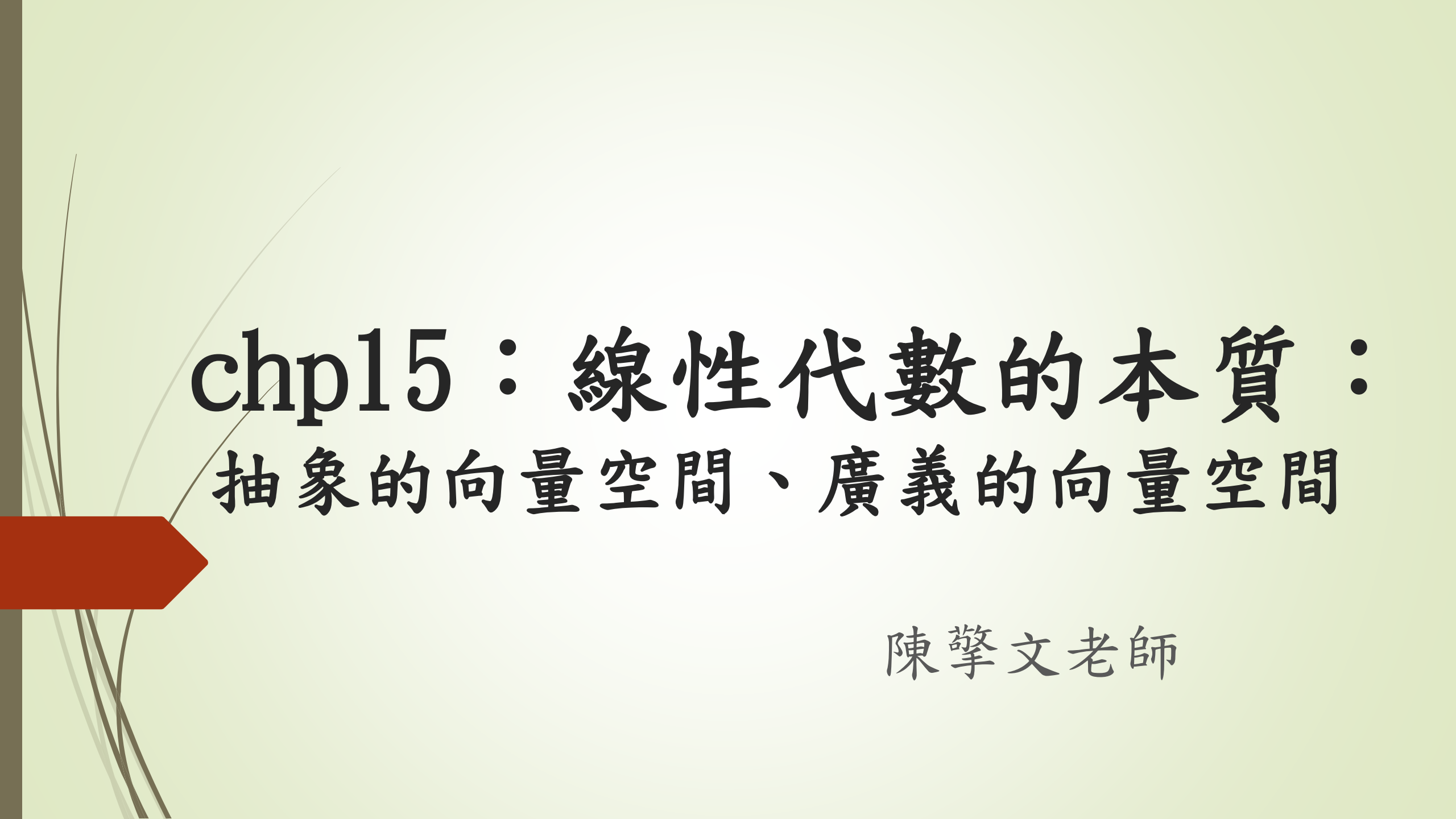




chp15：線性代數的本質：

抽象的向量空間、廣義的向量空間

陳擎文老師

線性代數的學習重點與探討主題

觀念

數學符號的意義

基礎

廣義向量

矩陣

聯立方程式

行列式

主題

線性映射

坐標轉換

特徵向量

線性代數的學習重點

觀念

- 數學符號的意義

基礎

- 向量，張量
- 3D矩陣
- 行列式
- 聯立方程式

- 矩陣乘法
- 反矩陣
- 行空間，rank，零空間
- 非方陣的矩陣轉換

- 內積
- 外積
- Cramers rule
- 變換基底向量

主題

