chp3：線性代數的本質：

線性變換、矩陣

陳擎文老師

線性代數的學習重點與探討主題

觀念

- 數學符號的意義

基礎

- 向量
- 矩陣
- 聯立方程式
- 行列式

主題

- 線性映射
- 坐標轉換
- 特徵向量

線性代數授課的兩條線

- (1). 了解線性代數的本質
  - 了解其背後的物理意義
  - 了解關鍵重點
- (2). 學習如何計算
  - 了解數學的定義，公式，定理，證明
  - 練習計算

參考資料

- https://www.youtube.com/watch?v=kYB8IZa5AuE

線性代數的重要主題

- (1). 商科學生，學線性代數的重要主題：
  - 解**聯立方程式**，求**最佳解**

- (2). 理工科學生，學線性代數的重要主題：
  - 探討**線性轉換**(linear transformations)
  - 探討**線性映射**(linear mappings)

線性代數(linear algebra)

- 就是線性轉換(linear transformations)
- 就是線性映射(linear mappings)

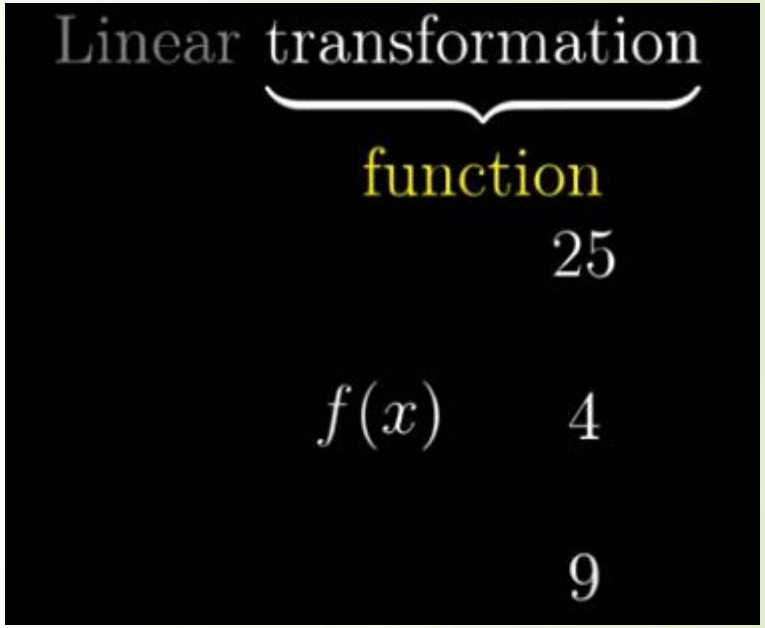
線性代數(linear algebra)

- 就是**線性轉換**(linear transformations)
- 就是**線性映射**(linear mappings)

- 就是由這個座標，轉換到另外一個座標的方法
- 就是探討不同座標系統之間的線性變換關係

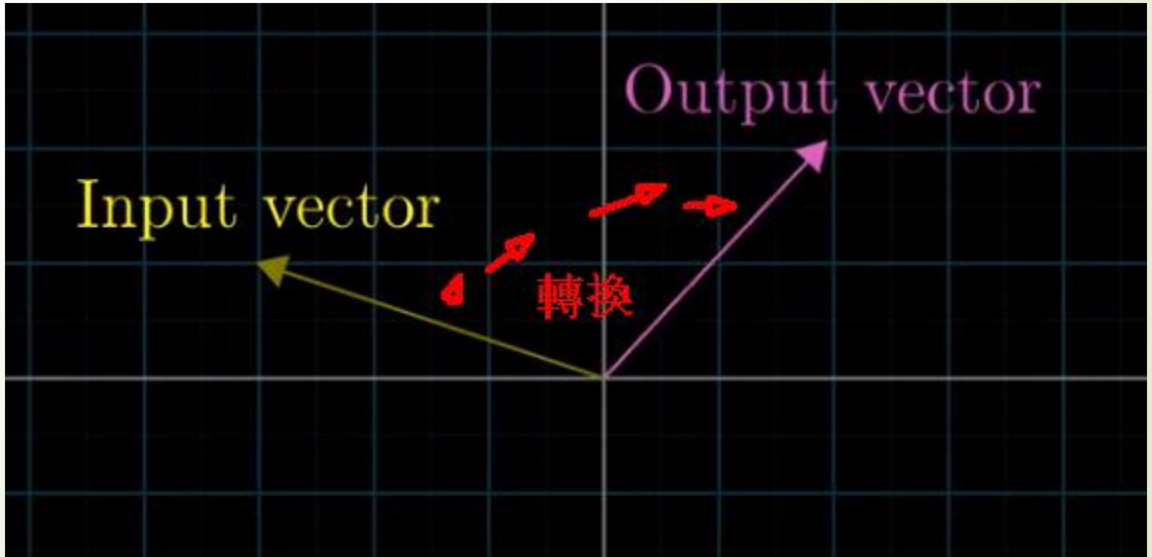
【基礎觀念】轉換transformations

- 轉換transformations
  - 就是函數y = f(x)
  - 就是映射
- Transformation
  - = function
  - = mapping
- 你輸入input, x
  - 會映射出輸出output, y
  - 中間的轉換函數 = f(x)



