chp4：線性代數的本質：
矩陣乘法、合成多個移動

陳擎文老師

線性代數的學習重點與探討主題

觀念

- 數學符號的意義

基礎

- 向量
- 矩陣
- 聯立方程式
- 行列式

主題

- 線性映射
- 坐標轉換
- 特徵向量

線性代數的學習重點

觀念

- 數學符號的意義

基礎

- 向量，張量
- 矩陣
- 行列式
- 聯立方程式

- 矩陣乘法

主題

- 線性映射
- 坐標轉換
- 特徵向量，特徵值

線性代數授課的兩條線

- (1). 了解線性代數的本質
  - 了解其背後的物理意義
  - 了解關鍵重點
- (2). 學習如何計算
  - 了解數學的定義，公式，定理，證明
  - 練習計算

線性代數(linear algebra)

- 就是線性轉換(linear transformations)
- 就是線性映射(linear mappings)

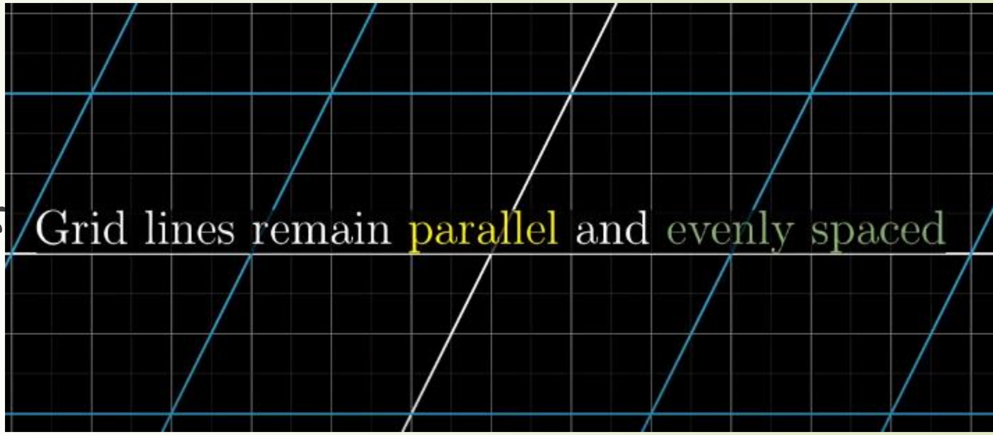
- 就是空間轉換
- 就是座標轉換

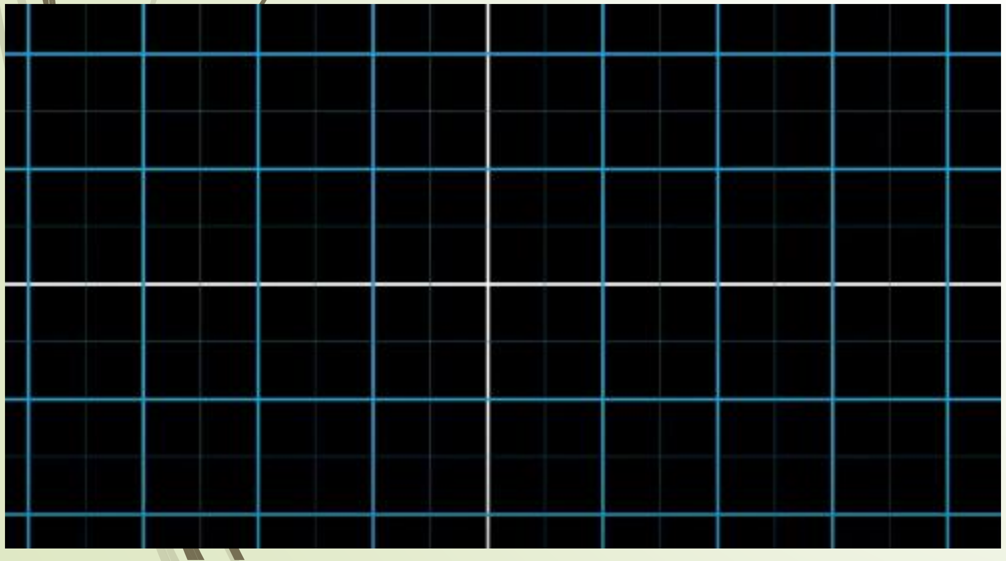
參考資料

- https://www.youtube.com/watch?v=XkY2DOUCWMU

線性轉換(linear transformations)

