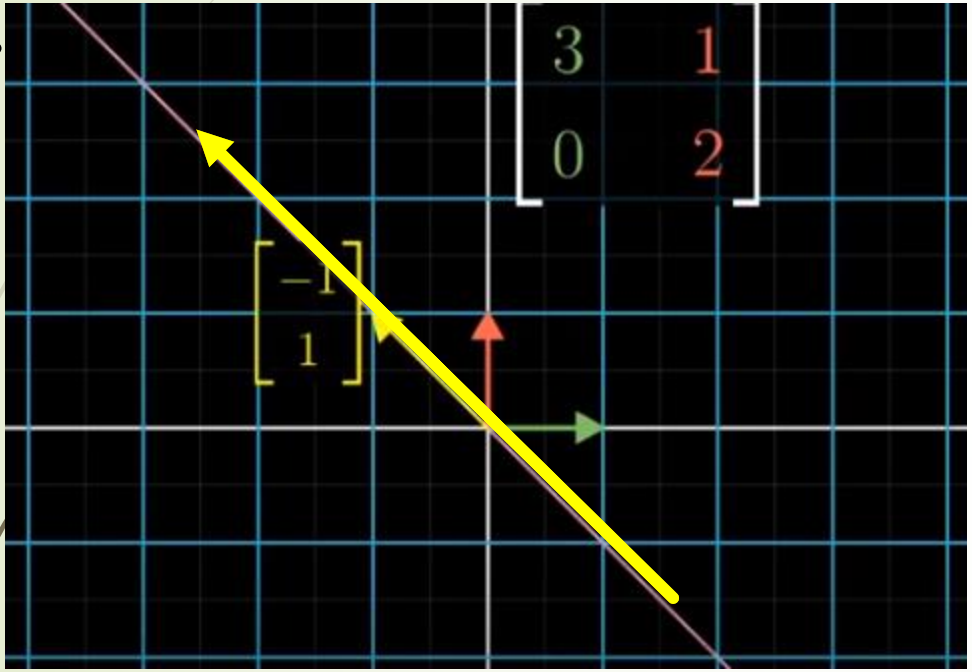


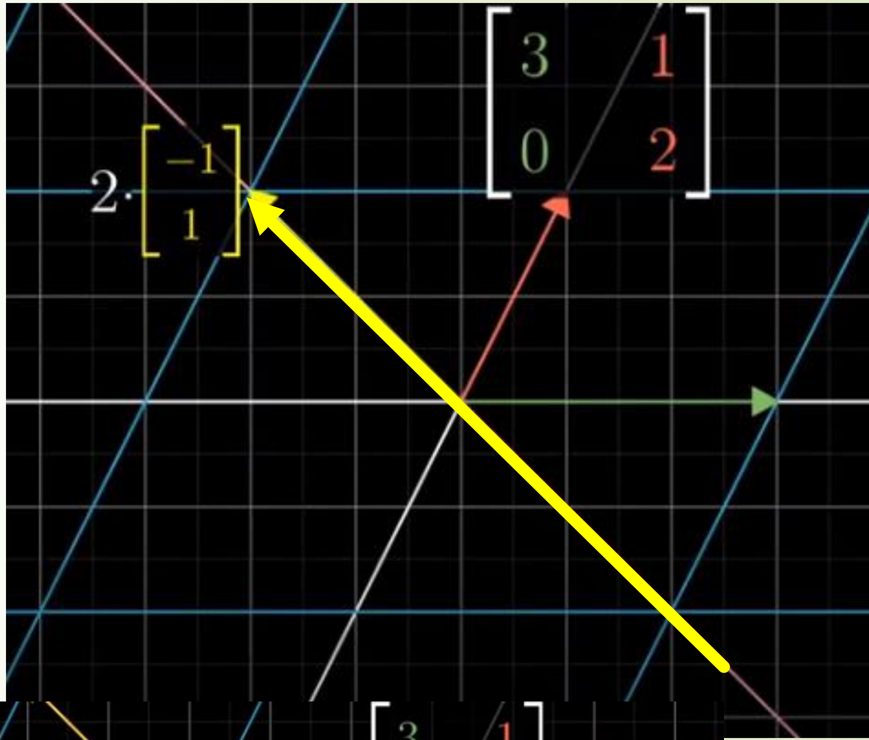


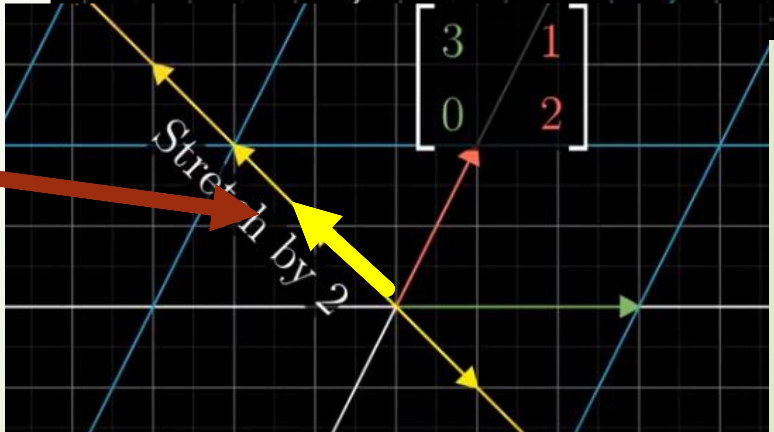
- X軸i方向也沒有被改變，而且i被拉長3倍
- **i是特徵向量，特徵值是3**

1. 特徵向量：Eigenvectors

- 座標轉換前後，有些向量所在方向不會被改變
- (2).



