



chp2：線性代數的本質：

線性組合、生成空間、基底向量

陳擎文老師

線性代數的學習重點與探討主題

觀念

數學符號的意義

基礎

向量

行列式

聯立方程式

矩陣

主題

線性映射

坐標轉換

特徵向量

線性代數授課的兩條線



(1). 了解線性代數的本質

- ➡ 了解其背後的物理意義
- ➡ 了解關鍵重點

➡ (2). 學習如何計算

- ➡ 了解數學的定義，公式，定理，證明
- ➡ 練習計算

參考資料

➡ <https://www.youtube.com/watch?v=k7RM-ot2NWY>



線性代數向量的進階意義(II)

線性代數的向量基本意義(I)：

由原點(0, 0)出發的箭頭

每個箭頭都可以用矩陣數字表示 $(3, -2) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$



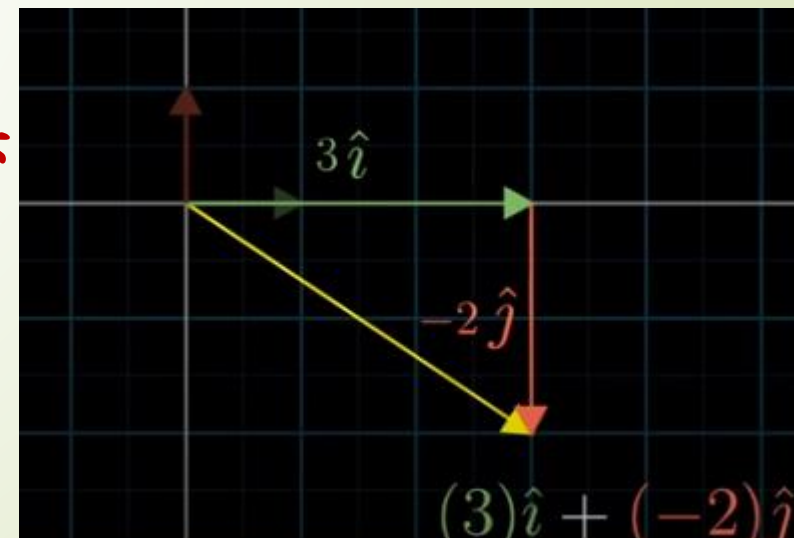
線性代數的向量進階意義(II)：

該座標系統的基底basis向量表示