- 線性映射
- 坐標轉換
- $A^{-1}MA$ =視角轉換+動作轉換
- 特徵向量，特徵值，特徵基底

- 廣義的向量空間

線性代數授課的兩條線

➡ (1). 了解線性代數的本質

➡ 了解其背後的物理意義

➡ 了解關鍵重點

➡ (2). 學習如何計算

➡ 了解數學的定義，公式，定理，證明

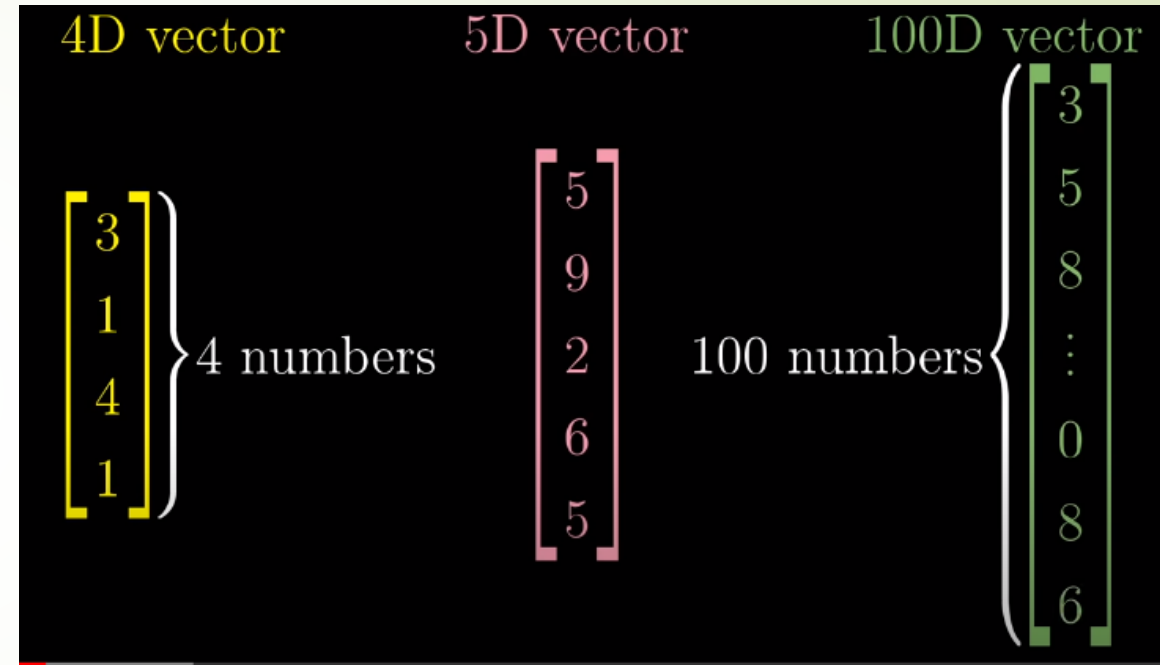
➡ 練習計算

參考資料

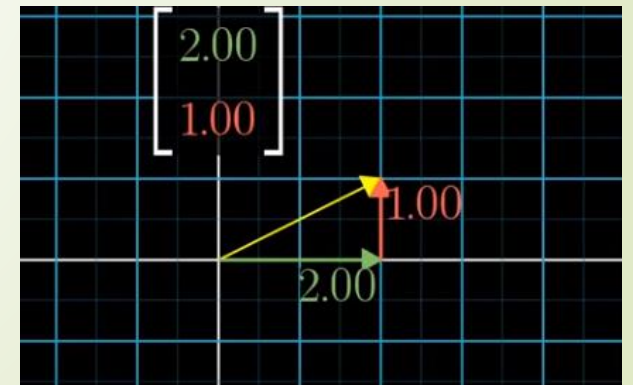
➡ <https://www.youtube.com/watch?v=TgKwz5Ikpc8>