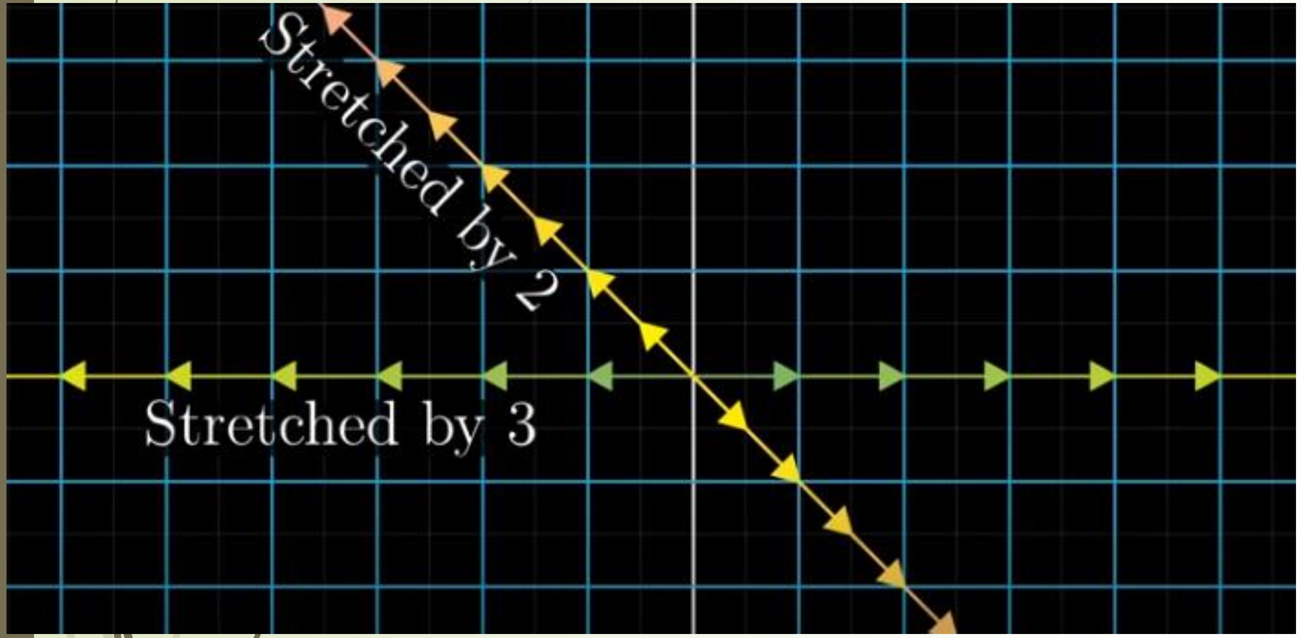


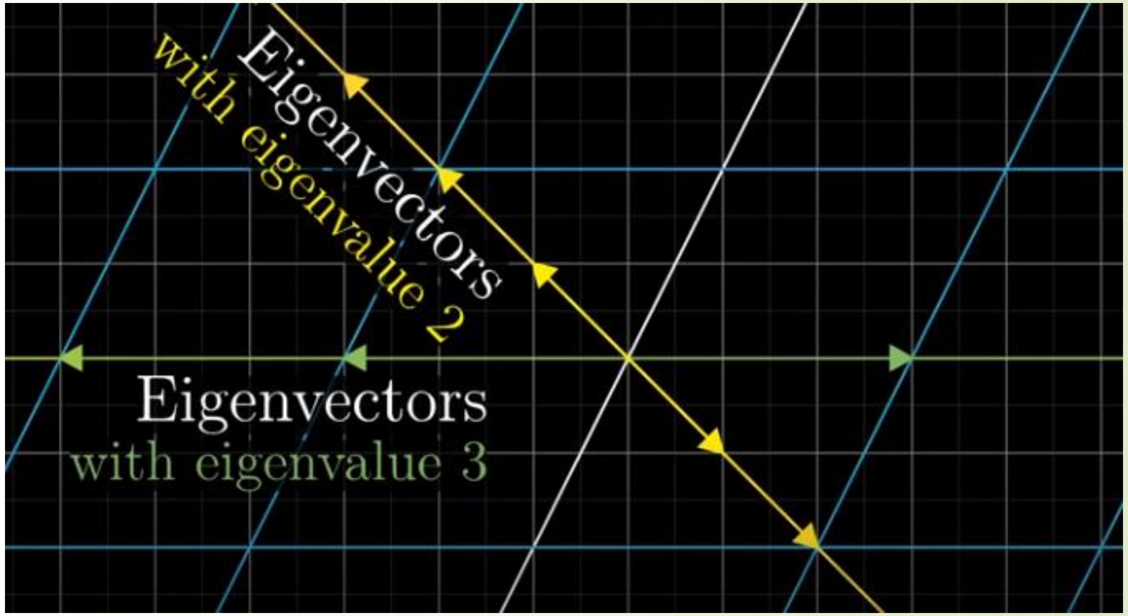


- (-1, 1)方向也沒有被改變，而且i被拉長2倍
- (-1, 1)**是特徵向量，特徵值是2**

1. 特徵向量：Eigenvectors

- 座標轉換前後，有些向量所在方向不會被改變

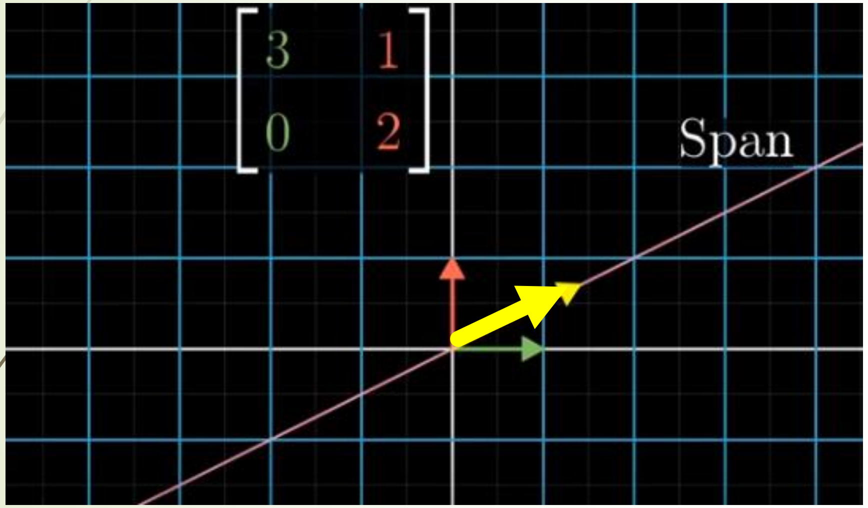


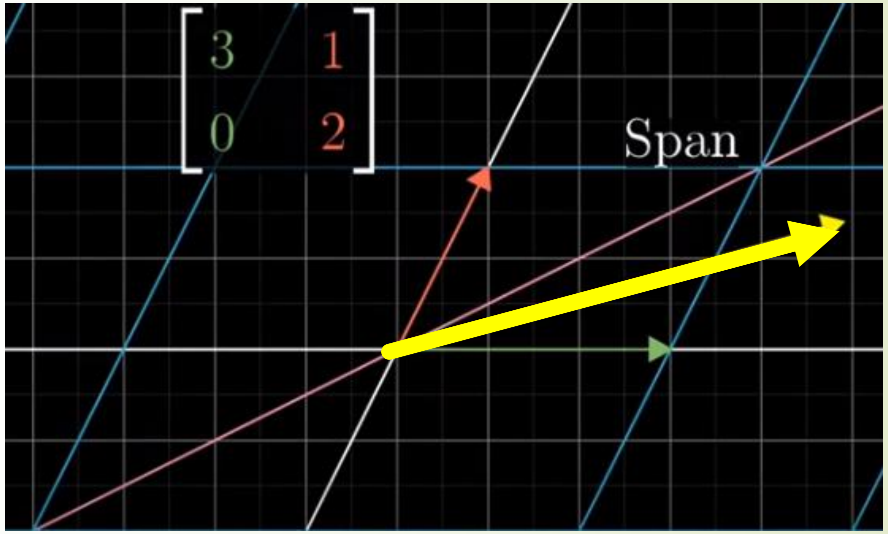


- 這些不會被改變方向的向量=特徵向量
- 特徵向量，被轉換後的變形縮放率=特徵值

1. 特徵向量：Eigenvectors

- 座標轉換前後，大部分的向量所在方向會被改變
- (1).



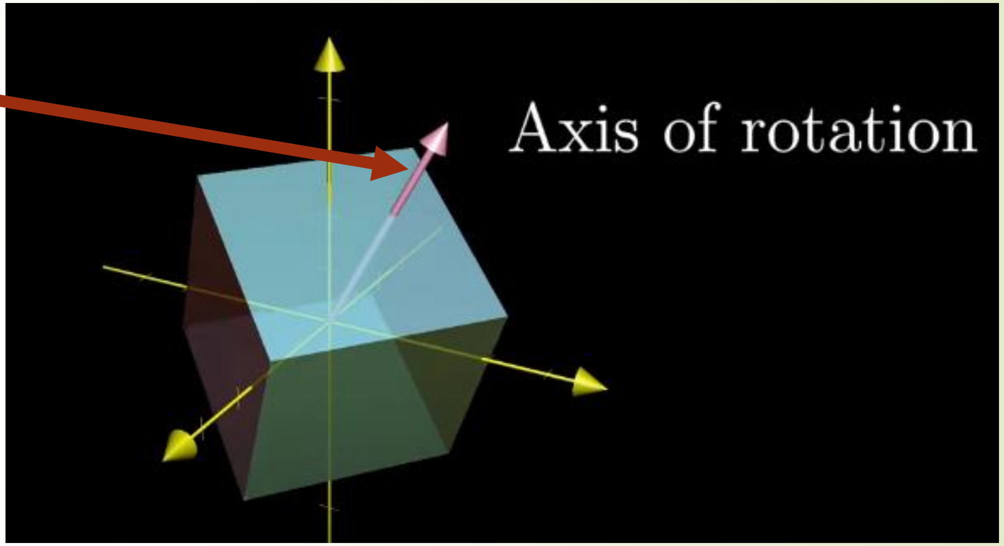


2.特徵向量的用途(1)

- (1).因為，特徵向量在變形轉換後，方向不會變
  - 可以當作3D旋轉的『旋轉軸』
  - 特徵向量Eigenvectors

  = axis of rotation

  - rotate 30 around $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$



- (2).**優點：清楚簡單表達：**
  - 例如**旋轉軸=特徵向量=rotate 30 around** $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Rotate 30° around $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

  - 若用傳統矩陣表示旋轉軸很複雜

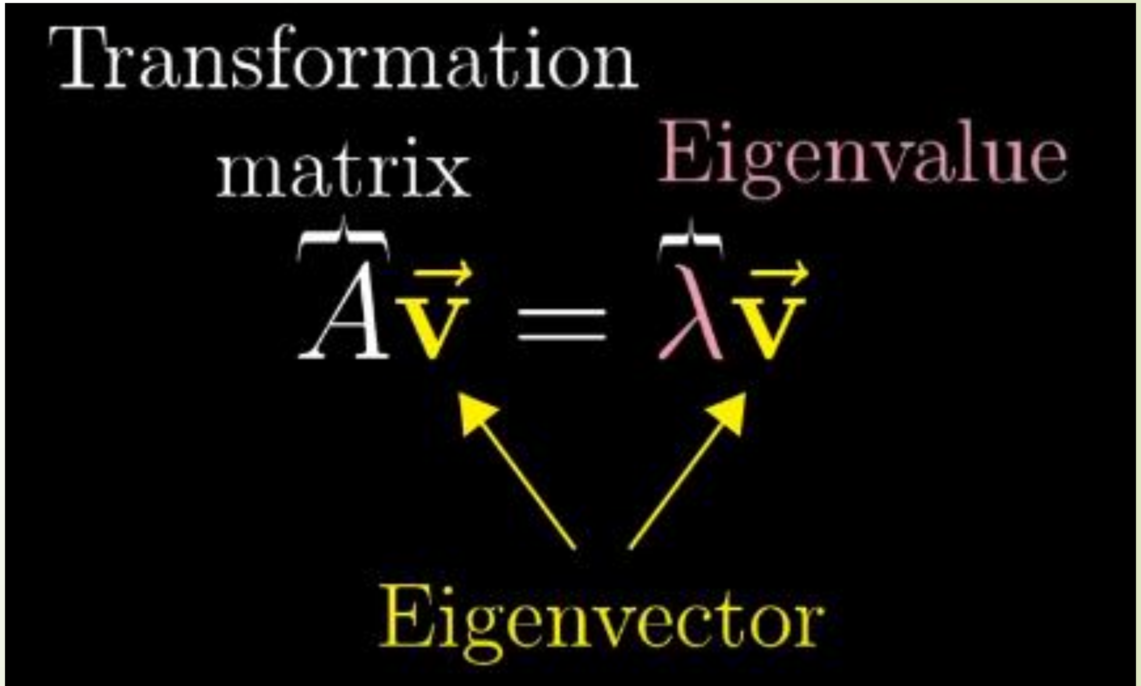
$$\begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) & -\sin(\phi) & \cos(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\cos(\phi) & \cos(\theta) & \sin(\theta)\sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

3. 特徵向量的用途(2)

- (1). 座標轉換的方式，
  - 最常用的方法：找出特徵向量，當作基底向量
  - 不是用之前我們隨意選擇的向量變換
- (2). 優點：
  - 1. 特徵向量不會被變形
  - 2. 特徵值矩陣，只出現在對角線，計算會變得很簡單

3. 特徵向量特徵值公式

- $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
  - $\vec{v}$：特徵向量，Eigenvectors
  - λ ：**特徵值，Eigenvalues**
- 求解$\vec{v}\ \lambda = ?$
- 求解特徵向量特徵值

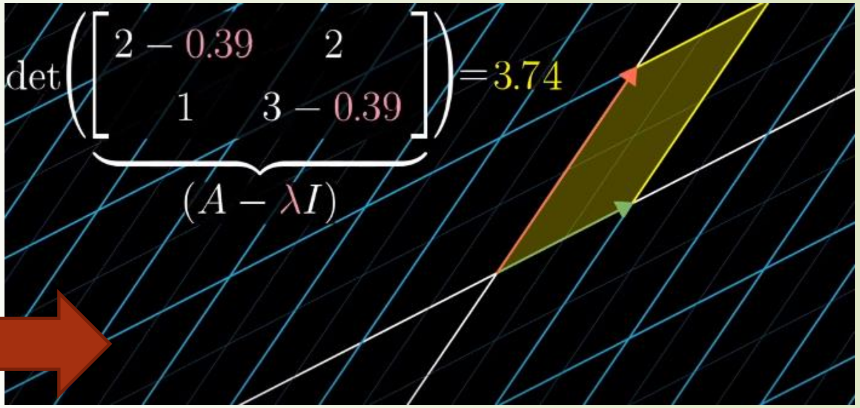


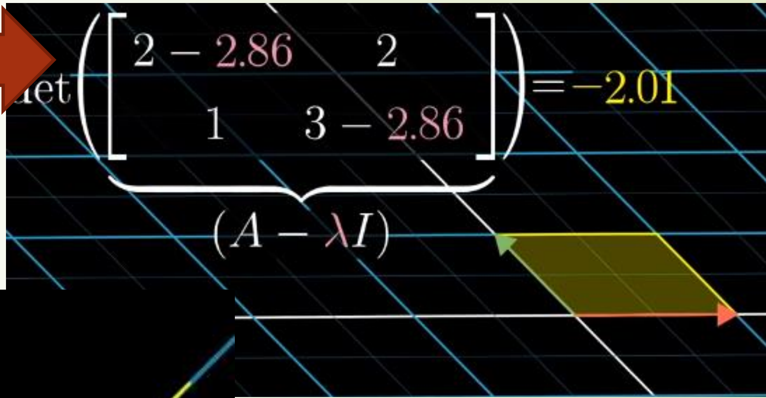
3. 特徵向量特徵值公式

- $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
  - λ特徵值是個係數，會乘到$\vec{v}$的每個分量
  - 實際變成 $\lambda I=\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$
- $A\vec{v} = \lambda I\vec{v}$
- $A\vec{v} - \lambda I\vec{v}=0$
- $(A-\lambda I)\vec{v} = 0$
- <u>所以(A-λI)必須為0</u>
- 也就是det(A-λI)=0 → $\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 4 \\ 1 & 5-\lambda & 9 \\ 2 & 6 & 5-\lambda \end{bmatrix}$
- 轉換矩陣(A-λI)=0，代表網格變形後，被壓縮到面積為0，緯度降階(不是full rank)

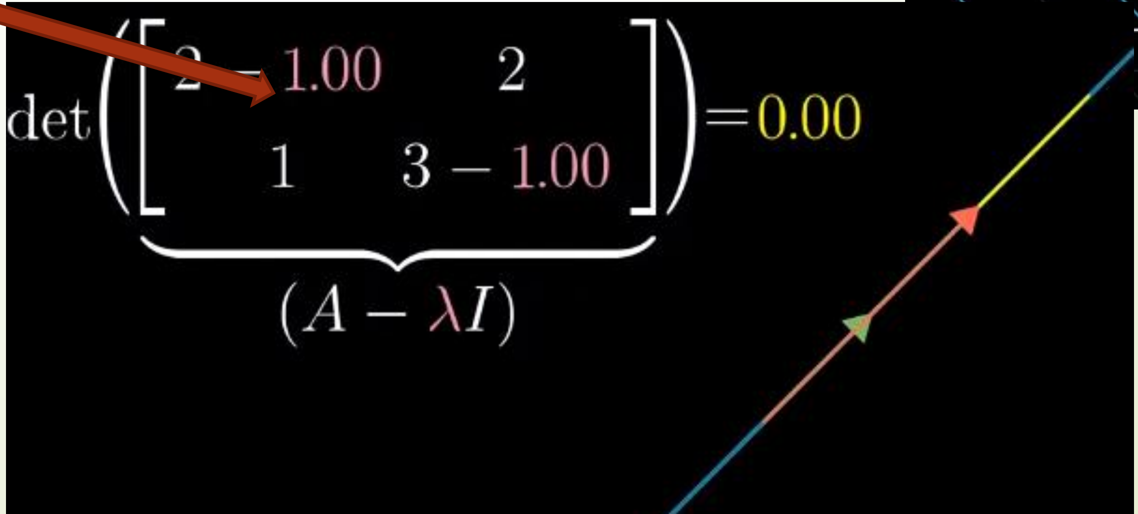
4. 求解特徵向量特徵值公式：det(A- λ I)=0

- $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
- $(A-\lambda I)\vec{v} = 0$，所以(A- λ I)必須為0
- (1). 不同的λ造成不同的網格變形





