chp5：線性代數的本質：
三維線性變換

陳擎文老師

線性代數的學習重點與探討主題

觀念
- 數學符號的意義

基礎
- 向量
- 矩陣
- 聯立方程式
- 行列式

主題
- 線性映射
- 坐標轉換
- 特徵向量

線性代數的學習重點

觀念

- 數學符號的意義

基礎

- 向量，張量
- 3D矩陣
- 行列式
- 聯立方程式

- 矩陣乘法

主題

- 線性映射
- 坐標轉換
- 特徵向量，特徵值

線性代數授課的兩條線

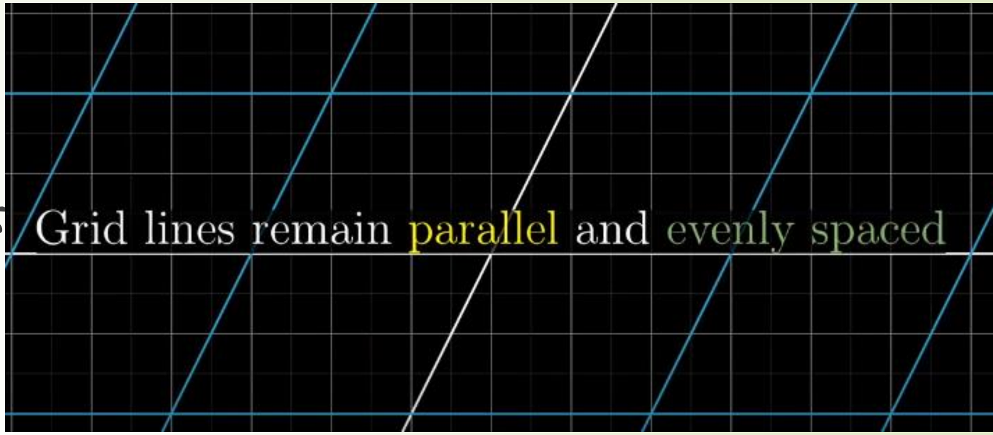
- (1). 了解線性代數的本質
  - 了解其背後的物理意義
  - 了解關鍵重點
- (2). 學習如何計算
  - 了解數學的定義，公式，定理，證明
  - 練習計算

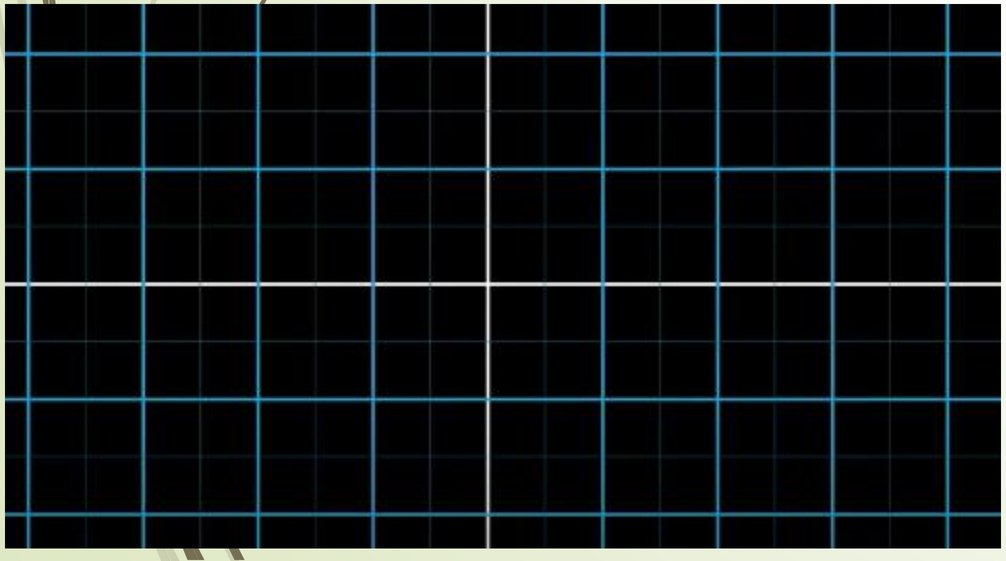
參考資料

- https://www.youtube.com/watch?v=rHLEWRxRGiM

線性轉換(linear transformations)

- 何謂線性轉換？
- 必須符合3個特點才是線性轉換
  - (1).網格不可彎曲變換
  - (2).原點(0,0)保持不動
  - (3).網格保持平行(parallel)，等距(even)變換