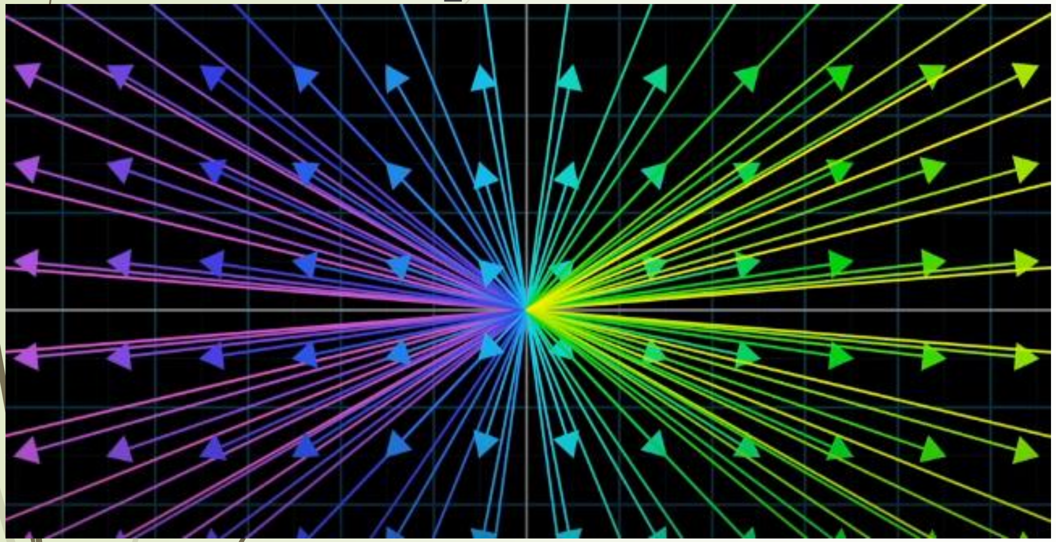
線性代數的轉換transformations

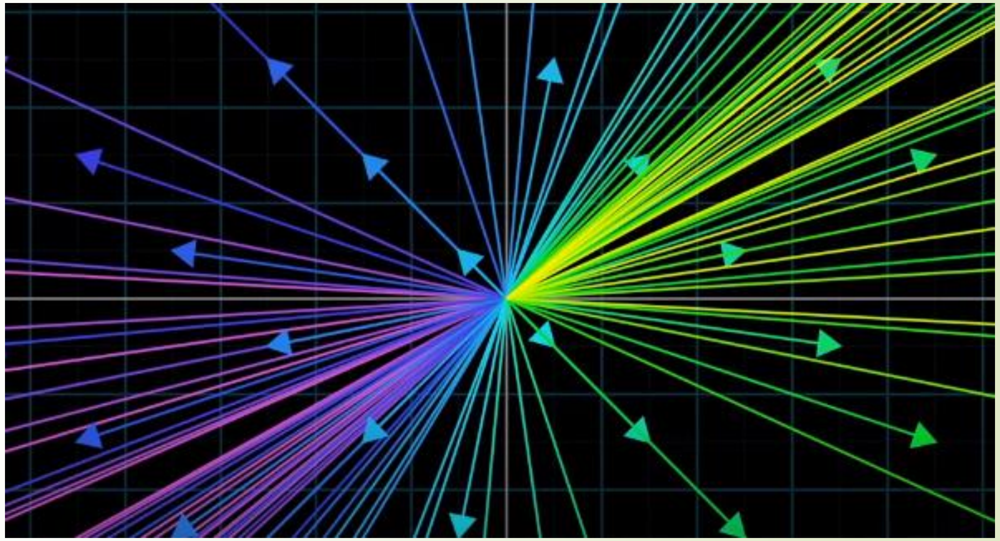
- 你輸入input, 向量x=$\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}$
  - 會映射出輸出output, y=$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$
  - 中間的轉換函數 = f(x)



線性代數的轉換transformations

- input向量x ➔ 映射出輸出output y

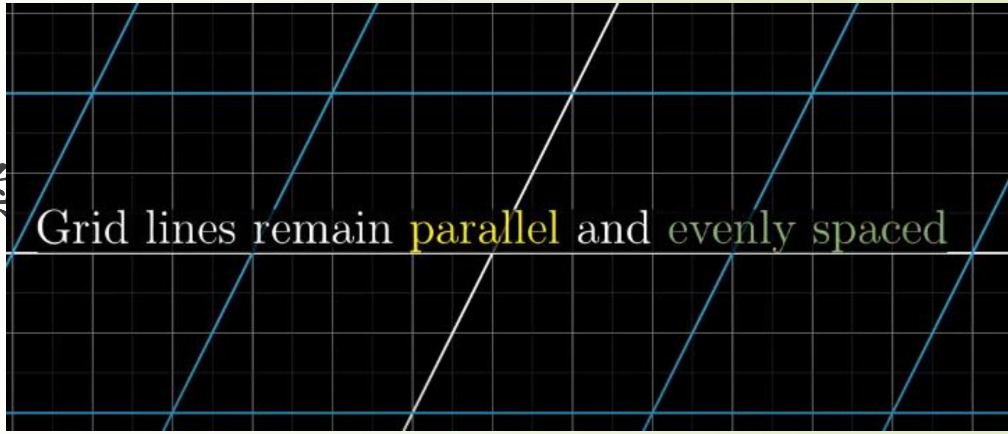


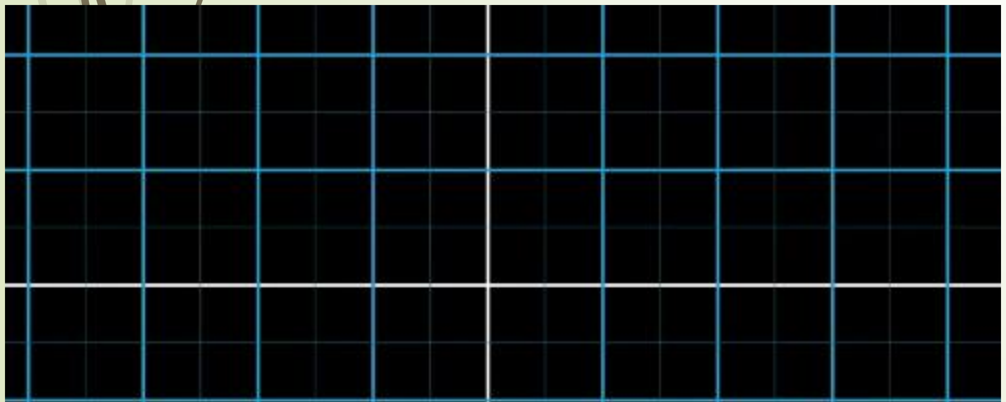


網格移動，縮放

線性轉換(linear transformations)