- 何謂線性轉換？
- 必須符合3個特點才是線性轉換
  - (1).網格不可彎曲變換
  - (2).原點(0,0)保持不動
  - (3).網格保持平行(parallel)，等距(even)變換





網格移動，縮放

任意矩陣$\begin{bmatrix} \mathrm{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$代表的物理意義

- 1. 任意矩陣$\begin{bmatrix} \mathrm{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$
  - 代表：基底被移動後的轉換矩陣$=\begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$
  - 代表：網格被動到$\begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

- 2. 計算$\mathrm{f} = \begin{bmatrix} \mathrm{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
  - 代表：計算$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$被推移後的新位置

任意矩陣$\begin{bmatrix} \mathrm{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$代表的物理意義

- 任意矩陣$\begin{bmatrix} \mathrm{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$代表的物理意義
  - **看到矩陣：就表示，存在著空間的某種轉換**
  - 代表：基底被移動後的轉換矩陣＝$\begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$
  - 代表：網格被動到$\begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$

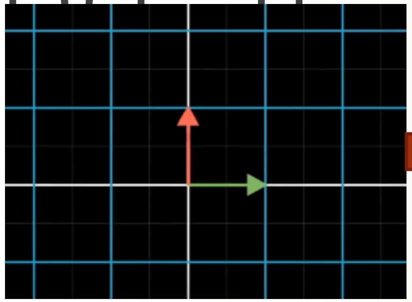
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

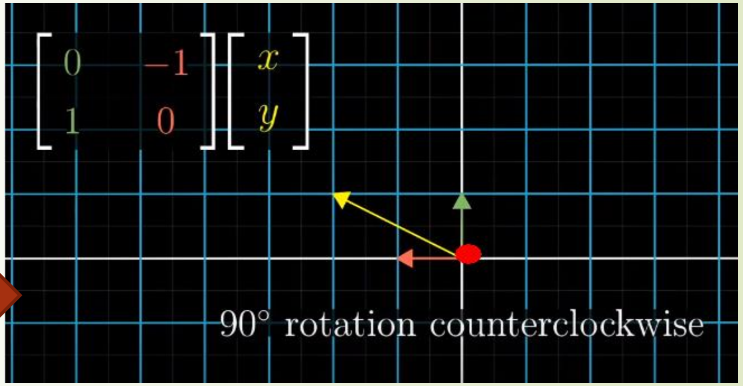
連續兩次的網格移動的矩陣表示式

- 1. 網格移動一次的矩陣寫法：
  - 看到矩陣$\begin{bmatrix} \mathrm{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$：就表示，存在著空間的某種轉換
  - 代表：基底被移動後的轉換矩陣＝$\begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$
  - $\mathrm{f} = \begin{bmatrix} \mathrm{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，計算$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$被推移後的新位置
- 2. 網格移動二次的矩陣寫法：

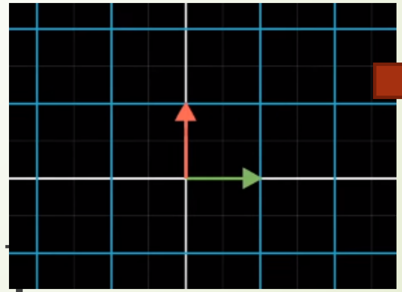
範例：連續兩次的網格移動的矩陣表示式

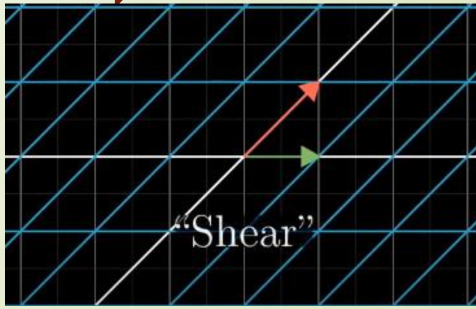
- (1). 先逆時針旋轉90度counterclockwise rotate
  - 被移動後的網格：$\tilde{i} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ i， $\tilde{j} = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$ j
  - 基底被移動後的轉換矩陣= $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$