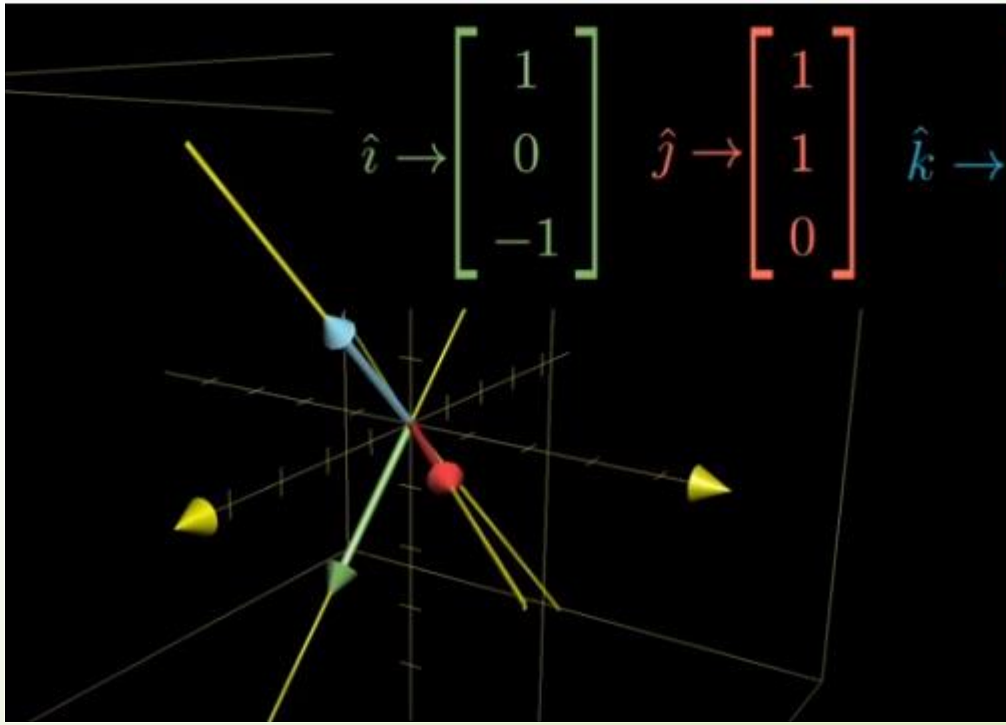




網格移動，縮放

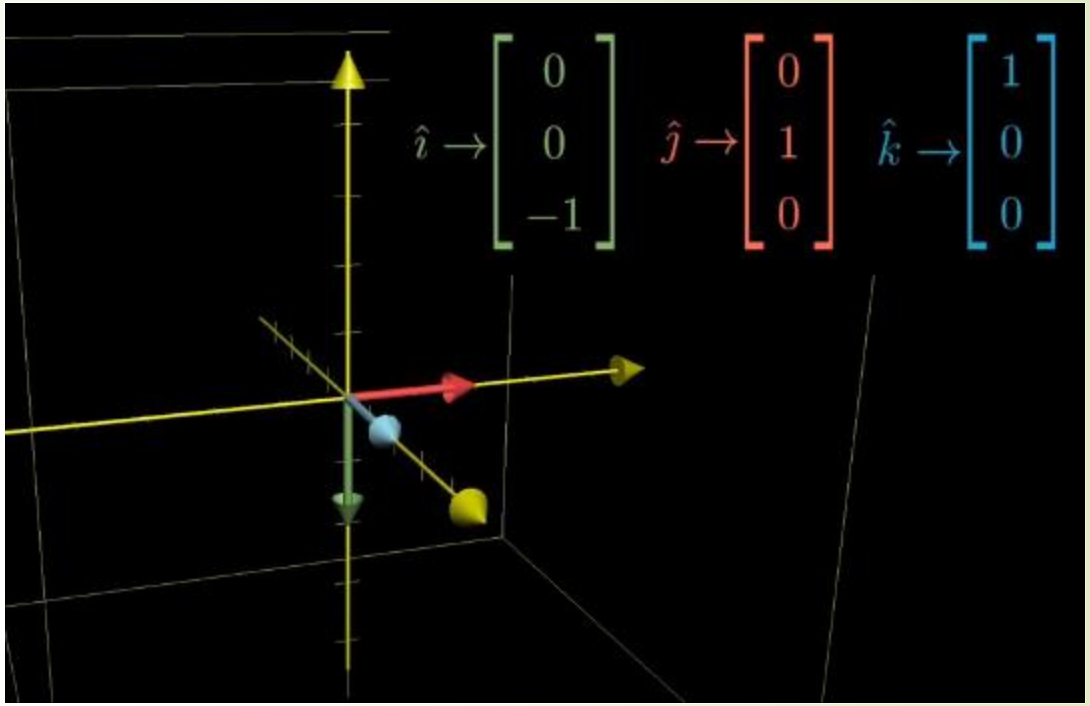
如何用數學式表示3D向量的轉換

- 關鍵原理：
  - 1. 追踪原來座標的基底向量(i, j, k)
  - 2. 當網格被線性移動後，(i, j, k)會變成($\widetilde{i}$, $\widetilde{j}$, $\widetilde{k}$)
  - 3. 被移動後的網格：
  - $\widetilde{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} i$，　$\widetilde{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} j$，　$\widetilde{k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} k$
  - 轉換矩陣M1 $= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



範例1：3D網格移動轉換的矩陣表示式

- (1). 先沿著y軸順時針旋轉90度
  - $\tilde{i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} i$ （i軸轉到下方）
  - $\tilde{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} j$ （j軸沒有變化）
  - $\tilde{k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} k$ （k軸轉到右方i軸）



- (2). 轉換矩陣M1 $= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- (3). 轉換後的新向量 $= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

連續兩次的3D網格移動的矩陣

- 看到矩陣$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$：就表示，存在著空間的某種轉換
- 兩個3D矩陣相乘：代表兩次3D網格移動

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}}^{\text{Second transformation}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}}_{\text{First transformation}}$$

3D矩陣相乘的應用

- 3D矩陣相乘，或兩個3D矩陣相乘的應用：
  - 應用1：計算機圖學(Computer Graphics)
  - 應用2：機器人視覺(Robotics)
- 這兩個領域，3D矩陣的轉換非常重要且常用