- 轉換transformations 有很多種，我們要探討的是
  - 線性轉換(linear transformations)
- 何謂線性轉換？
- 必須符合3個特點才是線性轉換
  - (1).網格不可彎曲變換
  - (2).原點(0,0)保持不動
  - (3).網格保持平行(parallel)，等距(even)變換

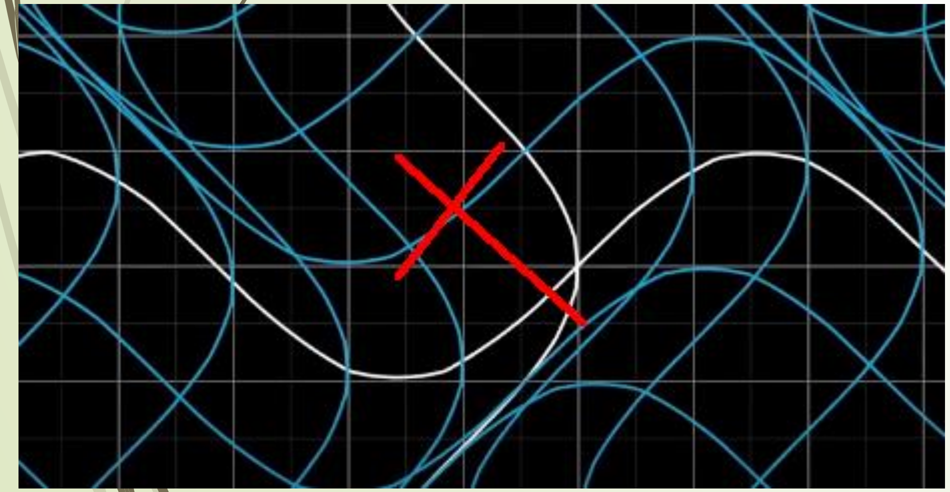


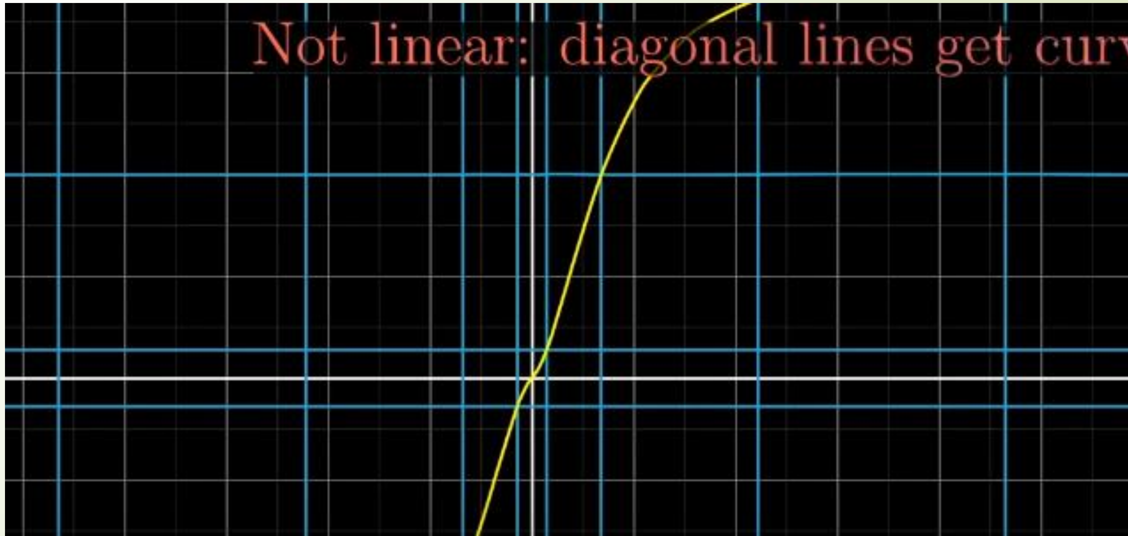


網格移動，縮放

不是線性變換的例子

- 1. 網格彎曲變換
- 2. 網格沒有等距，造成原來的直線，變換成曲線

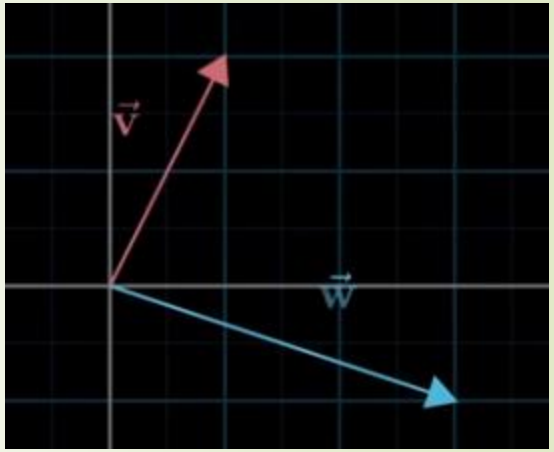