$p = (3, -2) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = (3)i + (-2)j$

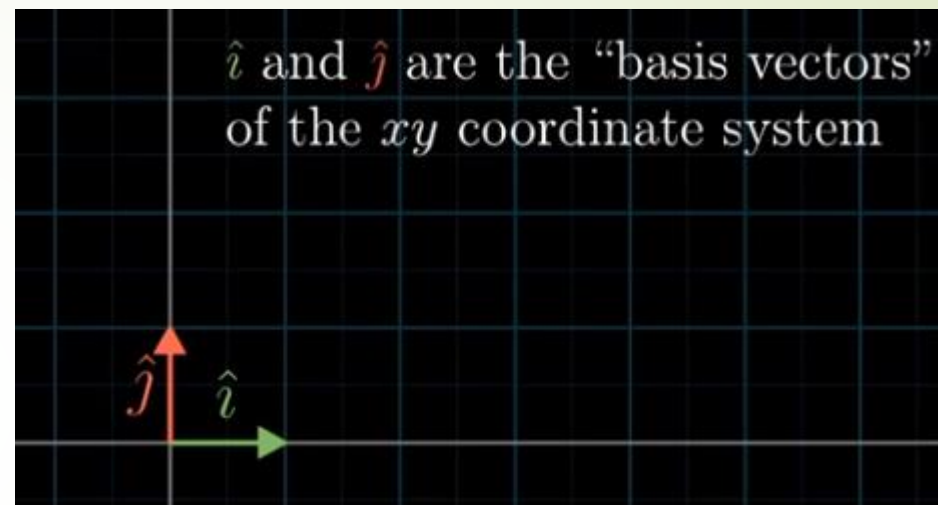
p可以用兩個基底向量的『線性組合』表示

Linear combination



【基礎觀念】 基底向量basis

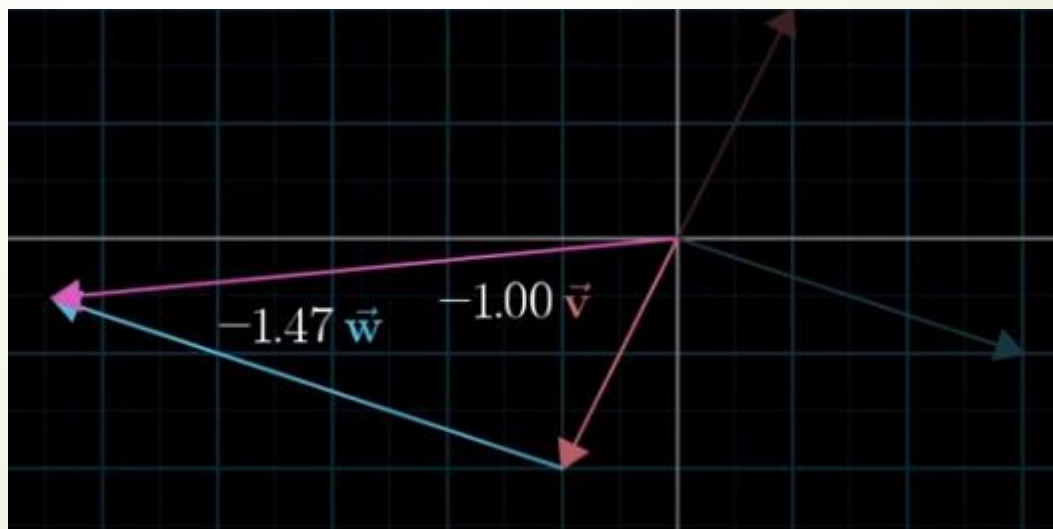
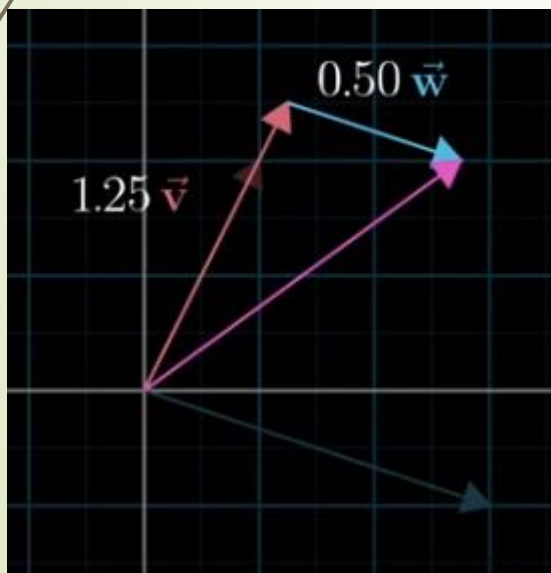
- ➡ 基底向量basis (i, j)
- ➡ 兩個軸的單位向量



- ➡ 我們目前所學都是正交直角座標系統
 - ➡ $(i, y) = (x, y)$

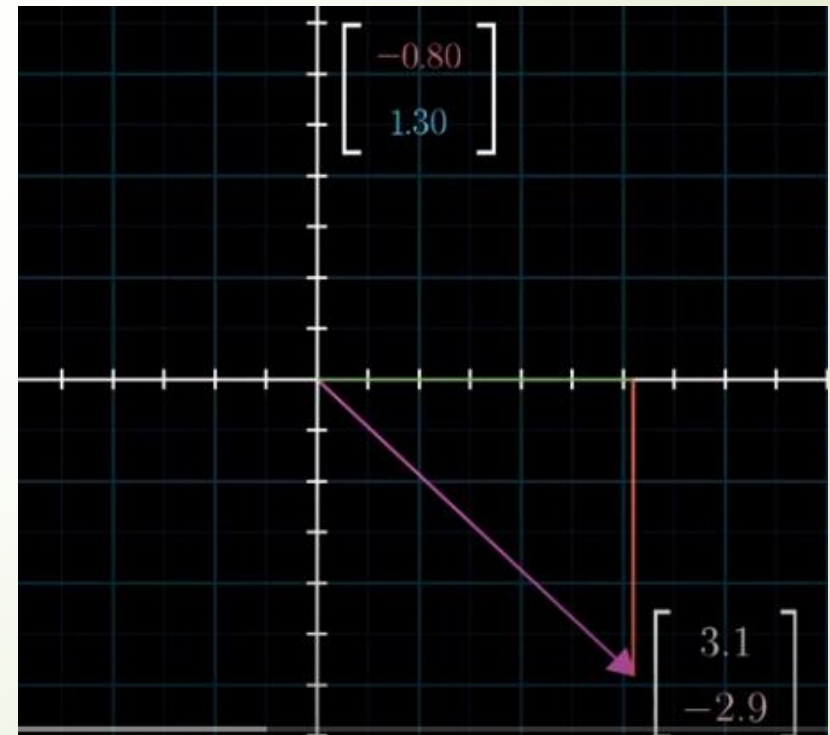
【基礎觀念】 基底向量basis

- ➡ 任意取雙軸的基底向量basis ($\vec{v}$, $\vec{w}$)
- ➡ 此任意非正交直角座標系統 ($\vec{v}$, $\vec{w}$)
- ➡ 用 ($\vec{v}$, $\vec{w}$)也可以表示空間的任何向量箭頭