- (2). 但有個λ造成造成網格面積擠壓為0
  - det(A- λ I)=0
  - 這個 $\lambda=1$就是特徵值



5. 結論：特徵向量特徵值公式

- $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$
- $A\vec{v} = \lambda I\vec{v}$
- $A\vec{v} - \lambda I\vec{v} = 0$
- $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$
- $\det(A - \lambda I) = 0$

$$A\vec{\mathbf{v}} = \lambda\vec{\mathbf{v}}$$

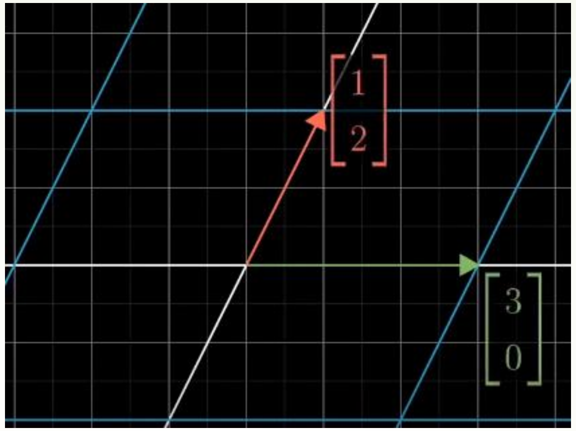
$$A\vec{\mathbf{v}} - \lambda I\vec{\mathbf{v}} = 0$$

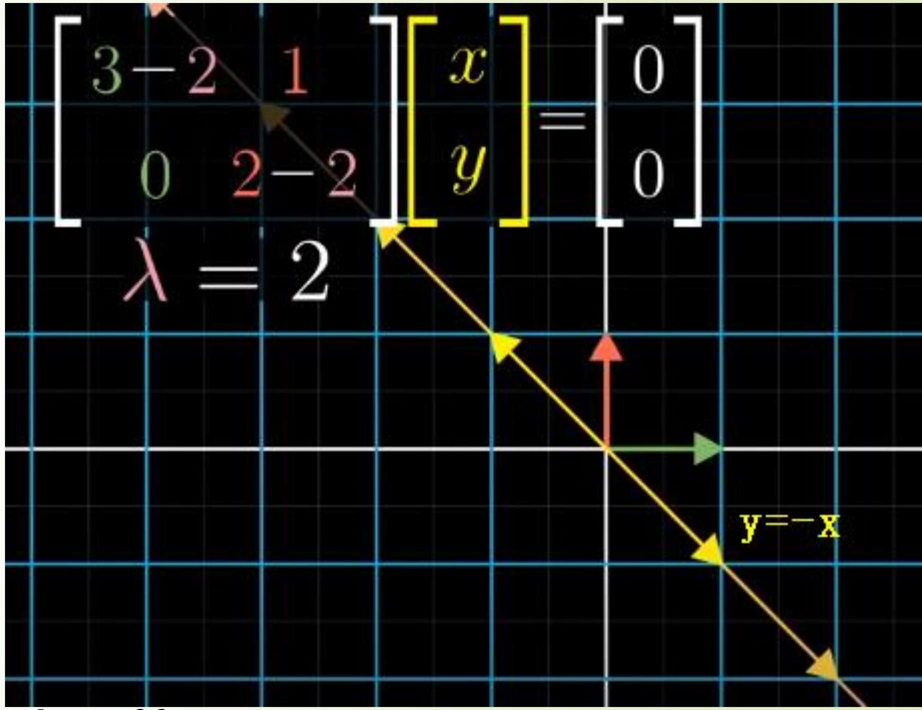
$$(A - \lambda I)\vec{\mathbf{v}} = 0$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

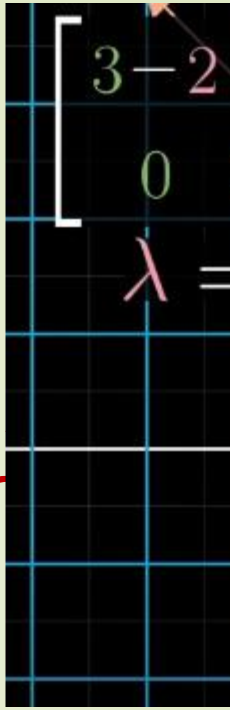
範例1：求座標轉換矩陣$\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$的EigenVector，Eigenvalue

- $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
- 1. det(A−λI)=0
  - $\det\left(\begin{bmatrix}3-\lambda & 1\\0 & 2-\lambda\end{bmatrix}\right)=0$
  - $(2-\lambda)(3-\lambda)=0$
  - 所以λ=2、或3
- 2. 若λ=2，求$\vec{v}$ EigenVector
  - $\begin{bmatrix}3-\lambda & 1\\0 & 2-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-2 & 1\\0 & 2-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=0$
  - 這個聯立方程式解有無限多個，需滿足y=−x這條線，或是$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$向量上
  - 特徵向量 $=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$





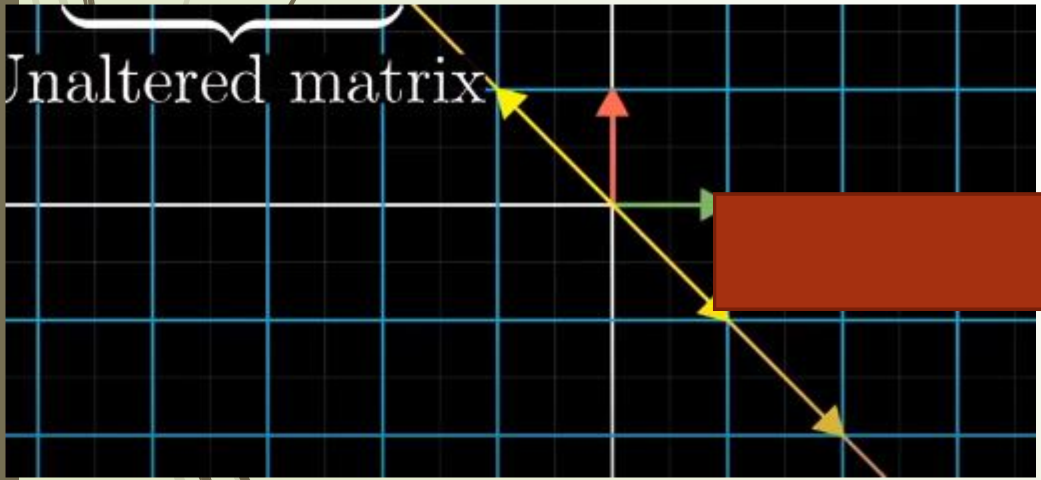
範例1：求座標轉換矩陣$\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}$的EigenVector，Eigenvalue

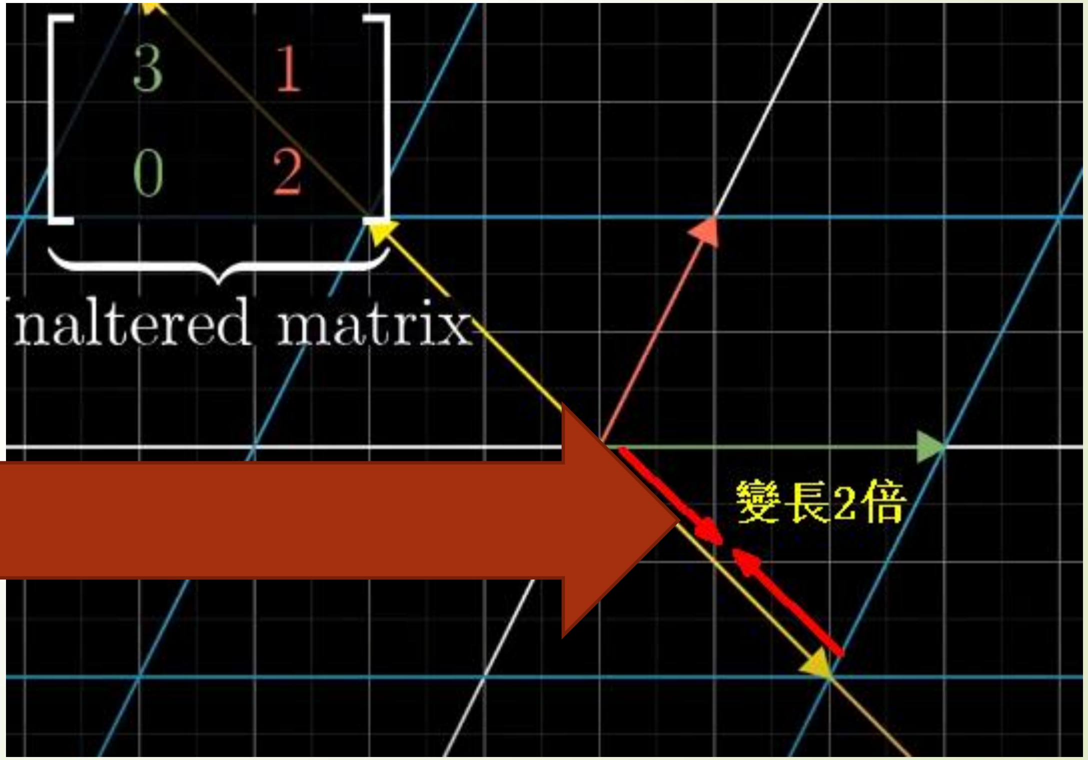


- 2. 若λ=2，求$\vec{v}$ EigenVector
  - $\begin{bmatrix}3-\lambda&1\\0&2-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-2&1\\0&2-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=0$
  - 這個聯立方程式解有無限多個，需滿足y=−x這條線，或是$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$向量
  - 特徵向量 = $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$，或y=−x
  - 原本座標上位於y=−x這條線，或是$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$向量的任何$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，座標轉換後，最後都會轉換到$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$直線上，而且長度會被放大2倍（Eigenvalue=2)
  - 例如：原本座標上的$\begin{bmatrix}-3\\3\end{bmatrix}$，轉換後=$\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\6\end{bmatrix}$，放大2倍
  - 例如：原本座標上的$\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$，轉換後=$\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-4\end{bmatrix}$，放大2倍