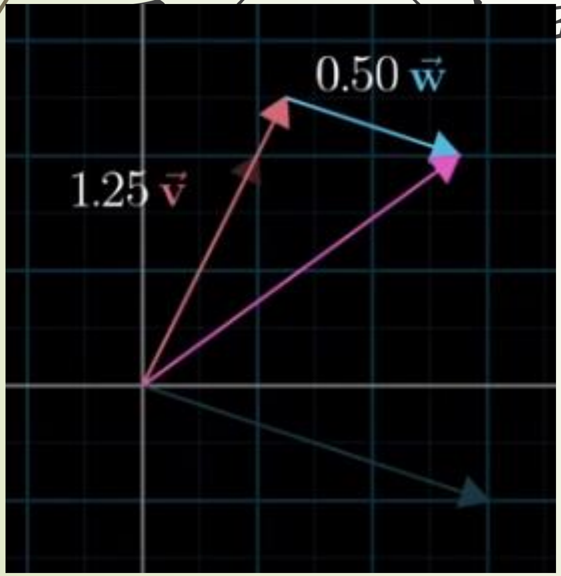


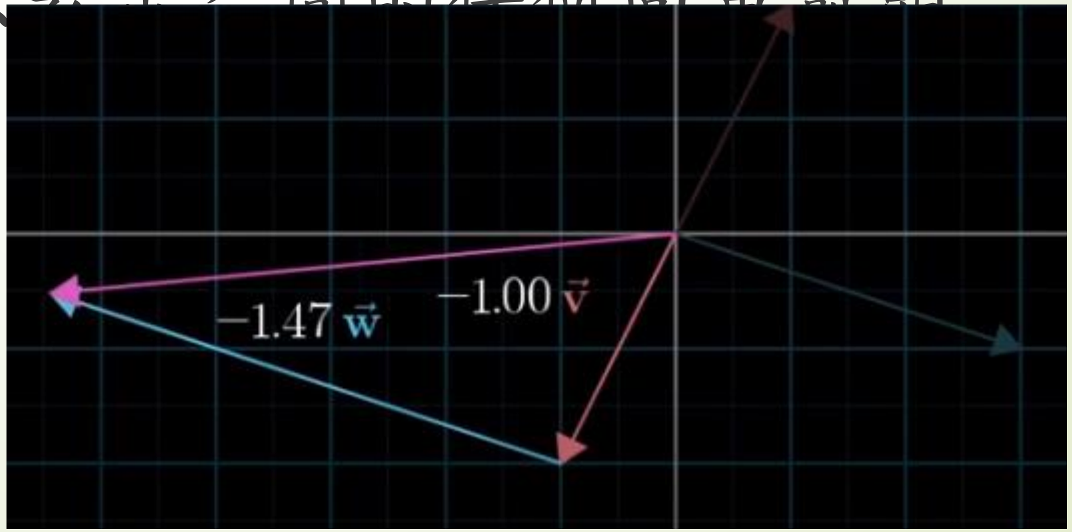
如何用數學式表示向量的轉換 transformation

- 關鍵原理：
  - 1. 追蹤原來座標的基底向量(i, j)
  - 2. 當網格被線性移動後，(i, j)會變成
- 此任意非正交直角座標系統 (v, w)

可以表示空間的任何向量箭頭





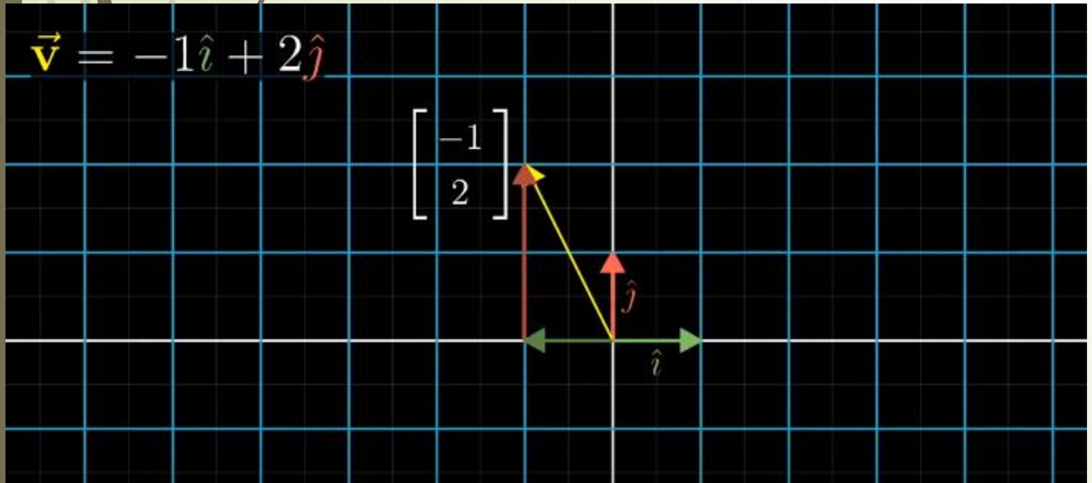


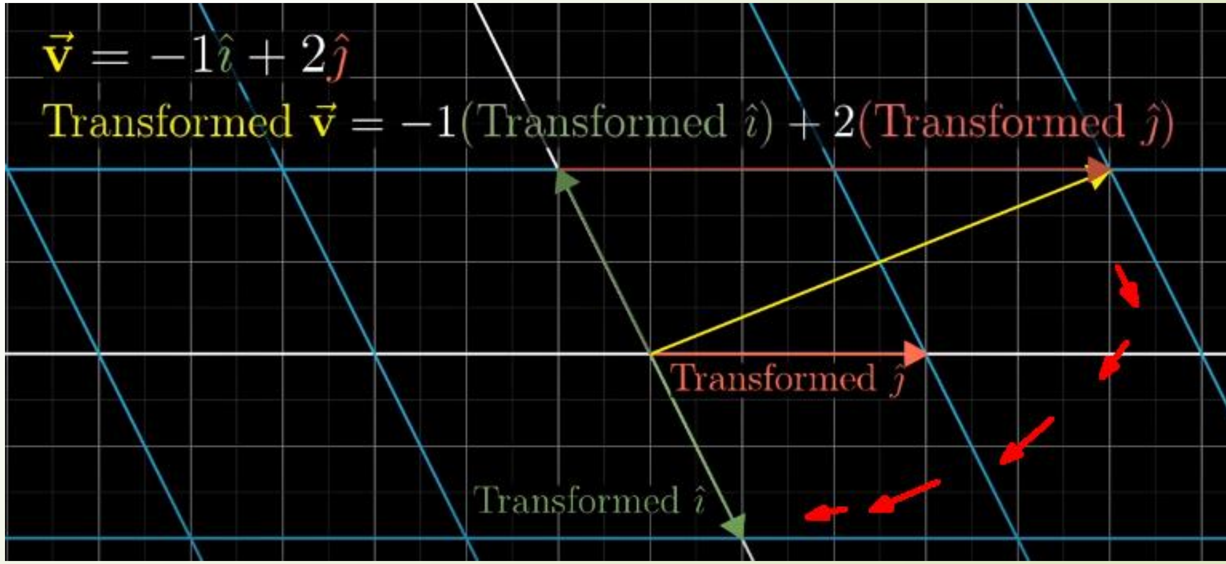
範例1：$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