不同座標系統的表示式

- ➡ 兩個座標系統 (i, j) , (v, w)
- ➡ 同一個箭頭位置，在兩個不同座標系統的表示式
- ➡ $p = \begin{bmatrix} 3.1 \\ -2.9 \end{bmatrix}$ *in* (i, j)
- ➡ $p = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 1.3 \end{bmatrix}$ *in* (v, w)



線性代數向量的進階意義(2)

➡ 結論：線性代數的向量進階意義(II)：

➡ 2D空間上的任意向量(箭頭)都可以用兩個不同的基底向量合成

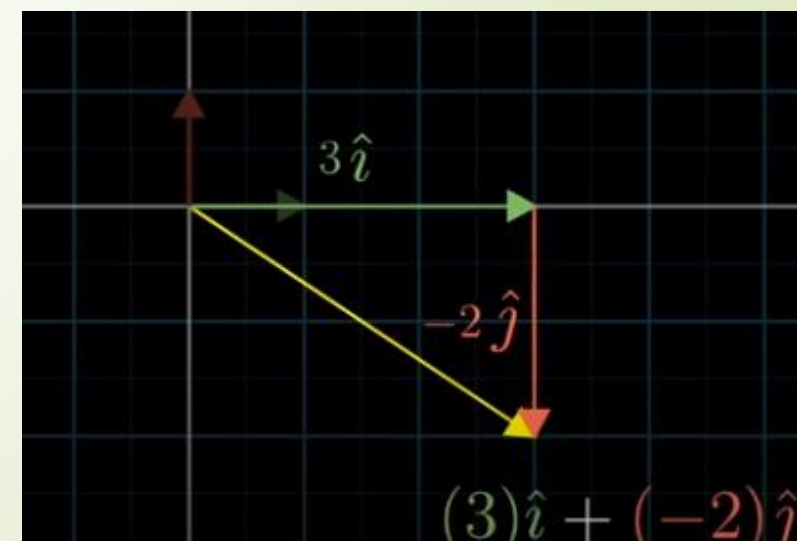
➡ 用該座標系統的基底basis向量表示

➡ $p = \begin{bmatrix} 3.1 \\ -2.9 \end{bmatrix}$ in (i, j)

➡ $p = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 1.3 \end{bmatrix}$ in (v, w)

➡ $p = (3, -2) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = (3)i + (-2)j$

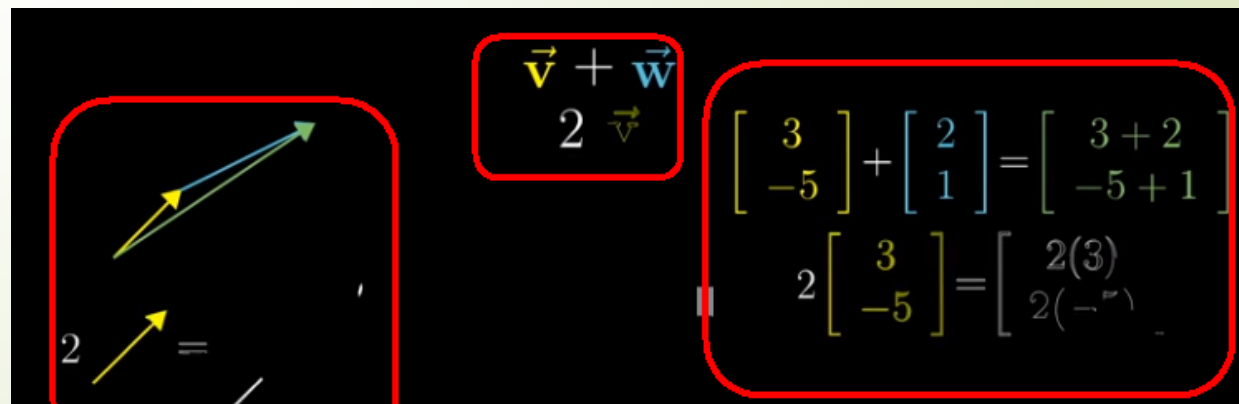
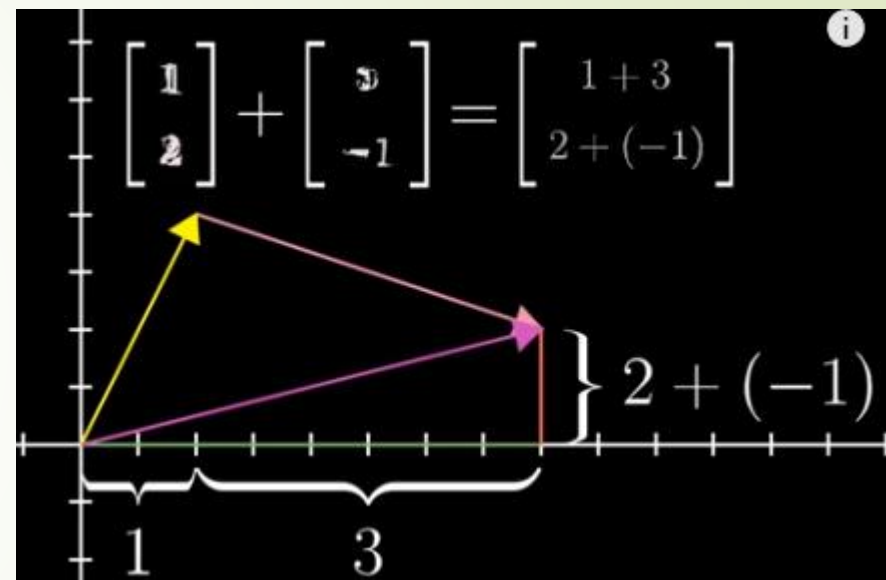
➡ p可以用兩個基底向量的『線性組合』Linear combination來表示