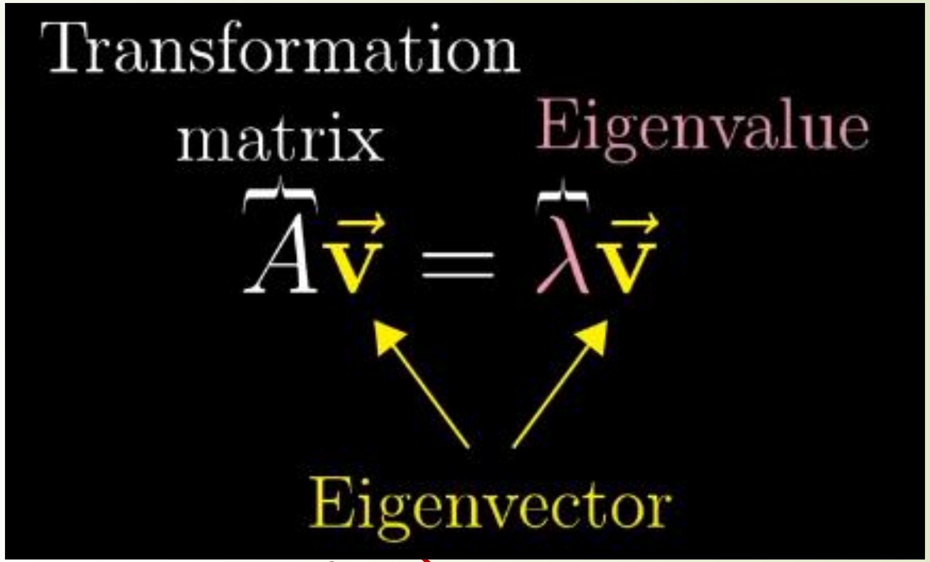
範例1：求座標轉換矩陣$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$的**EigenVector**，**Eigenvalue**

- **2. 若 λ=2，求$\vec{v}$ EigenVector**
  - 原本座標上位於y=-x這條線，或是$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$向量的任何$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，座標轉換後，最後都會轉換到$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$直線上，而且長度會被放大2倍（ Eigenvalue=2)





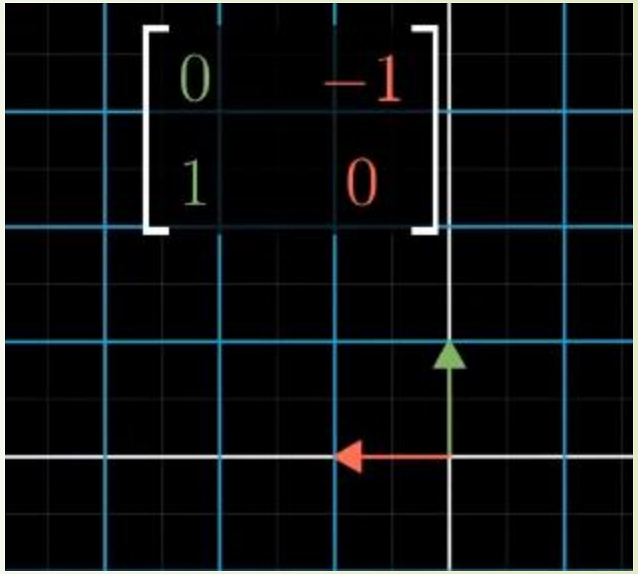
6. 特徵向量公式的物理意義



- $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
  - $\vec{v}$：特徵向量，Eigenvectors
  - λ：**特徵值，Eigenvalues**
- (1). $A\vec{v}$轉換後的向量p = 原本的向量$\vec{v}$的縮放λ倍
- (2). 也就是$\vec{v}$經過A轉換後的向量，就是$\vec{v}$它自己，只是縮放λ倍

7. 有些轉換矩陣沒有特徵向量

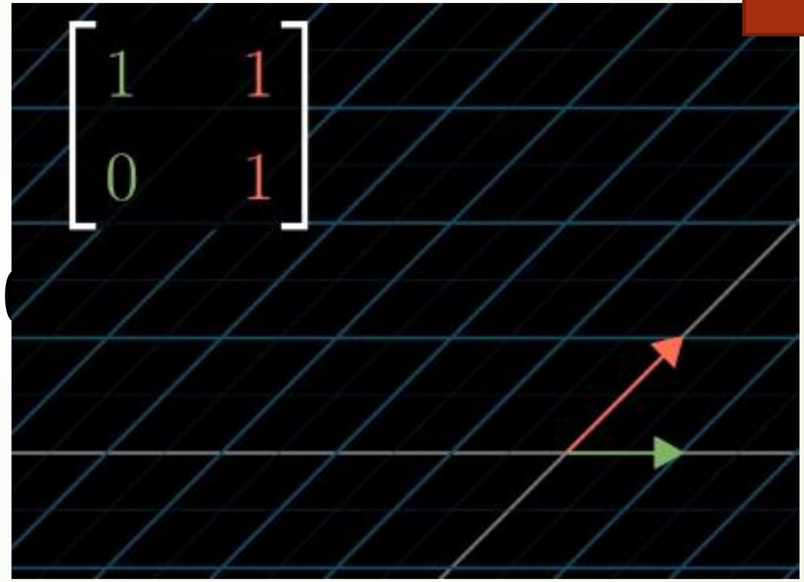
- 1. 例如：座標逆時針旋轉90度，$A=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

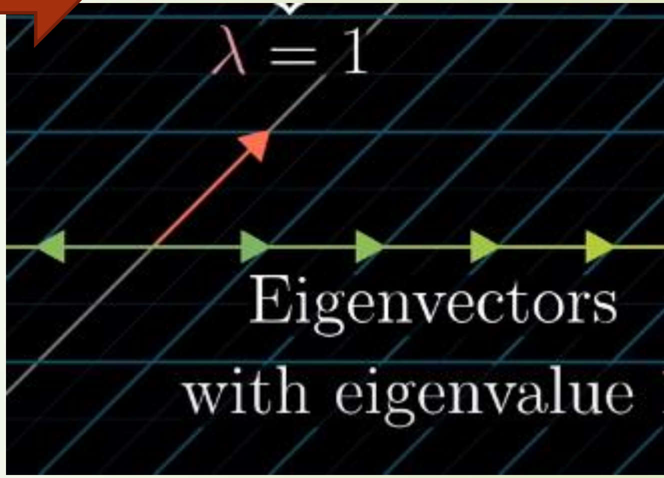


- $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
- $\det(A-\lambda I)=0$
- $\det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0}-\lambda & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0}-\lambda \end{bmatrix}\right)=0$
- $\lambda^2+1 = 0$
- λ=虛數$i, -i$

8. 剪切shear轉換矩陣的特徵向量

- 1. 例如：座標向右剪切shear，$A=\begin{bmatrix}1 & \mathbf{1}\\0 & 1\end{bmatrix}$
- 2. $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
  - det(<u>A- λ I</u>)=0
  - $\det(\begin{bmatrix}1-\lambda & \mathbf{1}\\0 & 1-\lambda\end{bmatrix})=$
  - $(1-\lambda)^2= 0$
  - $\lambda=1$

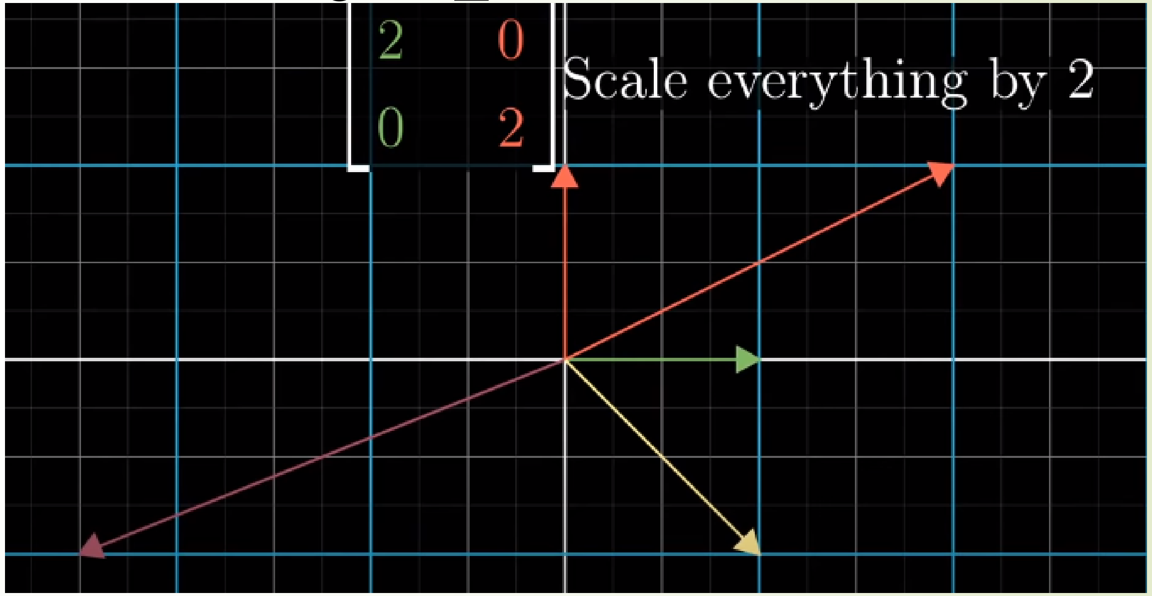




- 3. $(A-\lambda I)\,\vec{v}=\begin{bmatrix}1-1 & \mathbf{1}\\0 & 1-\mathbf{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \mathbf{1}\\0 & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=0$
  - y=0（就是x軸），縮放率=λ=1
- 4. x軸直線，剪切變換後，還是原本的x軸，刻度不變

9. 矩陣轉換後的特徵值可能一個，但特徵向量不在直線上

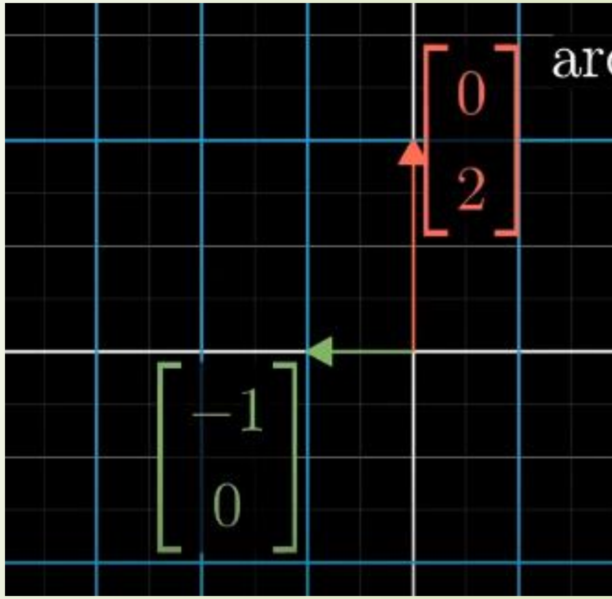
- 1. 例如：座標向平均放大2倍，A=$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$



- 2. $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
  - $\det(\underline{A-\lambda I})=0$
  - $\det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right)=0$
  - $(2-\lambda)^2=0$
  - $\lambda=2$
- 3. $(A-\lambda I)\vec{v}=\begin{bmatrix} 2-2 & 0 \\ 0 & 2-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=0$
  - (x, y)無限多組解，每一點都被放大$=\lambda=2$