代表什麼物理意義？

如何用數學式表示向量的轉換 transformation

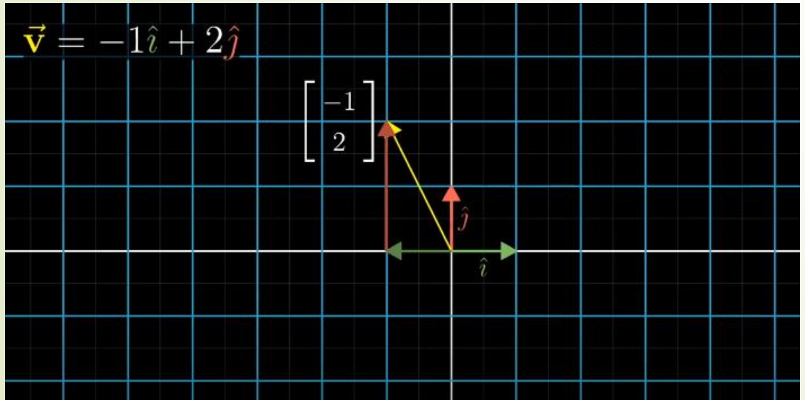
- 範例：
  - 1. 在原來直角座標有個向量$\vec{v}$=$\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$=-1i+2j
  - 2. 當線性移動網格(平行＋均等），原來向量$\vec{v}$被移動到
  - 3. $\overrightarrow{v2}$=-1$\overbrace{i}$+2$\overbrace{j}$=？？？？

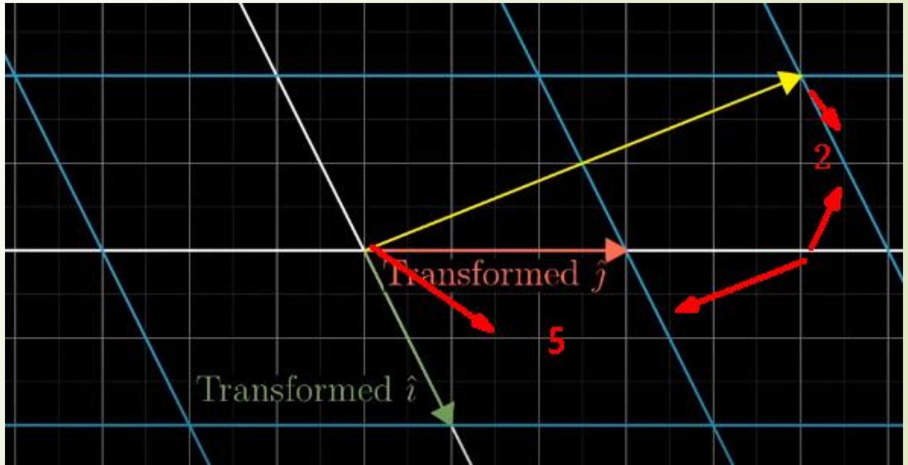




$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$ 代表什麼意義

- $Ax = y$
- 輸入向量x，input vector = $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$
- 輸出向量y，output vector = $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $f(x)$ = 基底轉換矩陣A= $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, 為什麼why ????





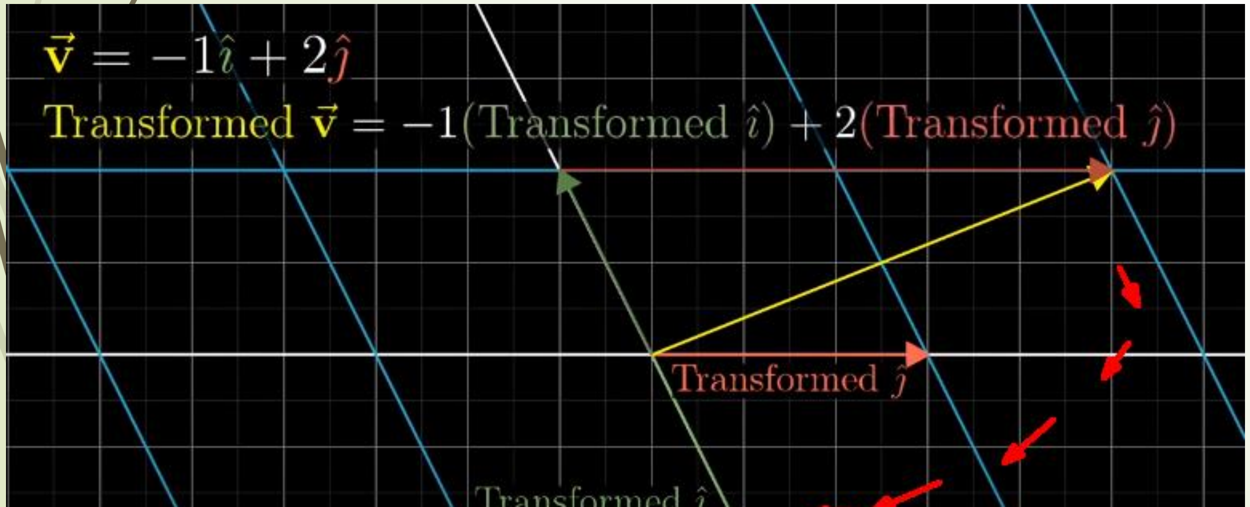
基底轉換矩陣A= $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