線性代數向量的進階意義(2)

為何稱『線性』組和linear combination?

- 只要符合addition可合成 + scaling乘以係數的可縮放
 - 就是『線性組和』
 - linear combination 』



線性代數向量的進階意義(3)

線性組和可以生成向量空間span

➡ 線性組和linear combination可以生成向量空間(Span)

➡ 例如：用 $(\vec{v}, \vec{w})$ 生成向量空間

➡ $\vec{p} = a\vec{v} + b\vec{w}$

➡ 生成向量空間

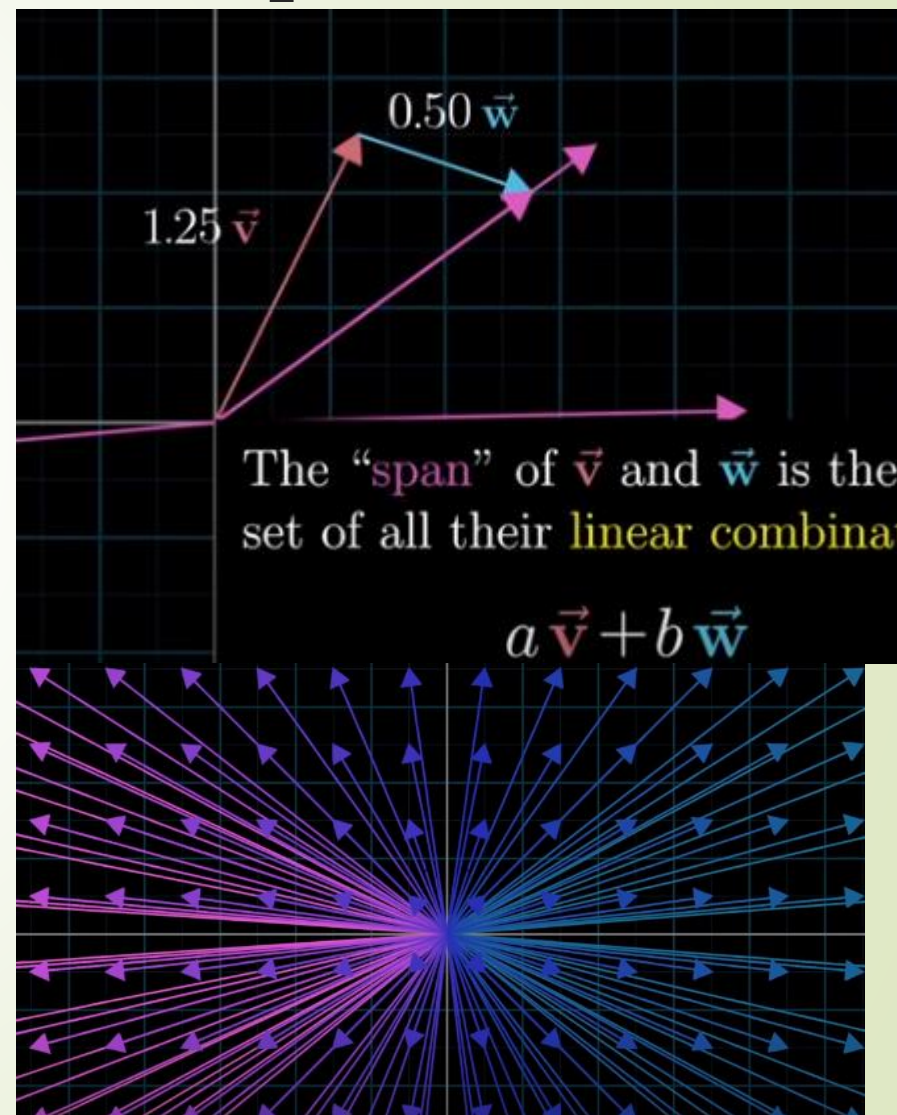
➡ The span of $(\vec{v}, \vec{w})$

➡ $= (\vec{v}, \vec{w})$ 的線性組合

➡ 生成2D平面上的任意一點

➡ 形成空間集合set

➡ 【span = 伸展】



2維空間的二個基底向量 $(\vec{v}, \vec{w})$ 的線性組合

➡ (1)可能結果1：