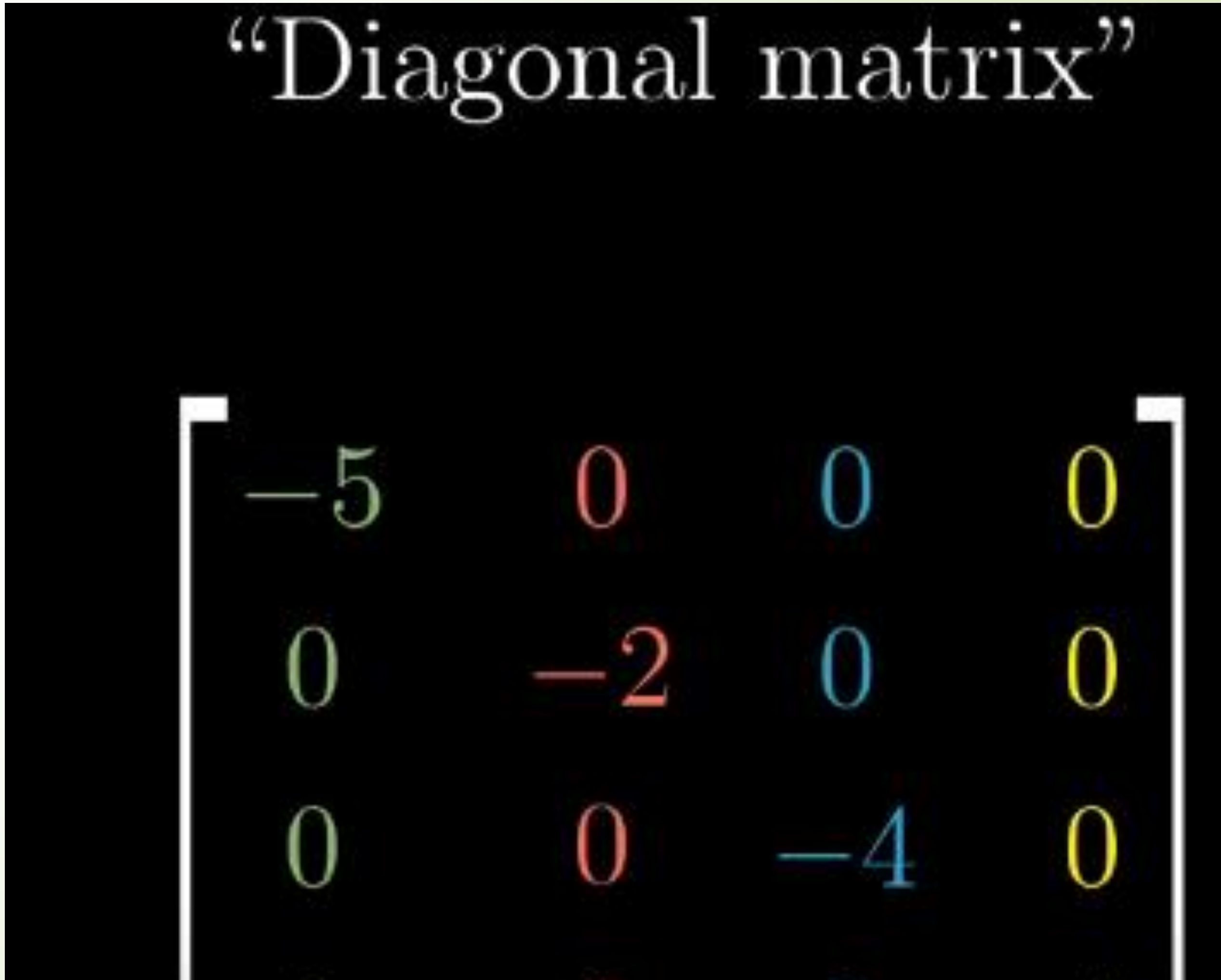
10. 什麼時候會發生，轉換後座標系統的基底向量，剛好就是特徵基底EigenBasis？

- 1. 例如：座標轉換矩陣，A=$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
- 2. 若轉換矩陣=對角線矩陣，則對角線每個值，都是特徵值
- 換言之：這個轉換矩陣後的座標基底，就是特徵向量
- 3. 證明：$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$，det(A-λI)=0
  - det($\begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$)=0
  - $(-1-\lambda)(2-\lambda) = 0$
  - λ=2，-1
- 4. $(A-\lambda I)\,\vec{v}$=$\begin{bmatrix} -1-2 & 0 \\ 0 & 2-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$=0
  - x=0 （特徵向量就是y軸$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$，放大2倍）
- 5. $(A-\lambda I)\,\vec{v}$=$\begin{bmatrix} -1+1 & 0 \\ 0 & 2+\mathbf{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$=0
  - y=0 （特徵向量就是x軸$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$，放大-1倍）



11. 只要是座標轉換矩陣是對角線矩陣，每個值都是特徵值=縮放率

- 對角線矩陣：Diagonal Matri
- 特徵值=對角值=縮放率
- 特徵向量=原本的i,j,k軸.



12. 對角線矩陣的應用優點：方便計算矩陣n次方

- 對角線矩陣：Diagonal Matrices

$$\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3^3x\\2^3y\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}3^4x\\2^4y\end{bmatrix}$$

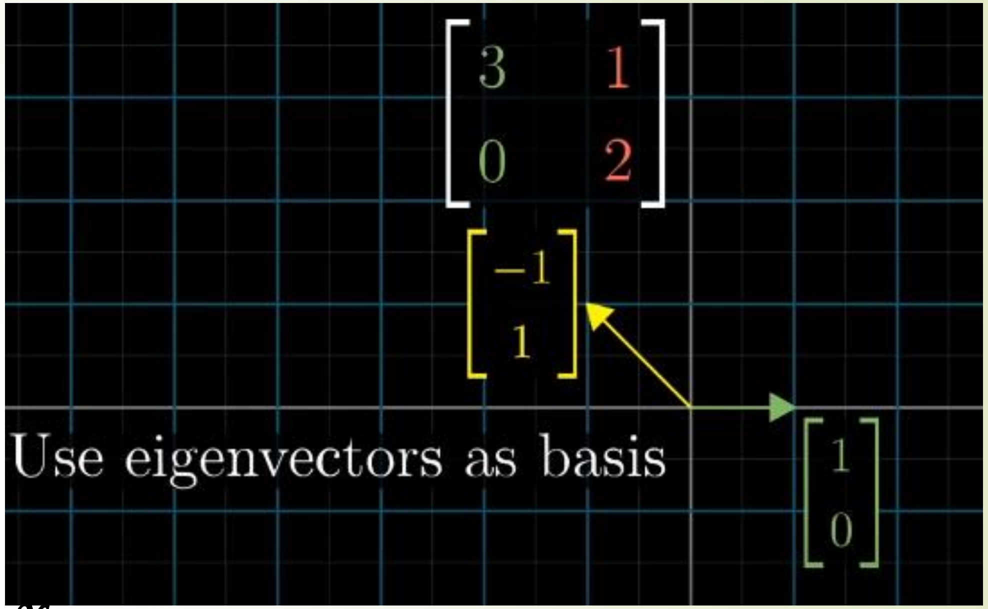
$$\underbrace{\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}\cdots\cdots\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}}_{100\text{ times}}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}3^{100}&0\\0&2^{100}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

一般矩陣的n次方很難計算

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdots\cdots \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{100 \text{ times}}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

13. 選擇特徵向量當作基底eigenBasis

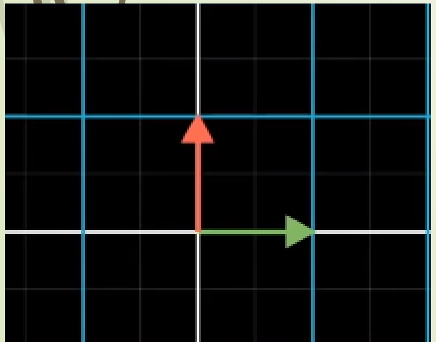
- 1. 例如：座標轉換矩陣，$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
- 3. 證明：$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$，det(A- λ I)=0
  - $\det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right)=0$
  - $(3-\lambda)(2-\lambda) = 0$
  - $\lambda=3$，2
- 4. $(A-\lambda I)\vec{v}=\begin{bmatrix} 3-3 & 1 \\ 0 & 2-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=0$
  - y=0 （特徵向量就是x軸$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，放大3倍）
- 5. $(A-\lambda I)\vec{v}=\begin{bmatrix} 3-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=0$
  - y=-x （特徵向量就是$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，放大2倍）

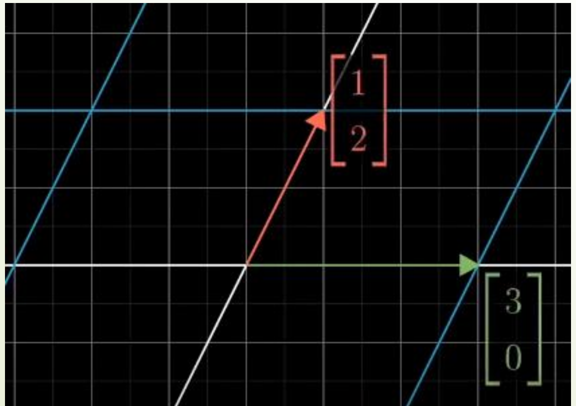


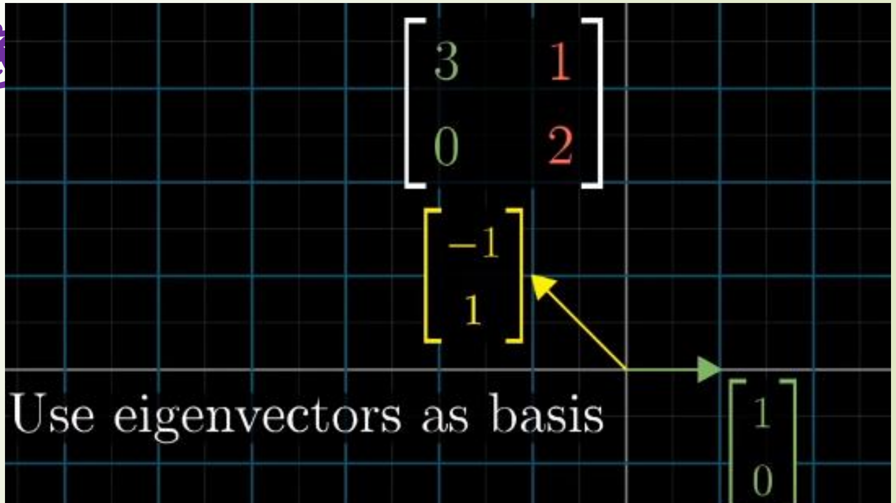
14. 範例2：特徵基底$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$座標系統的$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，被A矩陣變形後的座標?

(接續)：座標轉換矩陣，$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$

- 6. 兩個特徵向量當作基底向量$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$
- 7. 範例2，在特徵基底座標為$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$的位置，是直角坐標的什麼$\begin{bmatrix}?\\?\end{bmatrix}$
- 根據$A^{-1}MA=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}_{S基底}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{E基底}$
- 這裡面有三個座標系統的轉換
- 直角基底　　變形移動　　特徵基底

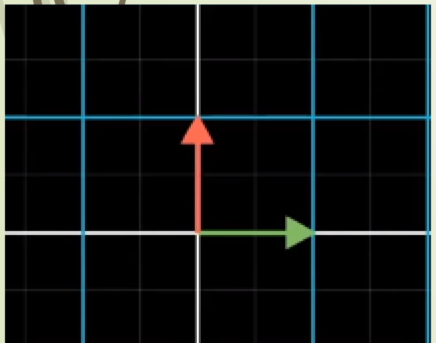


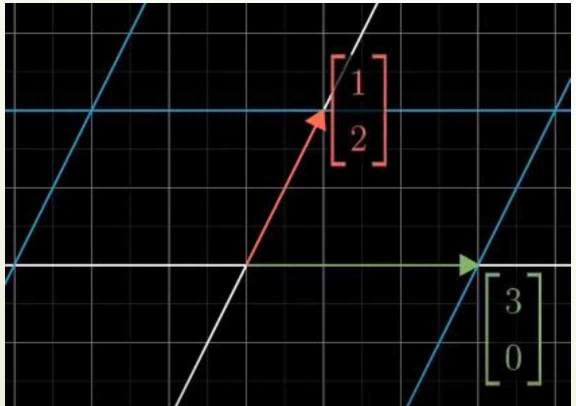


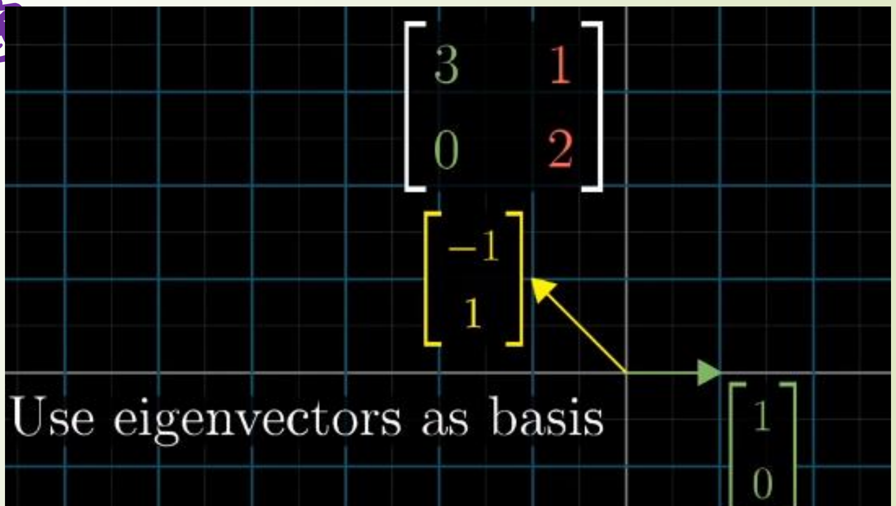


14. 範例2：特徵基底$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$座標系統的$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，被A矩陣變形後的座標?