代表什麼物理意義？

如何用數學式表示向量的轉換 transformation

- 關鍵1：追踪原本基底(i, j)被移動變形成為新基底 $(\widetilde{i},\widetilde{j})$ ？
  - 4. 從兩層網格疊圖，發現：$\widetilde{i}=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$i， $\widetilde{j}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$j
  - 5. $\overrightarrow{\boldsymbol{v2}}=-1\widetilde{i}+2\widetilde{j}=-1\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$i $+2\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$j $=\begin{bmatrix}-1+6\\2+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$

注意觀看轉換前後位置
i 軸是綠色軸
J 軸上紅色軸
某點向量是黃色



如何用數學式表示向量的轉換

- 關鍵2：追蹤原本基底(i, j)被移動變形成為新基底($\tilde{i}$, $\tilde{j}$) 的轉換關係=基底轉換矩陣
  - 4. 從兩層網格疊圖，發現：$\tilde{i}=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$i， $\tilde{j}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$j
  - 5. $\overrightarrow{\boldsymbol{v2}}=-1\tilde{i}+2\tilde{j}=-1\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\mathrm{i}+2\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\mathrm{j}=\begin{bmatrix}-1+6\\2+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$
  - 6. 任意點通用式：有個向量$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，被移動轉換到$\begin{bmatrix}x2\\y2\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}x2\\y2\end{bmatrix}=\mathrm{x}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\mathrm{i}+\mathrm{y}\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\mathrm{j}=\begin{bmatrix}1&3\\-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

  - 7. 基底轉換矩陣$=\begin{bmatrix}1&3\\-2&0\end{bmatrix}$

如何用數學式表示向量的轉換

- 被移動轉換後的新位置$\begin{bmatrix} x2 \\ y2 \end{bmatrix}$

公式：$\begin{bmatrix} x2 \\ y2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 轉 & 換 \\ 矩 & 陣 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

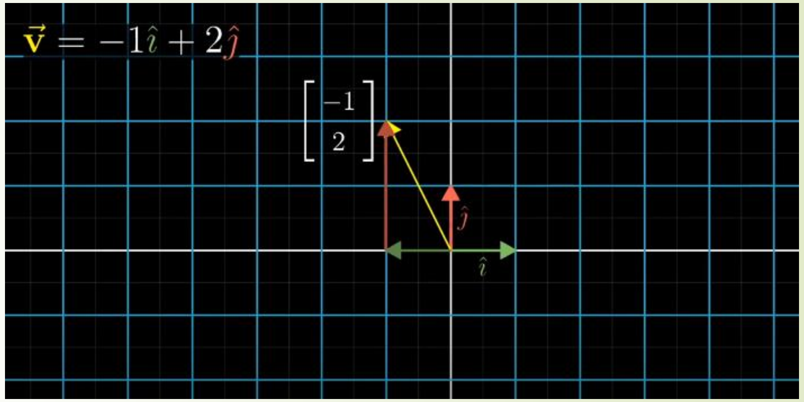
- 其中，基底被移動後轉換矩陣$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

基底轉換矩陣A= $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

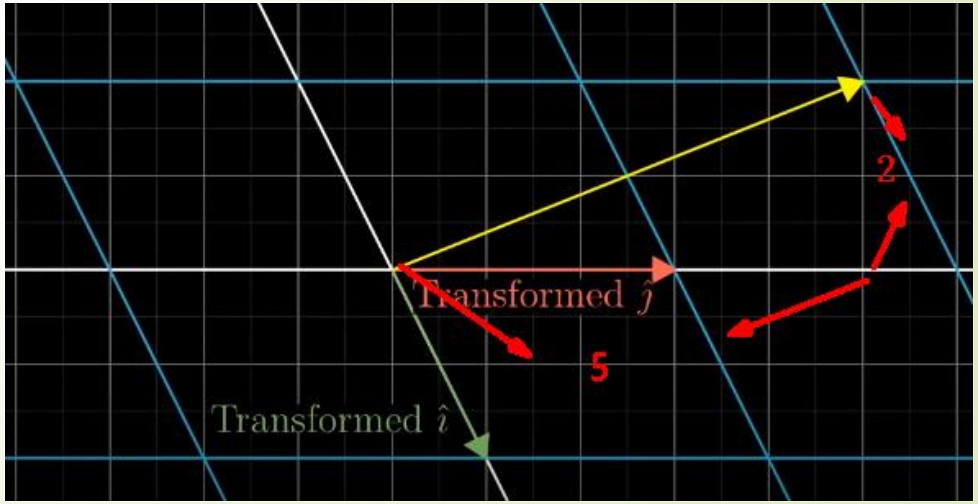
代表什麼物理意義？

轉換矩陣A=$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}3\\0\end{matrix}} \end{bmatrix}$代表什麼物理意義

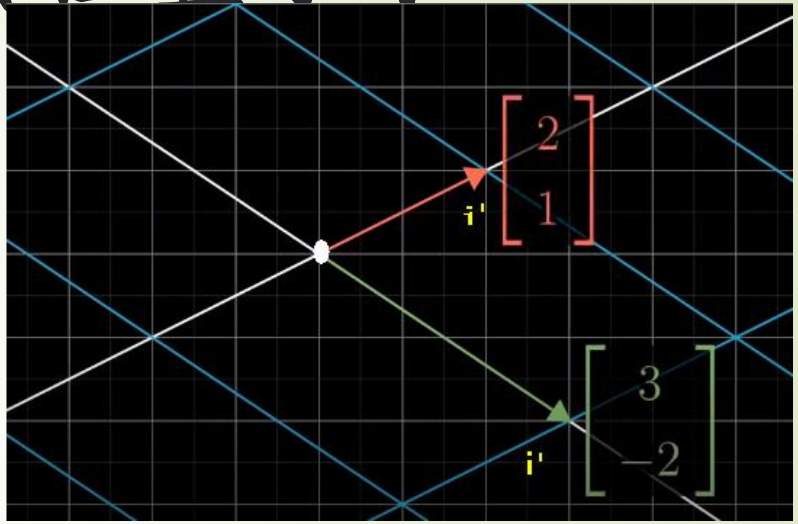
- 代表：
- (1).原本的i軸，被轉換到$\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$
  - $\hat{i} = \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$I
- (2).原本的j軸，被轉換到$\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$
  - $\hat{j} = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$i