➡ 若 $(\vec{v}, \vec{w})$ 線性獨立(linear independent)，就可以生成一個二維平面空間

➡ 生成向量空間

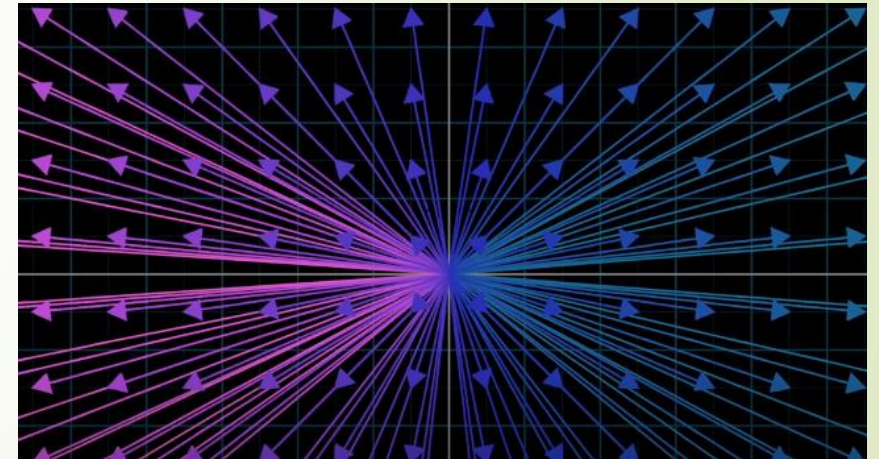
➡ The span of $(\vec{v}, \vec{w})$

➡ = $(\vec{v}, \vec{w})$ 的線性組合

➡ 生成2D平面上的任意一點

➡ 形成空間集合set

➡ 【span = 伸展】

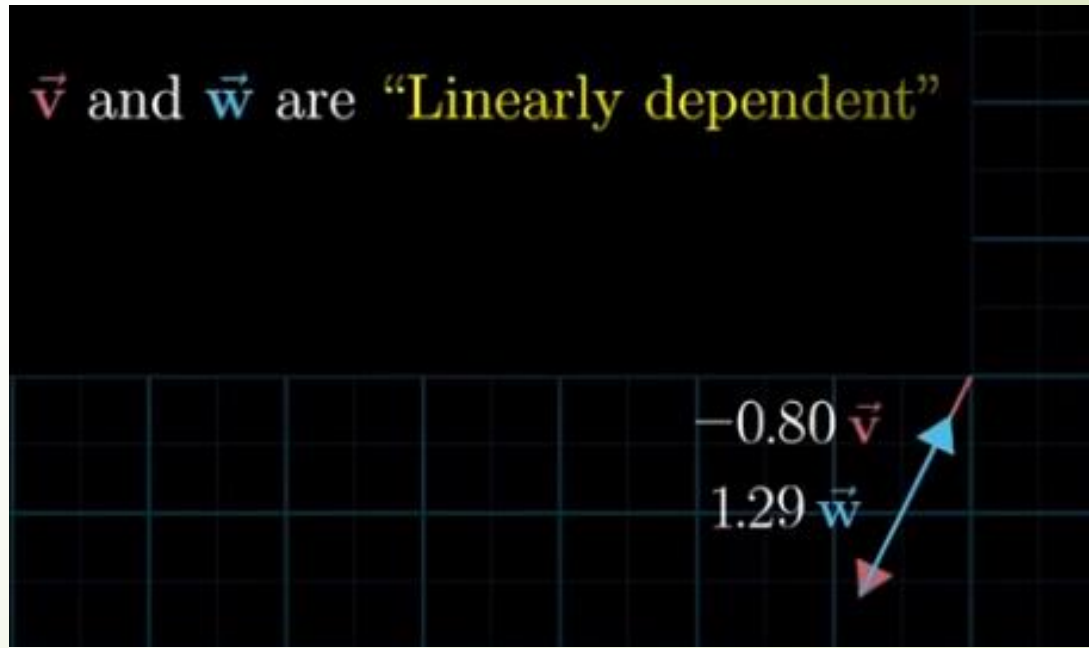


2維空間的二個基底向量 $(\vec{v}, \vec{w})$ 的線性組合

- ➡ (2)可能結果2：
 - ➡ 若 $(\vec{v}, \vec{w})$ 線性相關(linear dependent)
 - ➡ 會生成一個一維直線
 - ➡ 因為 $(\vec{v}, \vec{w})$ 在同一直線上

$\vec{v}$ and $\vec{w}$ are “Linearly dependent”