1. 抽象的向量空間： Abstract vector spaces

- ➡ 向量空間可以是任何集合，只要符合線性條件即可
- ➡ (1). 可以是數組的集合



- ➡ (2). 可以是空間的幾何位置（箭頭）
- ➡ 但是4D以上的集合是抽象的



1. 抽象的向量空間： Abstract vector spaces

- ➡ (3). 空間的數組，與所選的基底向量而變化
- ➡ (4). 但是行列式值，特徵向量，不會隨之變化
- ➡ (5). 但是若是構成空間的向量，不是數組，卻更有空間代表性質，會是如何？
 - ➡ 例如：函數(function)
 - ➡ 不是數組，不是箭頭
 - ➡ 但是有向量特性
 - ➡ 也符合線性映射規則

2. 函數的向量特性： addition合成性

(6). 函數也有addition合成性

➡ $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

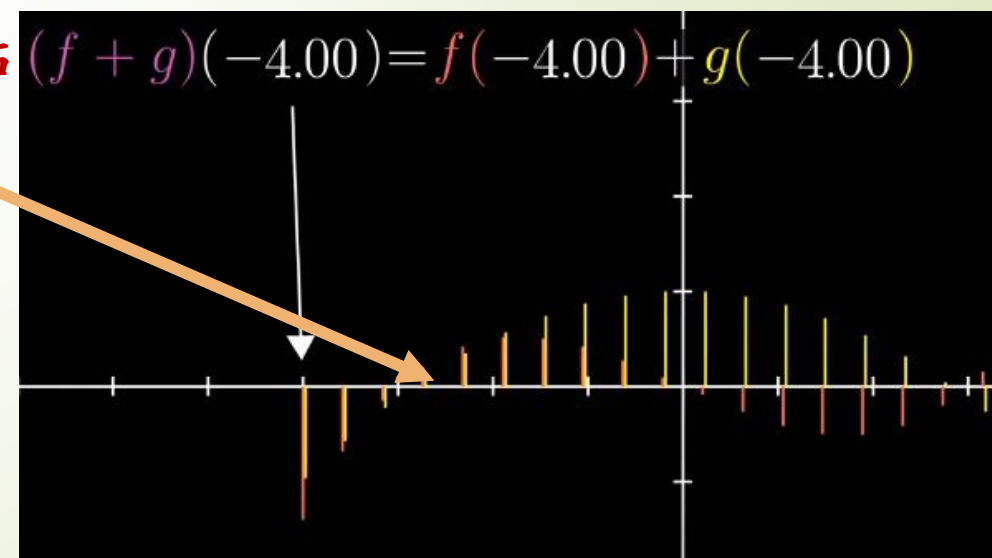
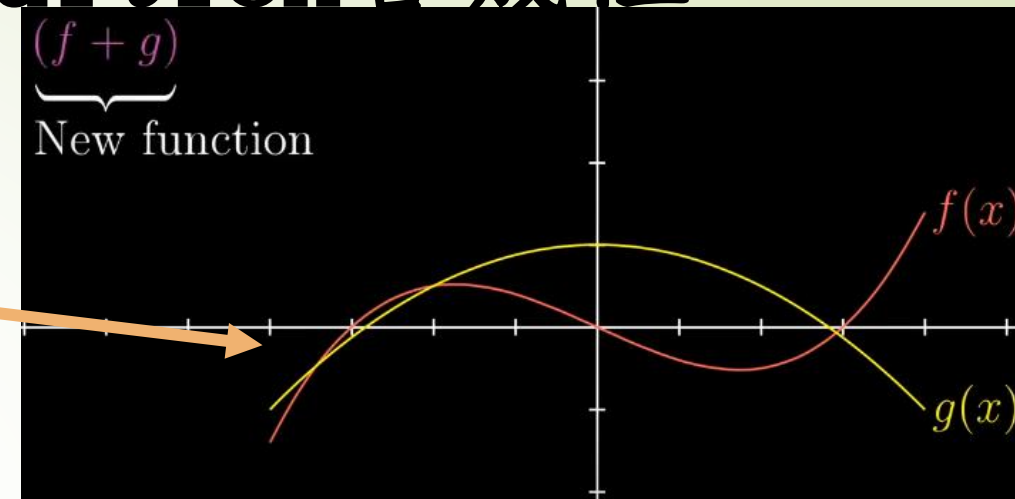
➡ 這個合成性與向量合成性相同