注意觀看轉換前後位置：
i 軸是綠色軸
J 軸上紅色軸
某點向量是黃色



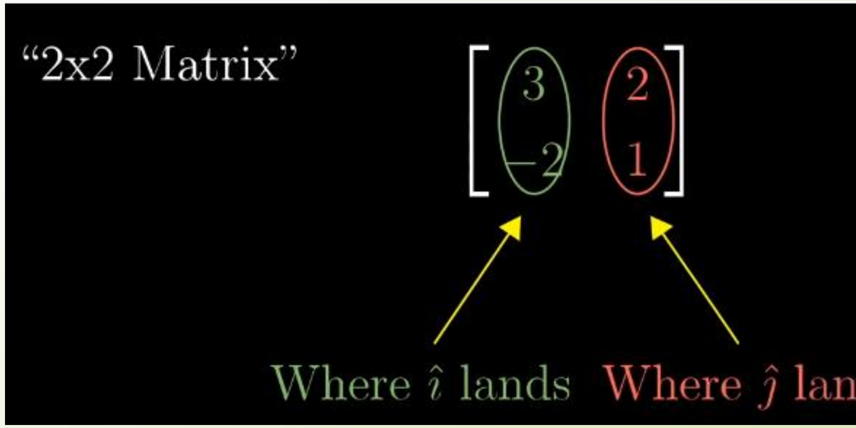
範例2：$\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}$被轉換到什麼位置了？



- 網格被動到$\begin{bmatrix}3 & 2\\-2 & -1\end{bmatrix}$
- 基底被移動後轉換矩陣＝$\begin{bmatrix}3 & 2\\-2 & -1\end{bmatrix}$
- 任意點被移動轉換後的新位置$\begin{bmatrix}x2\\y2\end{bmatrix}$

公式：$\begin{bmatrix}x2\\y2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{轉} & \text{換}\\\text{矩} & \text{陣}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\-2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}3 & 2\\-2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{5}\\\mathbf{7}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15+14\\-10-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}29\\-17\end{bmatrix}$$



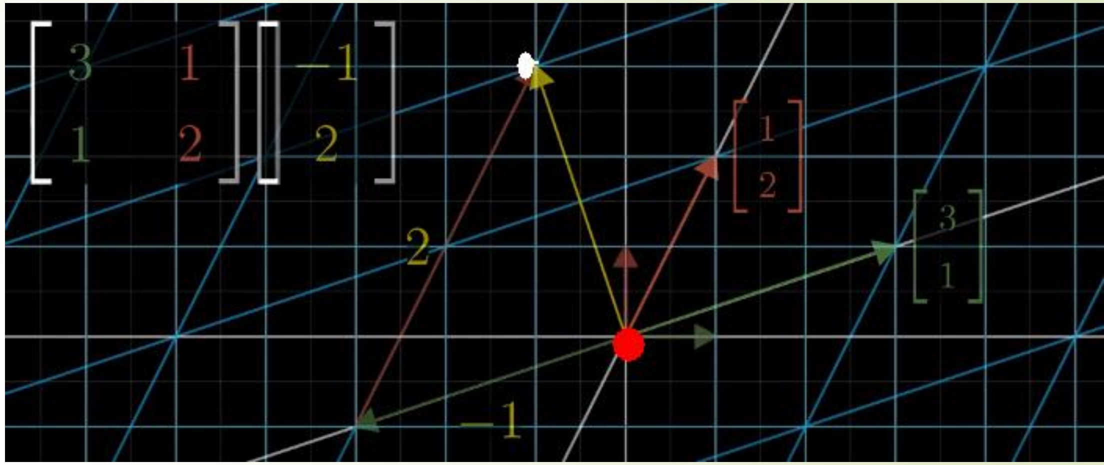
任意矩陣$\begin{bmatrix} \mathrm{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$代表的物理意義

- 1. 任意矩陣$\begin{bmatrix} \mathrm{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$
  - 代表：基底被移動後的轉換矩陣$=\begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$
  - 代表：網格被動到$\begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

- 2. 計算f = $\begin{bmatrix} \mathrm{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
  - 代表：計算$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$被推移後的新位置

範例3：$\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$被轉換到什麼位置了？



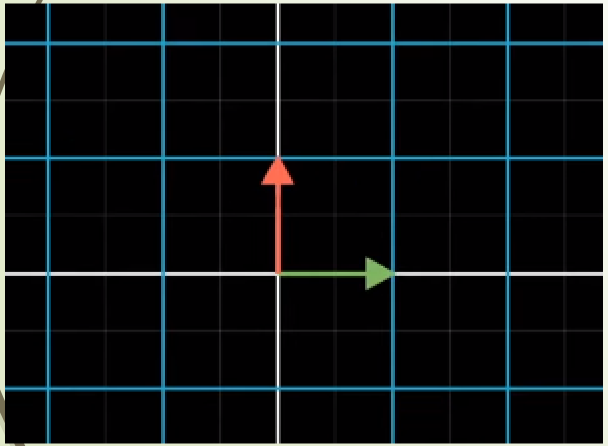
- 網格被動到$\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$
- 基底被移動後轉換矩陣＝$\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$
- 任意點被移動轉換後的新位置$\begin{bmatrix}x2\\y2\end{bmatrix}$