- (接續)：座標轉換矩陣，A=$\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}$
- 6. 兩個特徵向量當作基底向量$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$
- 根據$A^{-1}MA=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{E基底}$
- 這裡面有三個座標系統的轉換
- 其中的兩個視角轉換是：直角視角座標，特徵基底視角座標
- 直角基底　　　　變形移動　　　　特徵基底

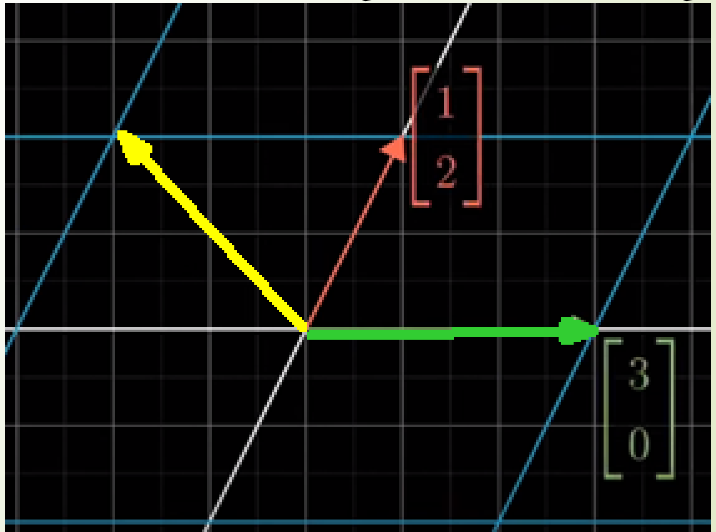




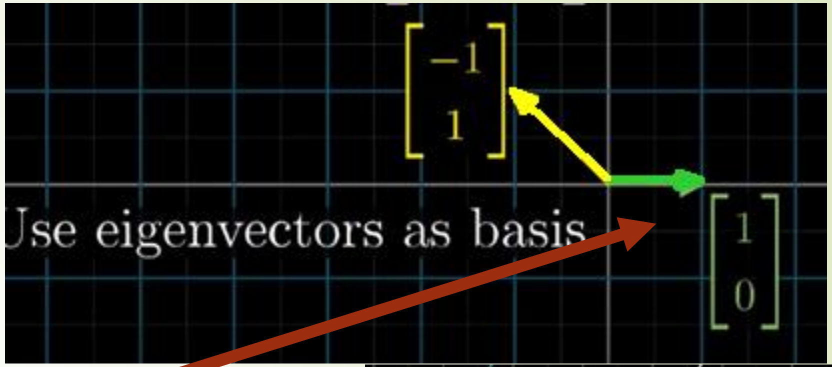


14. 範例2：特徵基底$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$座標系統的$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，被A矩陣變形後的座標?

- (接續)：座標轉換矩陣，A=$\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}$，特徵基底底$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$
- 根據$A^{-1}MA=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{E基底}$
- (1). 先計算逆矩陣：$\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}_{E基底}/(1)=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}_{E基底}$
- (2). $A^{-1}MA=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}_{E基底}\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{E基底}$
- $=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}_{E基底}\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{s基底}$
- $=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}_{E基底}\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}_{s基底}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}_{E基底}$
- 所以特徵基底的$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$被A矩陣變形後的座標$\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$

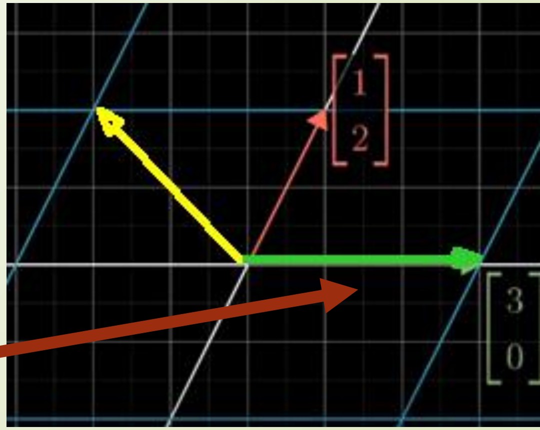


14. 範例2：特徵基底$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$座標系統的$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，被A矩陣變形後的座標?



- (接續)：座標轉換矩陣，$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$
- 6. 兩個特徵向量當作基底向量$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$
- 根據$A^{-1}MA$ $=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{E基底}$
- (1). $\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{E基底}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{s基底}$ 特徵向量就是直角座標的x軸
- (2). $\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{E基底}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}_{s基底}$ 特徵向量被A矩陣變形後的直角座標的視角位置

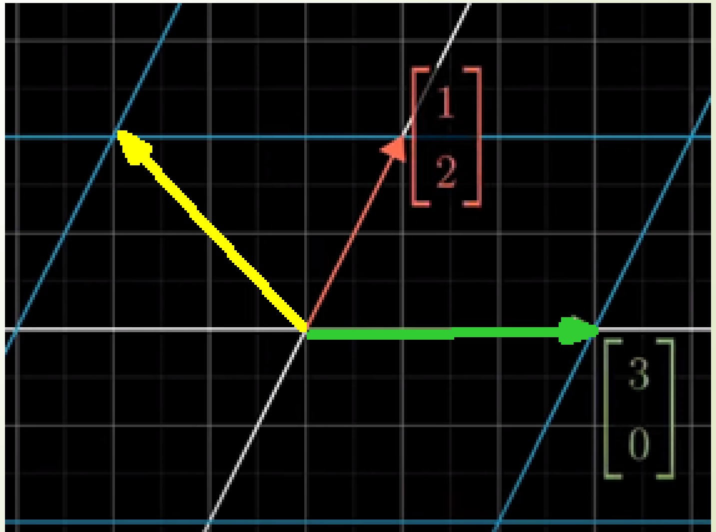
- (3). $\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{E基底}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}_{E基底}$



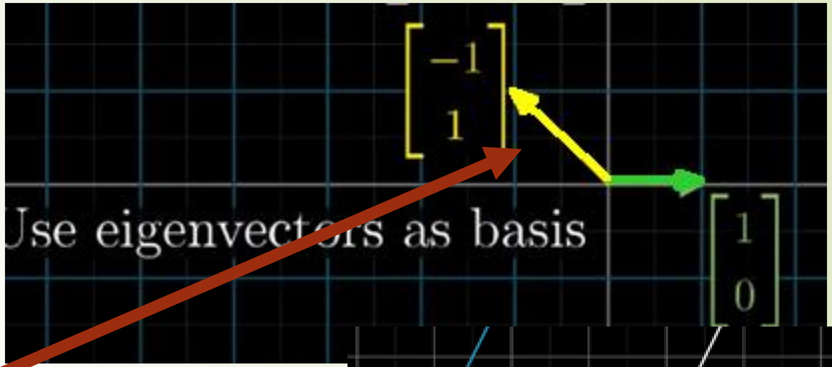
特徵向量被變形後在特徵基底視角的位置

15. 範例3：特徵基底$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$座標系統的$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，被A矩陣變形後的座標

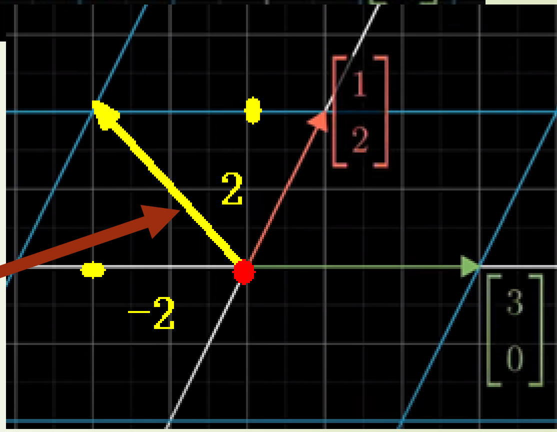
- (接續)：座標轉換矩陣，A=$\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$, 特徵基底底$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$
- 根據$A^{-1}MA=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{E基底}$
- (1). 先計算逆矩陣：$\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}_{S基底}/(1)=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}_{S基底}$
- (2). $A^{-1}MA=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}_{E基底}\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{E基底}$
- $=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}_{S基底}\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}_{s基底}$
- $=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}_{S基底}\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}_{s基底}=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}_{S基底}$
- 所以特徵基底的$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$被A矩陣變形後的座標$\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$



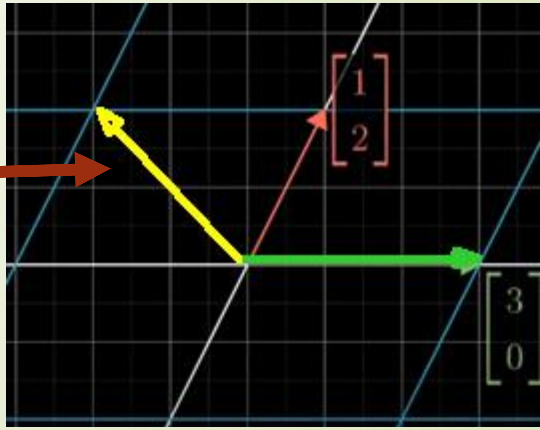
14. 範例2：特徵基底$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$座標系統的$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，被A矩陣變形後的座標



- (接續)：座標轉換矩陣，A=$\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$
- 6. 特徵向量當作基底向量$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$
- 根據$A^{-1}MA=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{E基底}$
- (1). $\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{E基底}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}_{s基底}$ 特徵向量就是直角座標的y=−x



- (2). $\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{E基底}=\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}_{s基底}$ 特徵向量被A矩陣變形後的直角座標的視角位置
- (3). $\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{E基底}=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}_{S基底}$



特徵向量被變形後在特徵基底視角的位置

16. 特徵基底$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$的$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$座標，被A矩陣變形後的座標=$A^{-1}MA$=特徵值對角矩陣