➡ 差異：

➡ 傳統向量的合成，只需要計算一點座標

➡ 函數的合成，要算很多點（或是無限多點）

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}$$



3. 函數的向量特性：scaling純量乘法

➡ (5). 函數也有scaling純量乘法

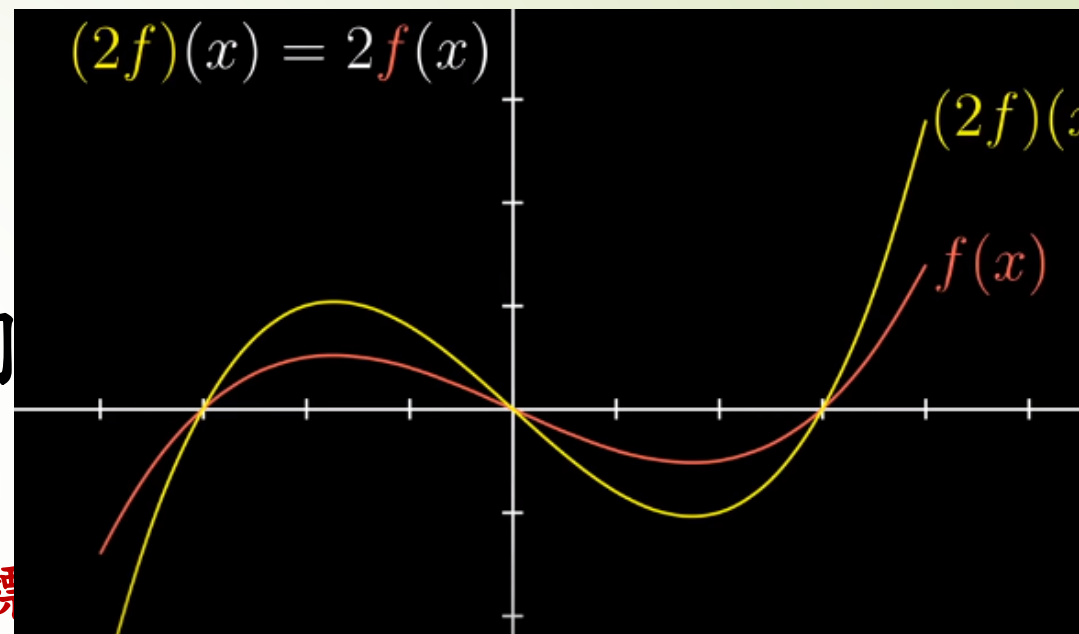
➡ $(2f)(x) = 2f(x)$

➡ 這個純量乘法與向量純量乘法相同

➡ 差異：

➡ 傳統向量的純量乘法，只需要計算一點座標

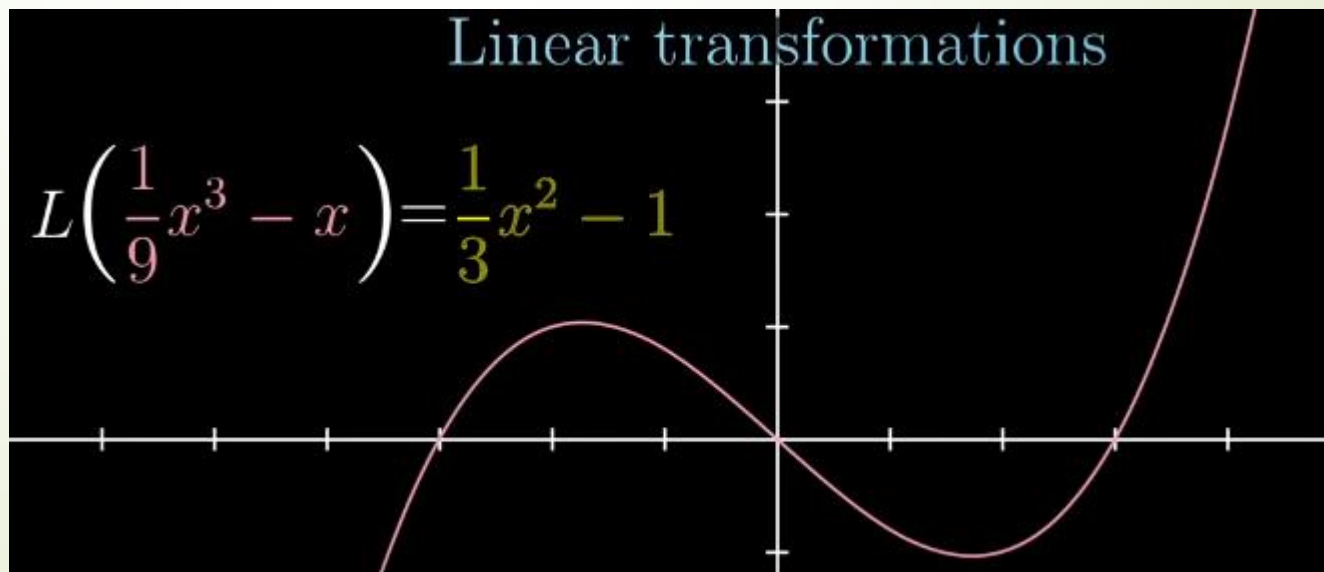