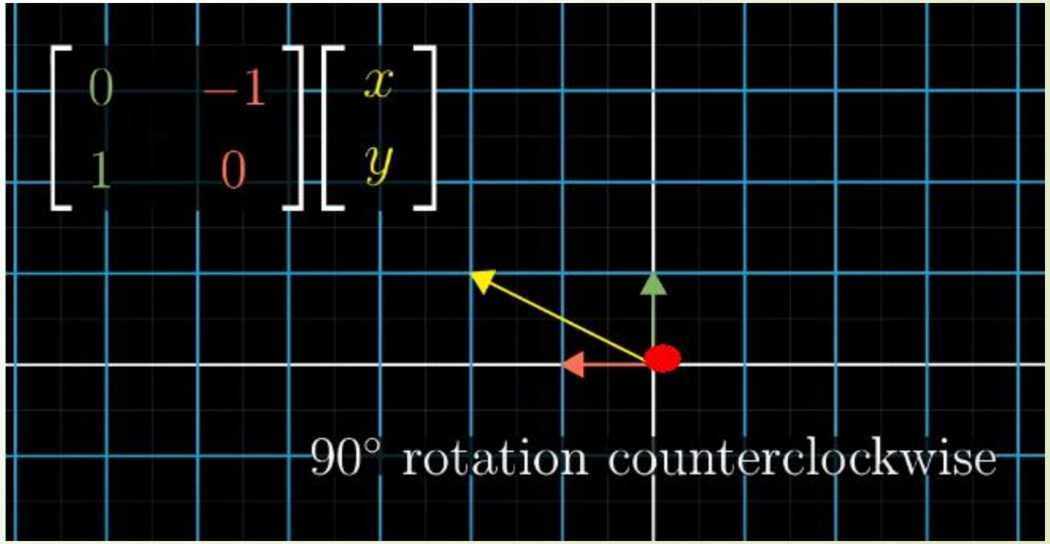
公式：$\begin{bmatrix}x2\\y2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{轉} & \text{換}\\\text{矩} & \text{陣}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3+\mathbf{2}\\-1+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix}$

範例4：逆時針旋轉90度變換後的矩陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

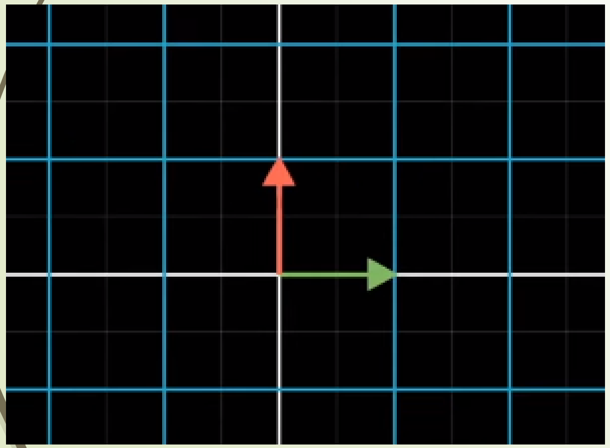
- 逆時針旋轉90度counterclockwise rotate
- 被移動後的網格：$\tilde{i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ i， $\tilde{j} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ j
- 基底被移動後的轉換矩陣$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

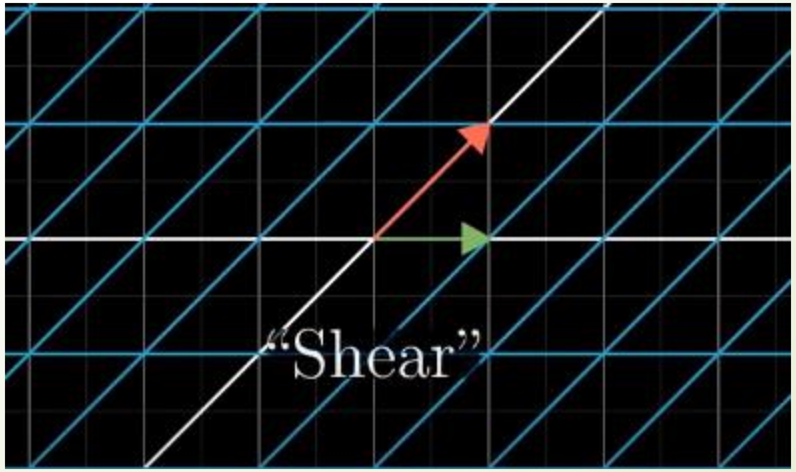




範例5：剪切變換後的矩陣 $\begin{bmatrix} a & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$

- 剪切變換shear
- 被移動後的網格：$\hat{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i， $\hat{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ j
- 基底被移動後的轉換矩陣＝$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$





任意矩陣$\begin{bmatrix} \mathrm{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$代表的物理意義

- 任意矩陣$\begin{bmatrix} \mathrm{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$代表的物理意義
  - **看到矩陣：就表示，存在著空間的某種轉換**
  - 代表：基底被移動後的轉換矩陣＝$\begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$
  - 代表：網格被動到$\begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

線性代數個章節所代表的物理意義

- 線性代數往後的各個章節
  - 都有矩陣，都是代表**空間的某種轉換**
  - 都是座標轉換的演算

Essence of Linear Algebra

Chapter 1: Vectors, what even are they?
Chapter 2: Linear combinations, span and bases
Chapter 3: Matrices as linear transformations
Chapter 4: Matrix multiplication as composition
Chapter 5: The determinant
Chapter 6: Inverse matrices, column space and null space
Chapter 7: Dot products and cross products
Chapter 8: Change of basis
Chapter 9: Eigenvectors and eigenvalues
Chapter 10: Abstract vector spaces

線性代數(linear algebra)

- 就是線性轉換(linear transformations)
- 就是線性映射(linear mappings)

- 就是空間轉換
- 就是座標轉換