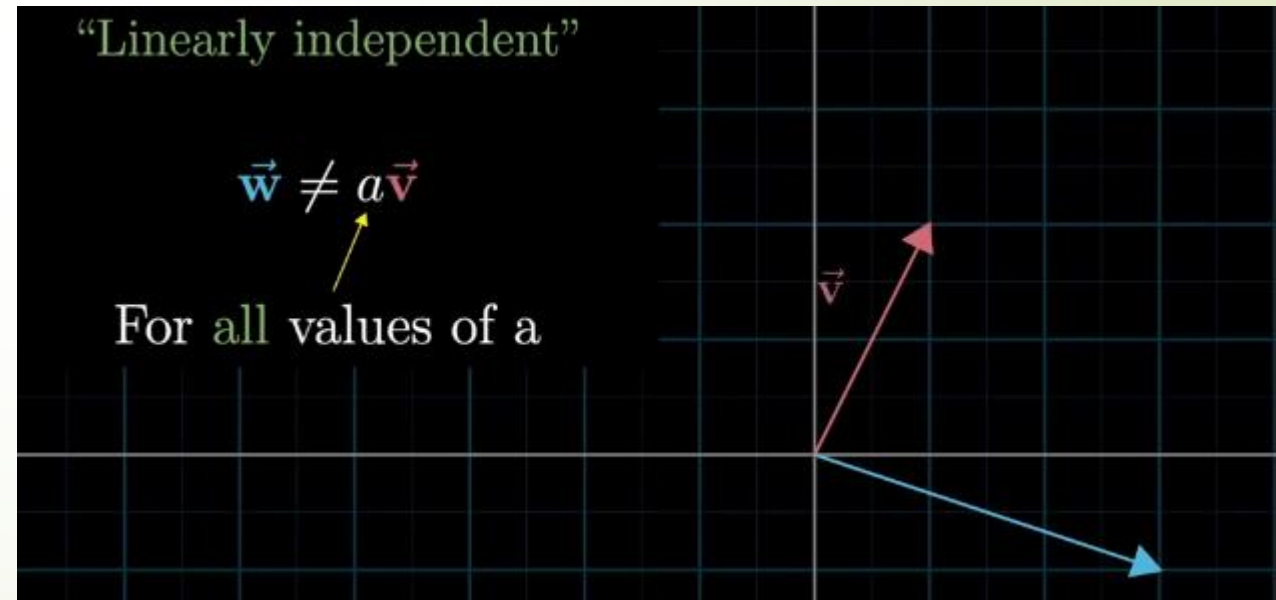
$-0.80 \vec{v}$
 $1.29 \vec{w}$



2維空間 $(\vec{v}, \vec{w})$ 線性獨立(linear independent)的數學式

➡ 2維空間 $(\vec{v}, \vec{w})$ 線性獨立(linear independent)的數學式：

➡ $\vec{w} \neq a\vec{v}$



3維空間的三個基底向量 $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ 的線性組合

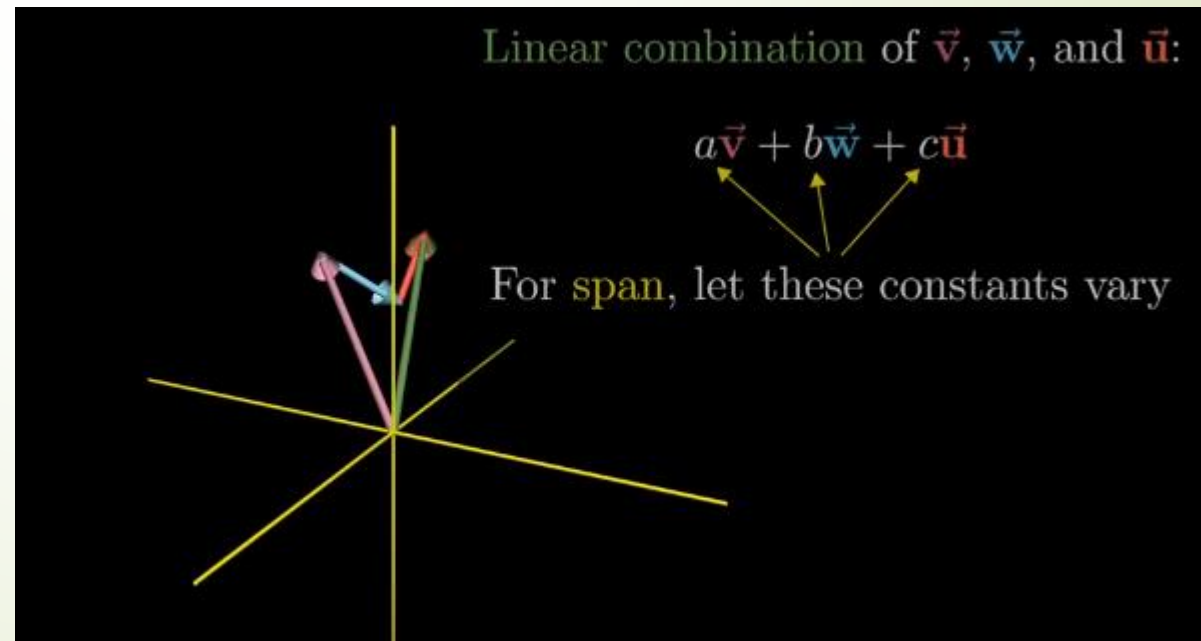
➡ 3維空間的三個基底向量 $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ 的線性組合