- (1). 根據$A^{-1}MA=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}_{s基底}$

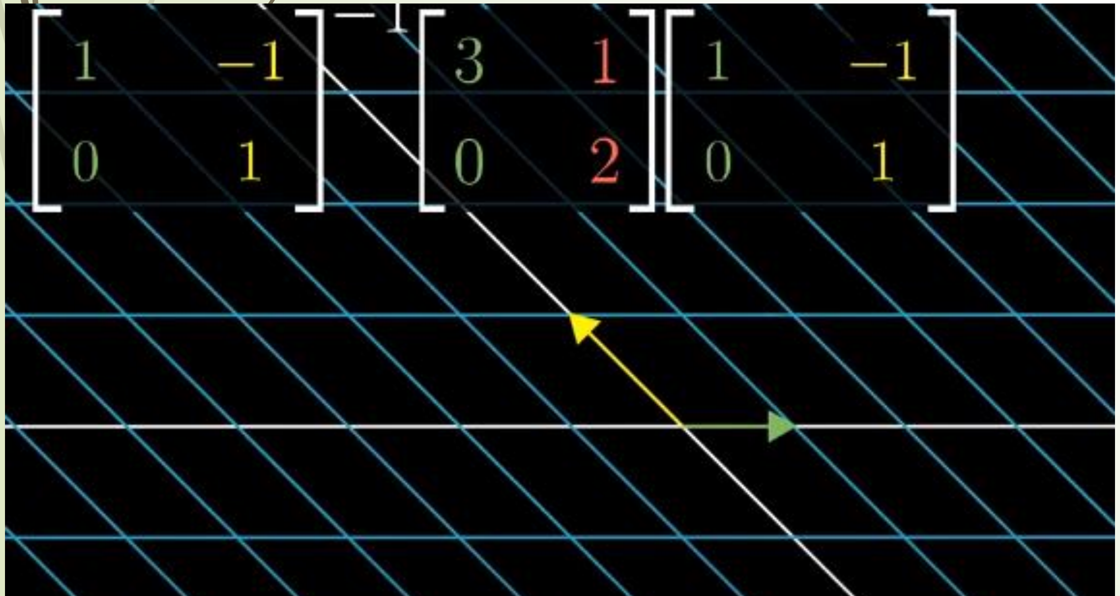
$$=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}\begin{bmatrix}3 & -2\\0 & 2\end{bmatrix}_{Smove}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}_{S基底}\begin{bmatrix}3 & -2\\0 & 2\end{bmatrix}_{Smove}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}_{S基底}=\begin{bmatrix}\lambda 1 & 0\\0 & \lambda 2\end{bmatrix}_{S基底}$$（λ=3，2）

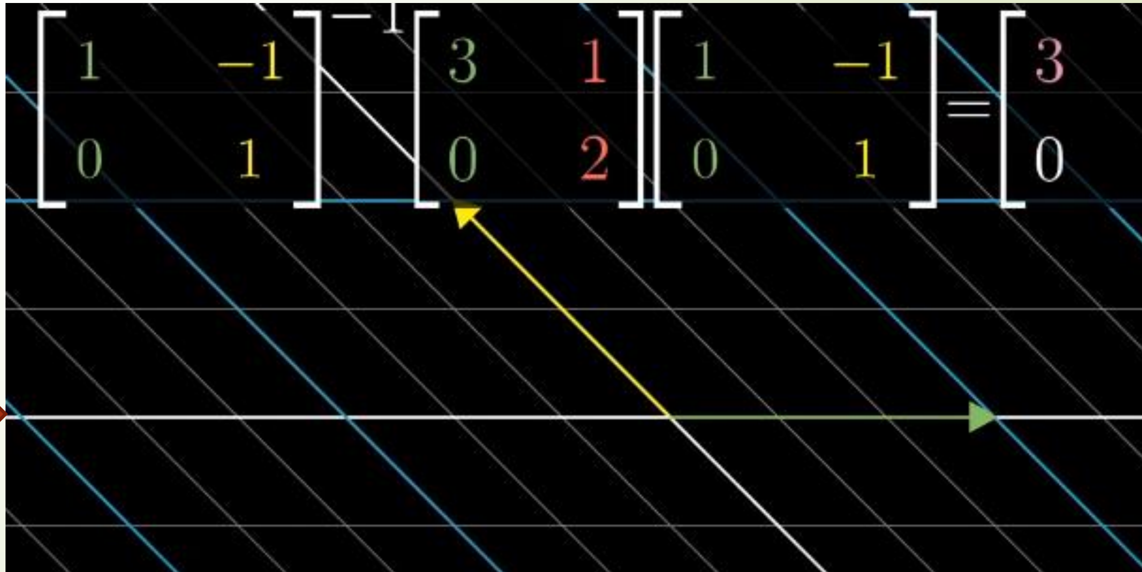
- (2). 所以以後若要有特徵基底座標，轉換成直角座標，不要再用$A^{-1}MA$
- (3). $A^{-1}MA$ = =$\begin{bmatrix}\lambda 1 & 0\\0 & \lambda 2\end{bmatrix}_{S基底}$
- (4). 結論：特徵基底轉換矩陣直接用$\begin{bmatrix}\lambda 1 & 0\\0 & \lambda 2\end{bmatrix}_{S基底}$

17. 結論：特徵基底被A矩陣變形後座標=直接用$\begin{bmatrix} \lambda 1 & 0 \\ 0 & \lambda 2 \end{bmatrix}_{s基底}$

- **特徵基底**
- 被A矩陣變形後座標
- =直接用$\begin{bmatrix} \lambda 1 & 0 \\ 0 & \lambda 2 \end{bmatrix}_{s基底}$

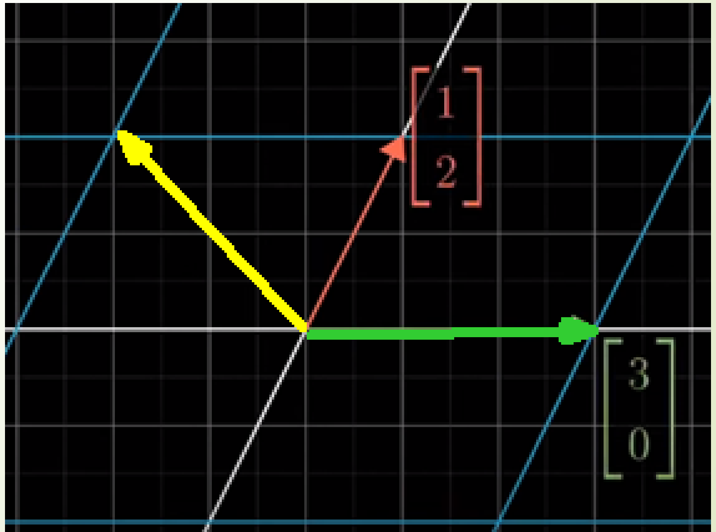


被A矩陣變形



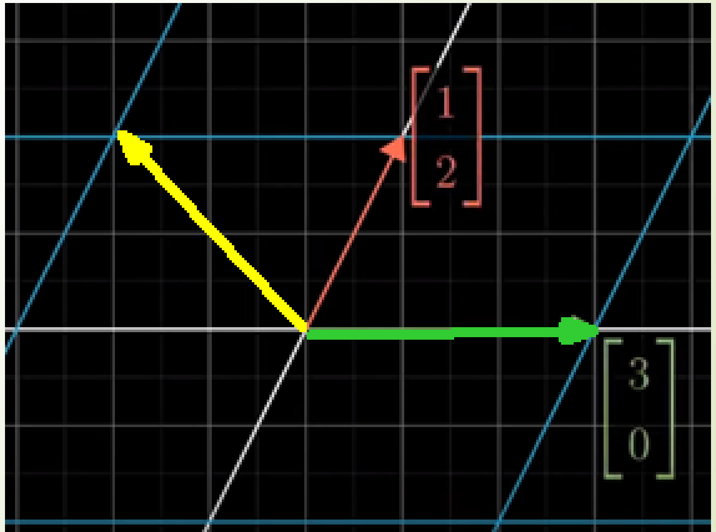
18. 範例4：特徵基底$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$座標系統的$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，被A矩陣變形後的座標？

- (接續)：座標轉換矩陣，$A=\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}$，特徵基底底$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$
- (1). 根據：特徵基底轉換矩陣直接用$\begin{bmatrix}\lambda 1&0\\0&\lambda 2\end{bmatrix}_{E變形}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{E基底}$
- (λ=3，2)
- (2). $\begin{bmatrix}\lambda 1&0\\0&\lambda 2\end{bmatrix}_{E變形}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{E基底}$
- $\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}_{E變形}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{E基底}$
- $=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}_{E變形}$
- 所以特徵基底的$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$被A矩陣變形後的座標$\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$



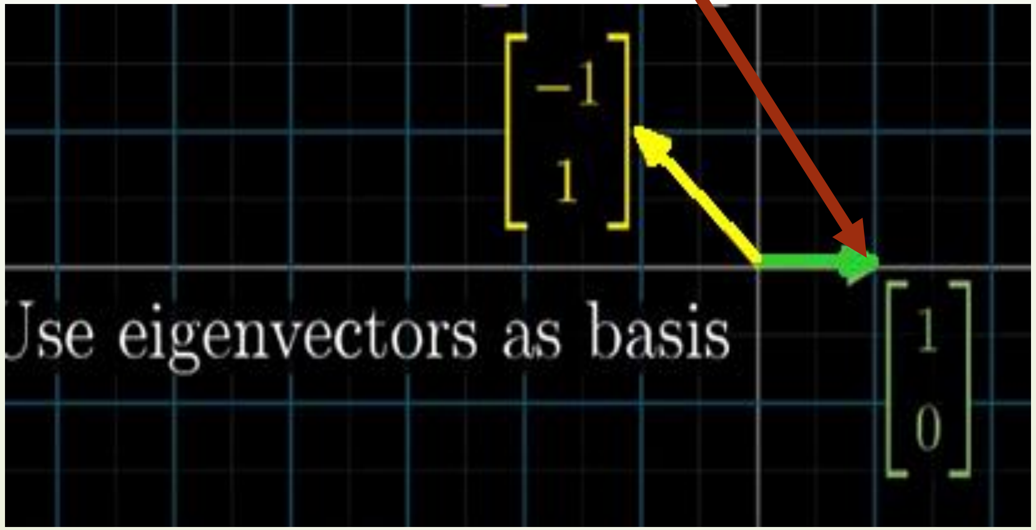
18. 範例5：特徵基底$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$座標系統的$\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{bmatrix}$ ，被A矩陣變形後的座標？

- (接續)：座標轉換矩陣，A=$\begin{bmatrix}3 & \mathbf{1}\\0 & 2\end{bmatrix}$，特徵基底底$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$
- (1). 根據：特徵基底轉換矩陣直接用$\begin{bmatrix}\lambda 1 & 0\\0 & \lambda 2\end{bmatrix}_{S基底}$ $\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{bmatrix}_{E基底}$
- (λ=3，2)
- (2). $\begin{bmatrix}\lambda 1 & 0\\0 & \lambda 2\end{bmatrix}_{S基底}$ $\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{bmatrix}_{E基底}$
- $\begin{bmatrix}\mathbf{3} & 0\\0 & \mathbf{2}\end{bmatrix}_{S基底}$ $\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{bmatrix}_{E基底}$
- =$\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{2}\end{bmatrix}_{E基底}$
- 所以特徵基底的$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$被A矩陣變形後的座標$\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$



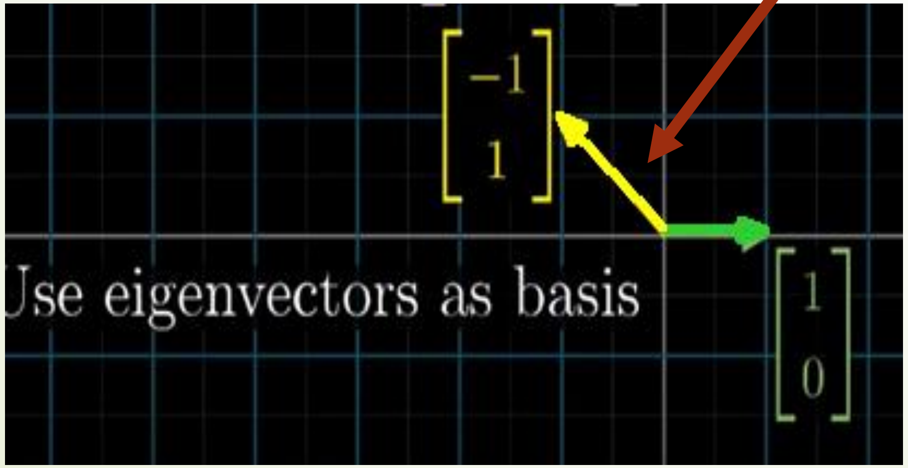
19. 範例6：特徵基底$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$座標系統的$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，以直角座標視角為？