➡ 函數的純量乘法，要算很多點（或是無限多點）



$$2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$$

4. 函數的向量特性：線性轉換

- ➡ (5). 函數也有：線性轉換特性
- ➡ 功能：把一個函數，轉成另外一個函數
 - ➡ $L(1/9x^3 - x) = 1/3x^2 - 1$

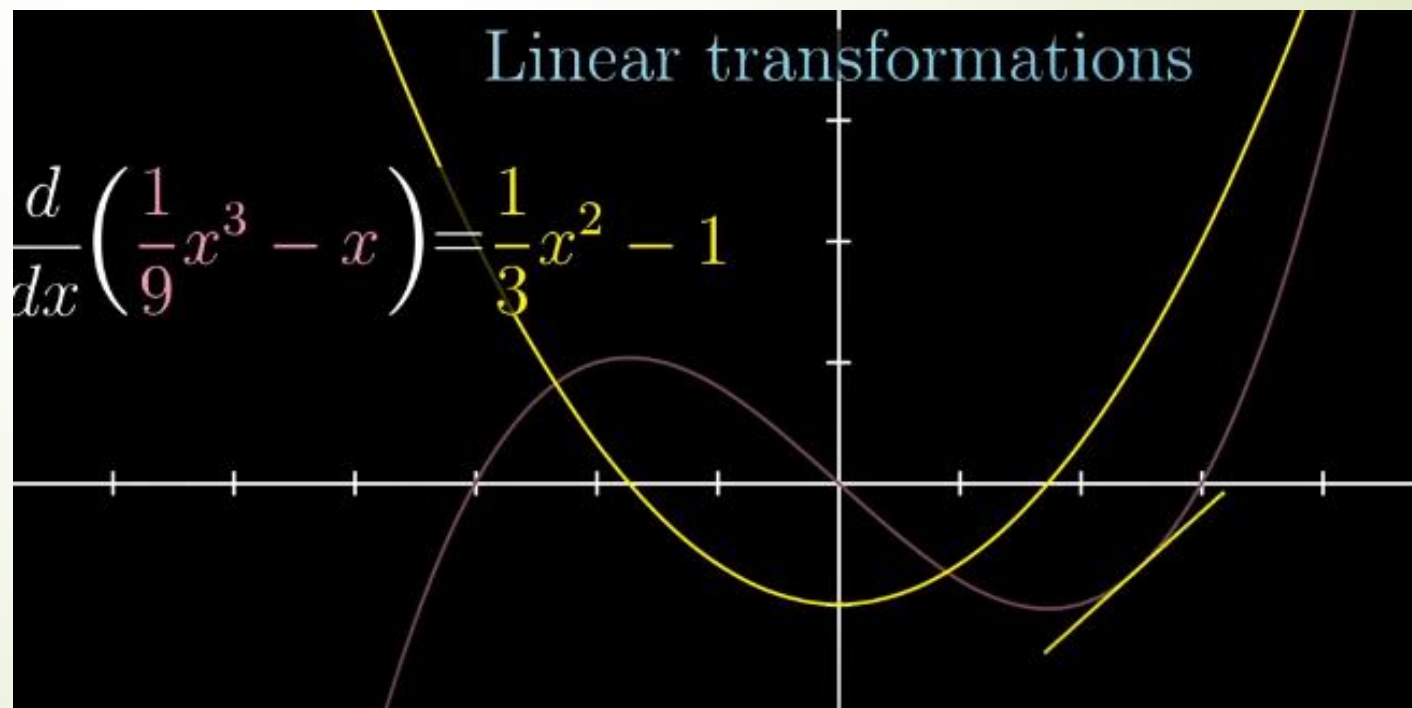


5. 微分(導數)，就是一個向量的線性轉換

➡ (5). 函數也有：線性轉換特性

➡ 功能：把一個函數，轉成另外一個函數