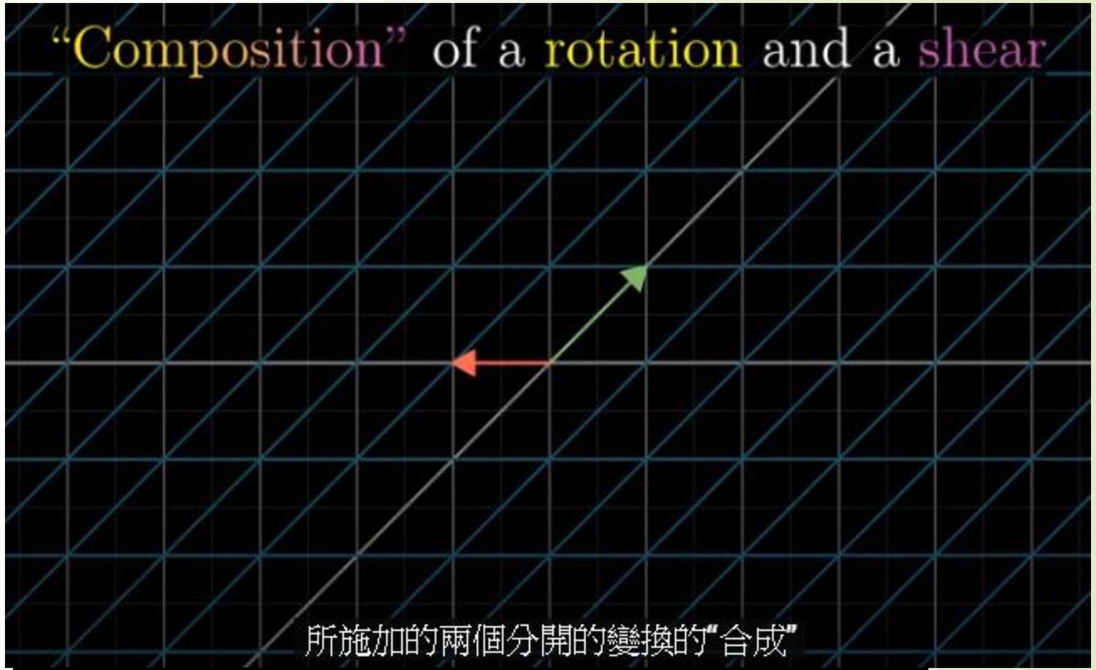
- (2). 再施加剪力變換shear
  - 被移動後的網格：$\tilde{i} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ i， $\tilde{j} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ j
  - 基底被移動後的轉換矩陣= $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$

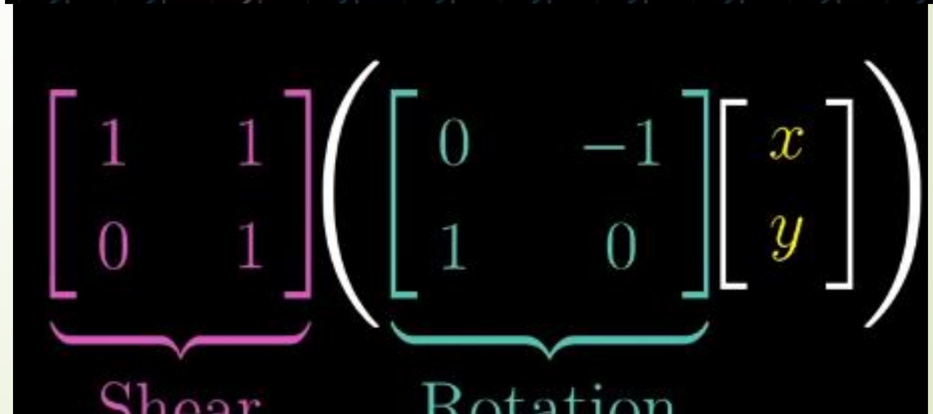




範例1：連續兩次的網格移動的矩陣表示式

- (1). 先逆時針旋轉90度counterclockwise rotate
  - 轉換矩陣 $= \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$
- (2). 再施加剪力變換shear
  - 轉換矩陣 $= \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$
- (3). 合成矩陣
  - Composition of rotation and shear
  - $\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1}\\\mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{-1}\\\mathbf{1} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1}\\\mathbf{1} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$
  - Shear Rotation composition





結論：兩個矩陣相乘的物理意義

- 兩個矩陣相乘的物理意義：
  - 代表：這是兩次對座標網格的移動之合成
  - 範例：
  - $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{-1} \\ 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$
  - Shear Rotation composition

- 注意：先後次序
  - 先做右邊的矩陣，再做左邊的矩陣

範例2：連續兩次的網格移動的矩陣表示式

(1). 先向左移動

- 轉換矩陣M1 $= \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -2\\1 & 0\end{bmatrix}$