➡ The span of $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$: $a\vec{v} + b\vec{w} + c\vec{u}$

➡ (1)可能結果1：

➡ 若 $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ 線性獨立(linear independent)，就可以生成一個三維空間

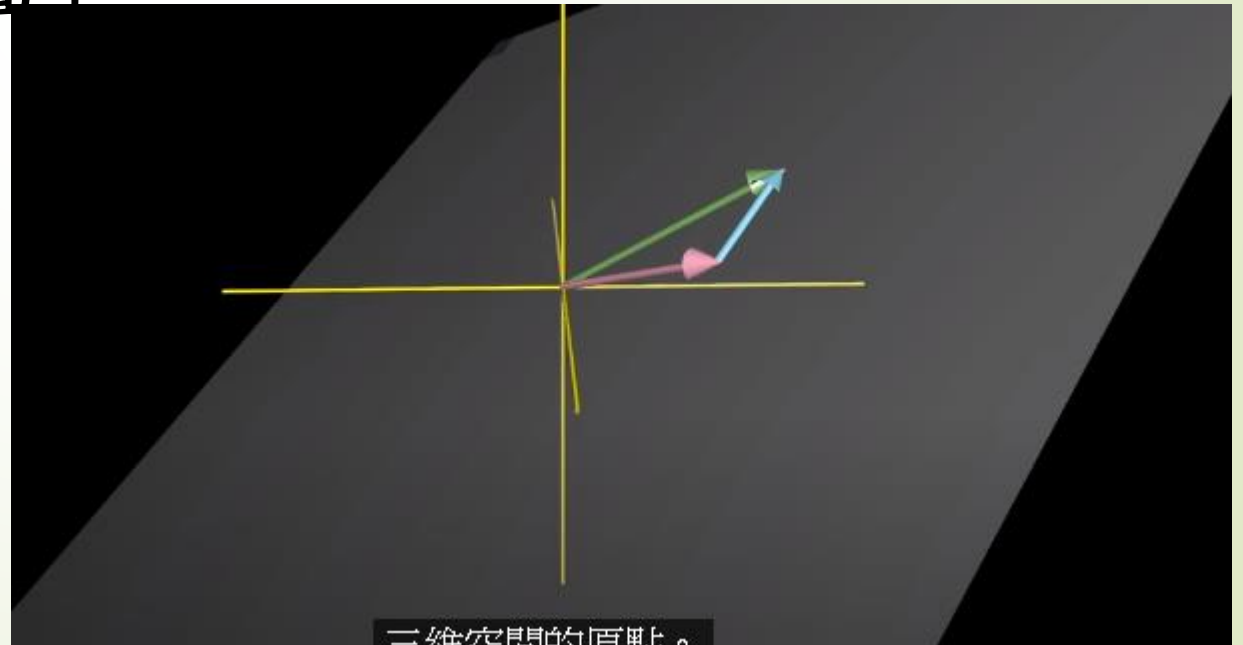
➡ $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ 的線性組合



3維空間的三個基底向量 $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ 的線性組合

➡ (2) 可能結果2：

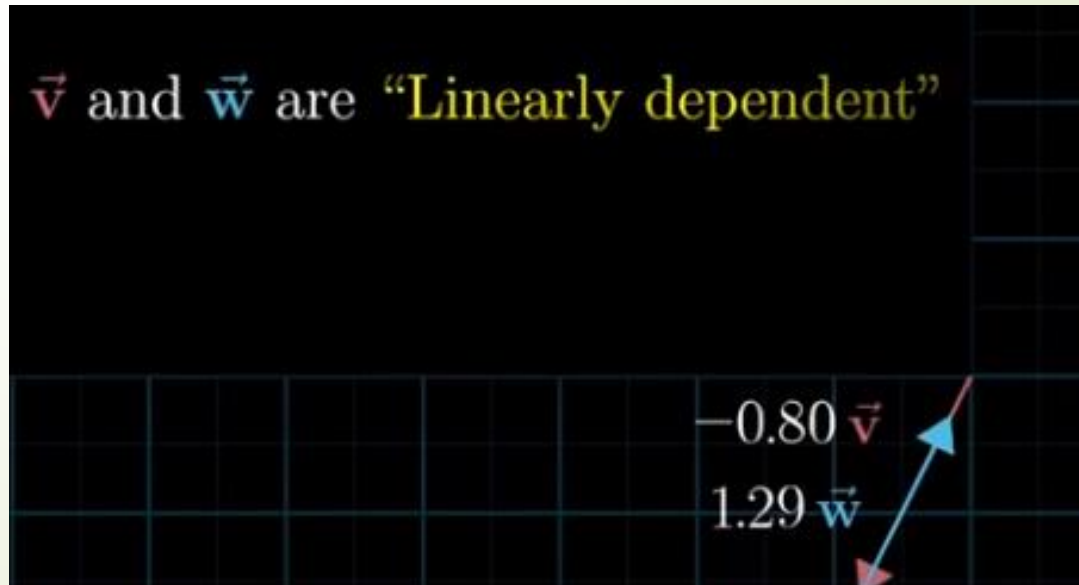
- ➡ 若 $(\vec{v}, \vec{w})$ 線性相關(linear dependent)
- ➡ 可能會生成一個二維平面
- ➡ 因為 $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ 在同一平面上