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{9}x^3 - x \right) = \frac{1}{3}x^2 - 1$$

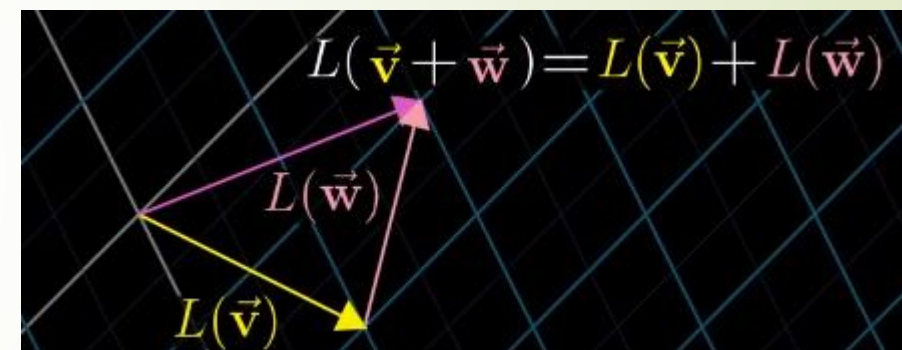
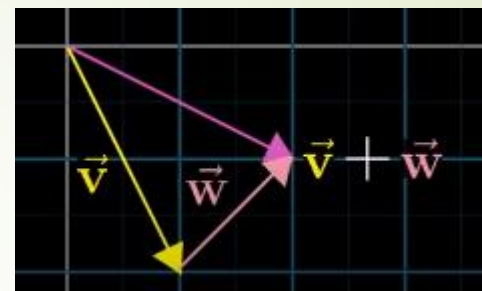


6. 函數的線性轉換定義

函數的線性轉換定義

合成性：additivity

係數乘法：scaling



Formal definition of linearity

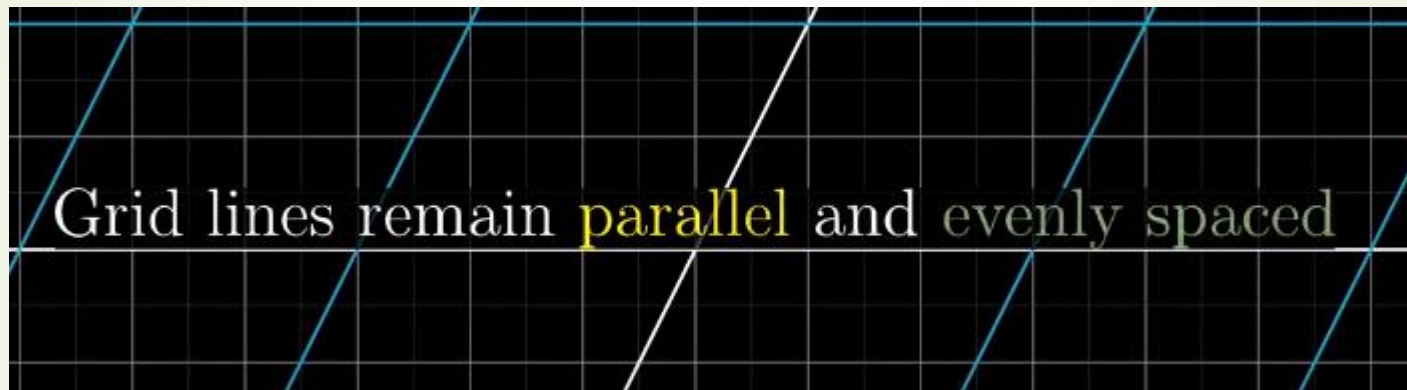
Additivity: $L(\vec{v} + \vec{w}) = L(\vec{v}) + L(\vec{w})$