(2). 再變換

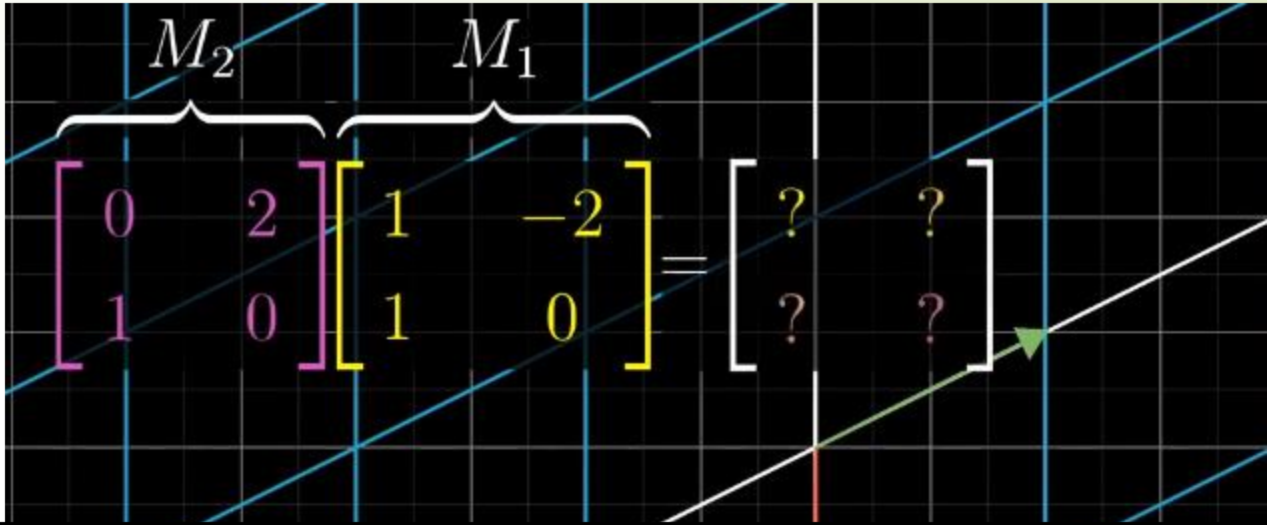
- 轉換矩陣M2 $= \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}$

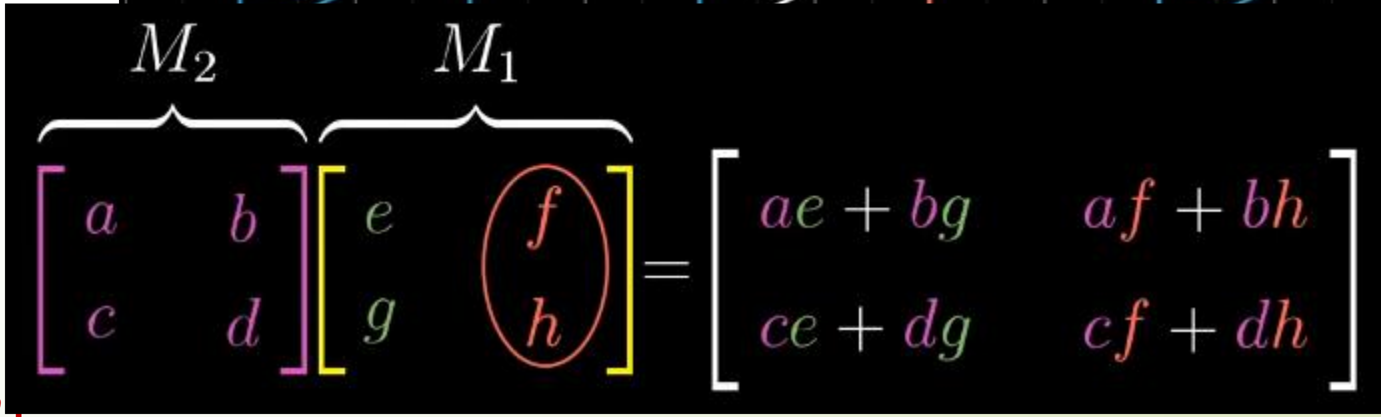
(3). 合成矩陣

- $\begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0\\1 & -2\end{bmatrix}$

(4). 合成矩陣

- $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e & f\\g & h\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{ae+bg} & \boldsymbol{af+bh}\\\boldsymbol{ce+dg} & \boldsymbol{cf+dh}\end{bmatrix}$





注意1：顛倒次序相乘答案不同，$M_1 M_2 \neq M_2 M_1$

- (1).矩陣乘法先後次序，答案不同
- 範例：
  - $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
  - Shear Rotation composition
  - $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
  - Rotation Shear composition