- （接續）：座標轉換矩陣，A=$\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$
- 6. 特徵向量當作基底向量$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$
- 特徵座標以直角座標視角=$\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{E基底}$
- = $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{s基底}$ 特徵向量的直角座標就是X軸，

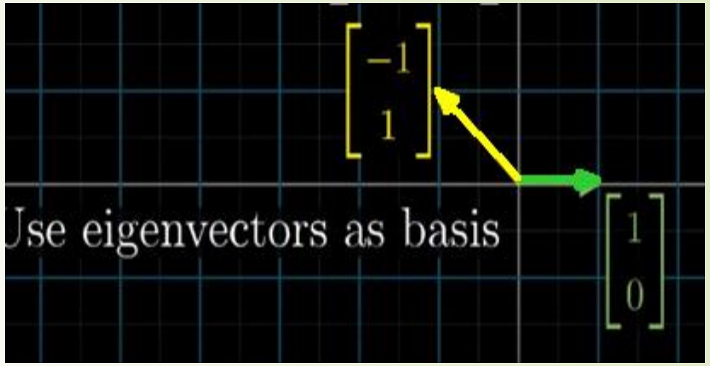


19. 範例7：特徵基底$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$座標系統的$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，以直角座標視角為？

- (接續)：座標轉換矩陣，A=$\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$
- 6. 特徵向量當作基底向量$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$
- 特徵座標以直角座標視角=$\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{E基底}$
- = $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}_{s基底}$ 特徵向量的直角座標就是y=-x直線，



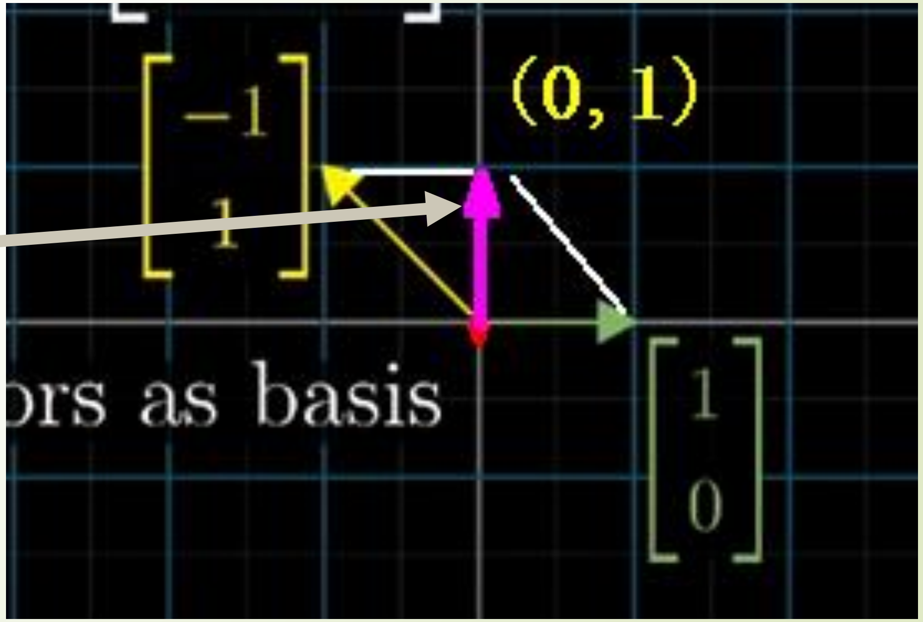
20. 範例8：直角座標的$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，以特徵基底$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$座標視角為？



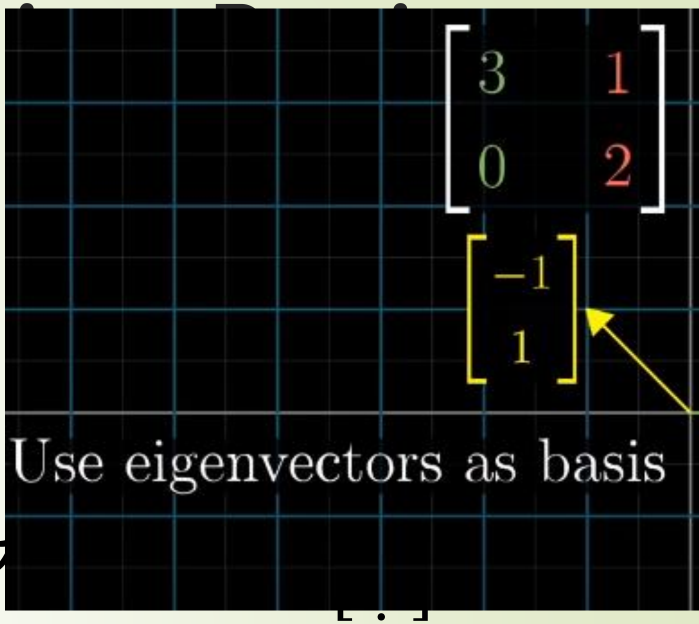
- (接續)：座標轉換矩陣，A=$\begin{bmatrix}3 & \mathbf{1}\\0 & 2\end{bmatrix}$
- 6. 特徵向量當作基底向量$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{1}\end{bmatrix}$
- 特徵座標以直角座標視角=$\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1}\\\mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{S基底}$
- $\begin{bmatrix}1 & 1\\\mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix}_{S基底}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{E基底}$
- $=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}_{S基底}$

=特徵基底的(1, 1)合成後就是向上的y軸

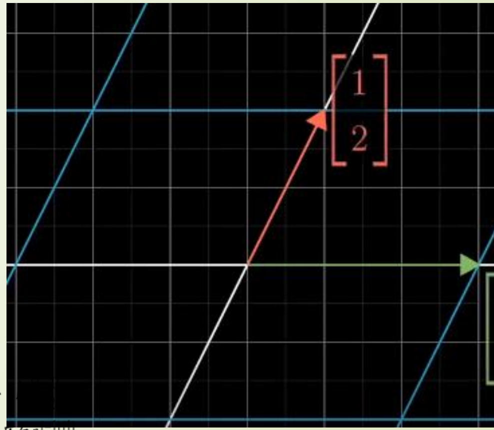
=直角座標的$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

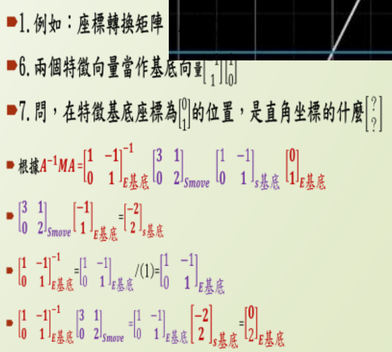


13. 選擇特徵向量當作基底e



- 1. 例如：座標轉換矩陣，$A=\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}$
- 6. 兩個特徵向量當作基底向量$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
- 7. 問，在特徵基底座標為$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$的位置，是直角坐
- 根據$A^{-1}MA=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{E基底}$
- $\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}_{E基底}=\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}_{s基底}$
- $\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}_{E基底}/(1)=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}_{E基底}$
- $\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}_{Smove}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}_{E基底}\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}_{s基底}=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}_{E基底}$

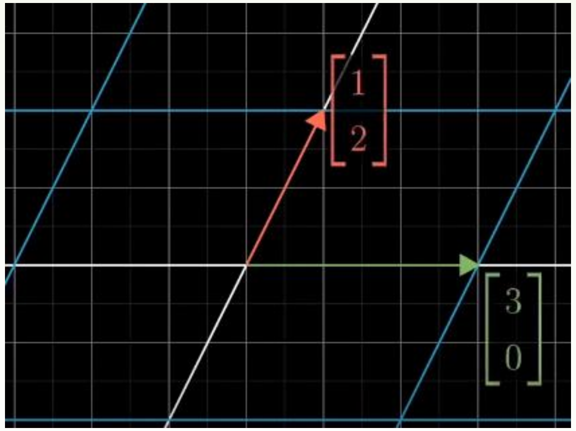


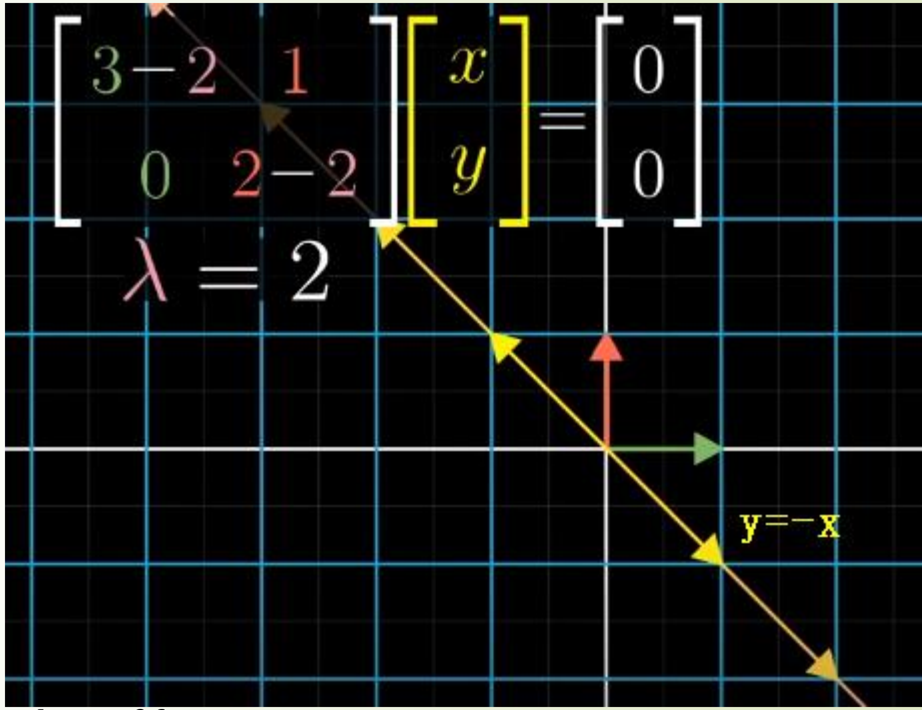


- 1. 例如：座標轉換矩陣
- 6. 兩個特徵向量當作基底向量$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
- 7. 問，在特徵基底座標為$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$的位置，是直角坐標的什麼$\begin{bmatrix}?\\?\end{bmatrix}$
- 根據$A^{-1}MA=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}_{s基底}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{E基底}$
- $\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}_{Smove}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}_{E基底}=\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}_{s基底}$
- $\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}_{E基底}/(1)=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}_{E基底}$
- $\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}_{E基底}\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}_{Smove}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}_{E基底}\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}_{s基底}=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}_{E基底}$

範例1：求座標轉換矩陣$\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$的EigenVector，Eigenvalue

- $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
- 1. det(A- λ I)=0
  - $\det\left(\begin{bmatrix}3-\lambda & 1\\0 & 2-\lambda\end{bmatrix}\right)=0$
  - $(2-\lambda)(3-\lambda)=0$
  - 所以 λ=2、或3





- 2. 若 λ=2，求$\vec{v}$ EigenVector
  - $\begin{bmatrix}3-\lambda & 1\\0 & 2-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-2 & 1\\0 & 2-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=0$
  - 這個聯立方程式解有無限多個，需滿足y=-x這條線，或是$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$向量上
  - 特徵向量 = $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$