Scaling: $L(c\vec{v}) = cL(\vec{v})$

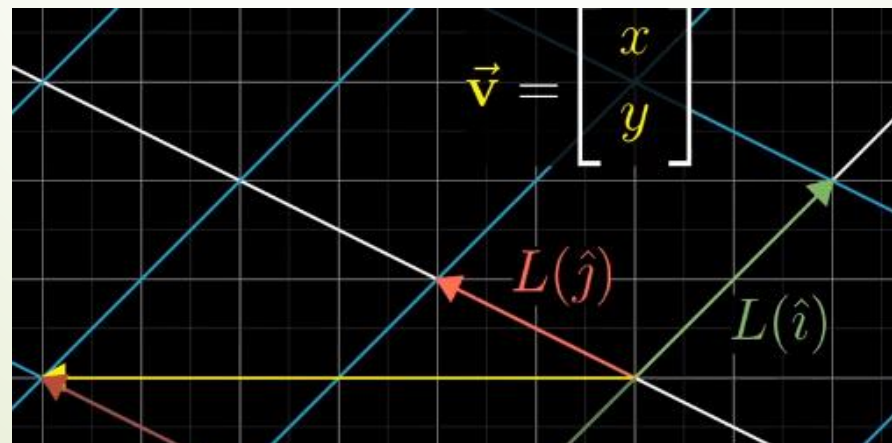


線性轉換的幾何意義

- ➡ 轉換後的網格間距，保持平行，且等距



- ➡ 可以用矩陣乘積，計算向量轉換的新坐標



5. 微分(導數)，就是一個向量的線性轉換

➡ 微分(導數)，就是一個向量的線性轉換

$$L(\vec{v} + \vec{w}) = L(\vec{v}) + L(\vec{w})$$

$$\frac{d}{dx}(x^3 + x^2) = \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(x^2)$$

Derivative is linear

$$L(c\vec{v}) = cL(\vec{v})$$

$$\frac{d}{dx}(4x^3) = 4\frac{d}{dx}(x^3)$$

7. 範例1：多項式函數如何用矩陣向量表示

➡ (1) 多項式 $4x^7 - 5x^2$ ，用矩陣表示(基底函數)

➡ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

➡ (2) 多項式 $3x^2 + x + 5$ ，用矩陣表示(基底函數)

➡ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

8. 多項式函數矩陣向量的通式表示法

➡ (1) 多項式 $a_n x^n + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$ ，用矩陣表示(基底底函)

➡ $a_n x^n + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 =$ $\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix}$$

9. 微分方程式的線性映射，用矩陣來表示

➡ (1) 微分方程式，用矩陣表示(基底底函)

➡ $\frac{d}{dx}(x^3 + 5x^2 + 4x + 5) = 3x^2 + 10x + 4$

➡
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * 4 \\ 2 * 5 \\ 3 * 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

剛剛好就是答案

➡ 導數矩陣

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot 1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

10. 微分方程式的導數矩陣

(1) 導數矩陣，必須要先對基底函數的每個 $b_n(x)$ 微分

➡ 基底項目： $b_0(x) = 1$

$$b_1(x) = x$$

$$b_2(x) = x^2$$

$$b_3(x) = x^3$$

➡ 矩陣第一欄是 $\frac{d}{dx}(b_0(x)) = 0$

➡ 矩陣第二欄是 $\frac{d}{dx}(b_1(x)) = 1$

➡ 矩陣第三欄是 $\frac{d}{dx}(b_2(x)) = 2x$

➡ 矩陣第四欄是 $\frac{d}{dx}(b_3(x)) = 3x^2$

$$\frac{d}{dx}(1x^3 + 5x^2 + 4x + 5) = 3x^2 + 10x + 4$$

0	1	0	0	...
0	0	2	0	...
0	0	0	3	...
0	0	0	0	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