3維空間的三個基底向量 $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ 的線性組合

➡ (3) 可能結果3：

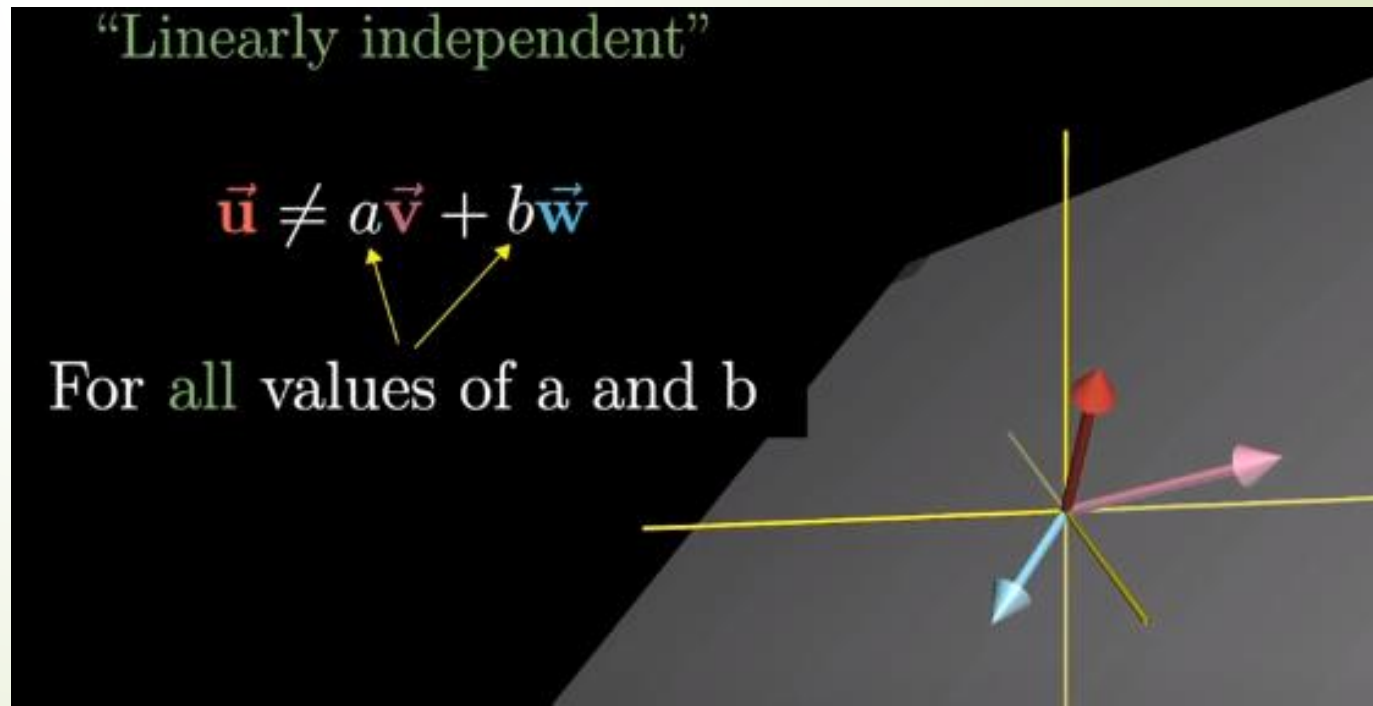
- ➡ 若 $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ 線性相關(linear dependent)
- ➡ 可能會生成一個一維直線
- ➡ 因為 $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ 在同一直線上



3維空間 $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ 線性獨立(linear independent)的數學式

➡ 3維空間 $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ 線性獨立(linear independent)的數學式：

➡ $\vec{u} \neq a\vec{v} + b\vec{w}$



結論：生成向量空間的前提與條件

- 條件1：若基底向量basis($\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$)是**線性獨立**(linear independent)的
- 條件2：基底向量basis($\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$)的**線性組合**(linear combination)集合(set)：
- 那麼($\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$)的**線性組合**(set)，就會**span**一個向量空間