5
4
5
1
⋮

$$=$$

1·4
2·5
3·1
⋮

0	1	0	0
0	0	2	0
0	0	0	3
0	0	0	0

11. 函數的線性映射，與向量線性轉換概念相同

- ➡ 函數的線性映射
- ➡ 1. 線性運算(linear operators)
- ➡ 2. 內積(inner product)
- ➡ 3. 特徵函數

Linear algebra concepts	Alternate names when applied to functions
Linear transformations	Linear operators
Dot products	Inner products
Eigenvectors	Eigenfunctions

12. 數學中向量類vectorish對象

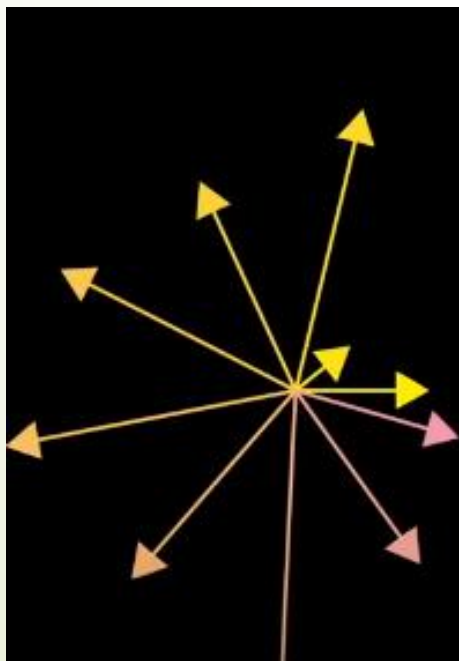
➡ 向量類（可用矩陣來線性轉換）

➡ 1. 幾何空間向量

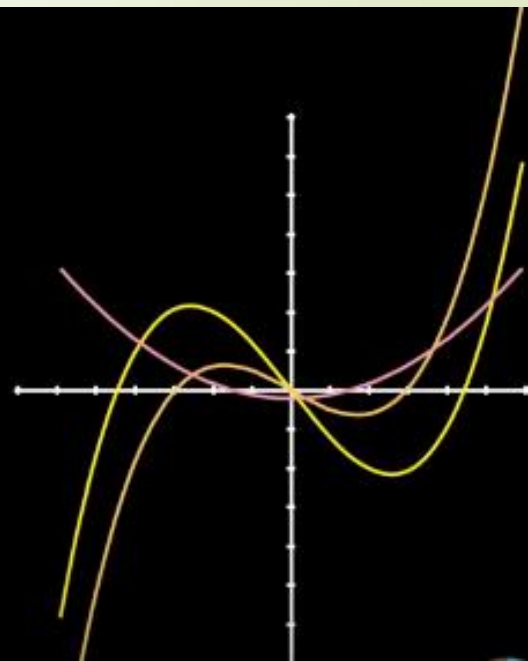
➡ 2. 矩陣數組

➡ 3. 函數

➡ 都是向量空間



$$\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 8 \\ -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ -6 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}$$



13. 符合線性映射的公理

Rules for vectors addition and scaling

1. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
2. $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
3. There is a vector $\mathbf{0}$ such that $\mathbf{0} + \vec{v} = \vec{v}$ for all $\vec{v}$
4. For every vector $\vec{v}$ there is a vector $-\vec{v}$ so that $\vec{v} + (-\vec{v}) = \mathbf{0}$
5. $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$
6. $1\vec{v} = \vec{v}$
7. $a(\vec{v} + \vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$
8. ~~$(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$~~

“Axioms”

14. 線性代數教科書都是廣義的公理，可以適用各種對象

- ➡ 教科書寫的都是數學公理Axioms
- ➡ 因為抽象，所以不好理解
- ➡ 因為抽象，廣義，所以可以使用每一個對象

Rules for vectors addition and scaling

1. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

2. $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$

3. There is a vector $\mathbf{0}$ such that $\mathbf{0} + \vec{v} = \vec{v}$ for all $\vec{v}$

4. For every vector $\vec{v}$ there is a vector $-\vec{v}$ so that $\vec{v} + (-\vec{v}) = \mathbf{0}$

5. $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$

6. $1\vec{v} = \vec{v}$

7. $a(\vec{v} + \vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$

8. $(a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$

“Axioms”