chp6：線性代數的本質：行列式

陳擎文老師

線性代數的學習重點與探討主題

觀念
- 數學符號的意義

基礎
- 向量
- 矩陣
- 聯立方程式
- 行列式

主題
- 線性映射
- 坐標轉換
- 特徵向量

線性代數的學習重點

觀念

- 數學符號的意義

基礎

- 向量，張量
- 3D矩陣
- 行列式
- 聯立方程式

- 矩陣乘法

主題

- 線性映射
- 坐標轉換
- 特徵向量，特徵值

線性代數授課的兩條線

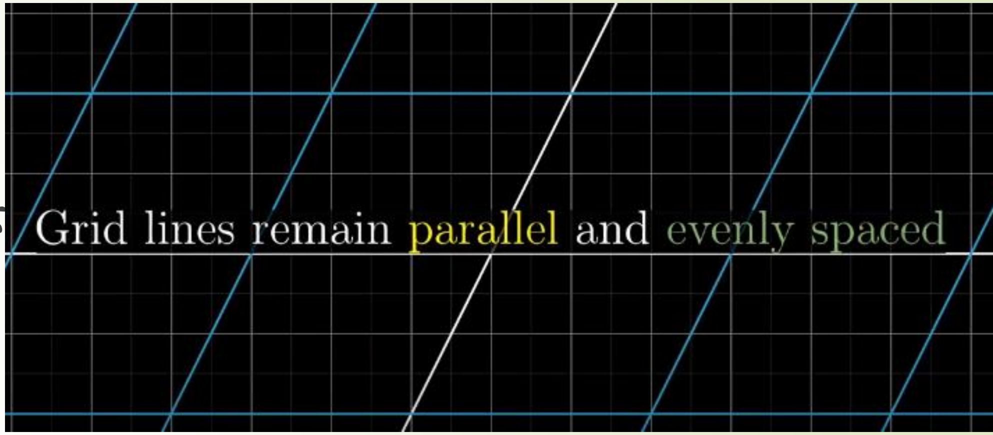
- (1). 了解線性代數的本質
  - 了解其背後的物理意義
  - 了解關鍵重點
- (2). 學習如何計算
  - 了解數學的定義，公式，定理，證明
  - 練習計算

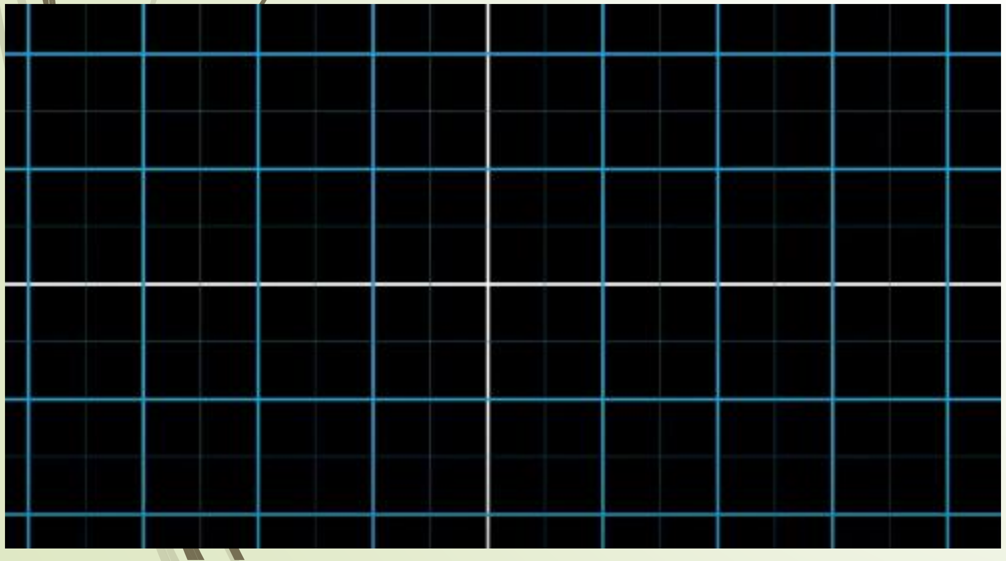
參考資料

- https://www.youtube.com/watch?v=Ip3X9LOh2dk

線性轉換(linear transformations)

- 何謂線性轉換？
- 必須符合3個特點才是線性轉換
  - (1).網格不可彎曲變換
  - (2).原點(0,0)保持不動
  - (3).網格保持平行(parallel)，等距(even)變換



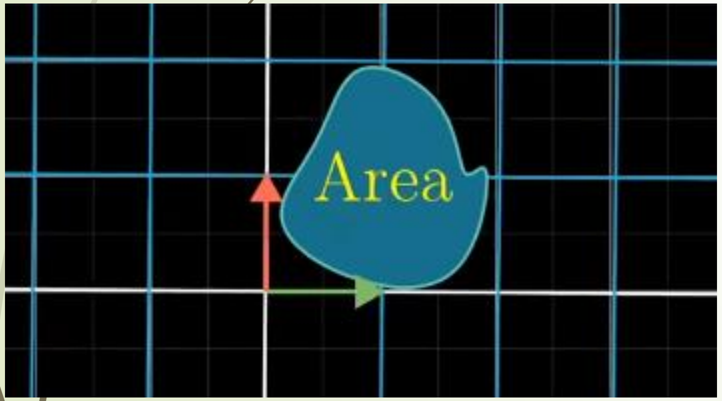


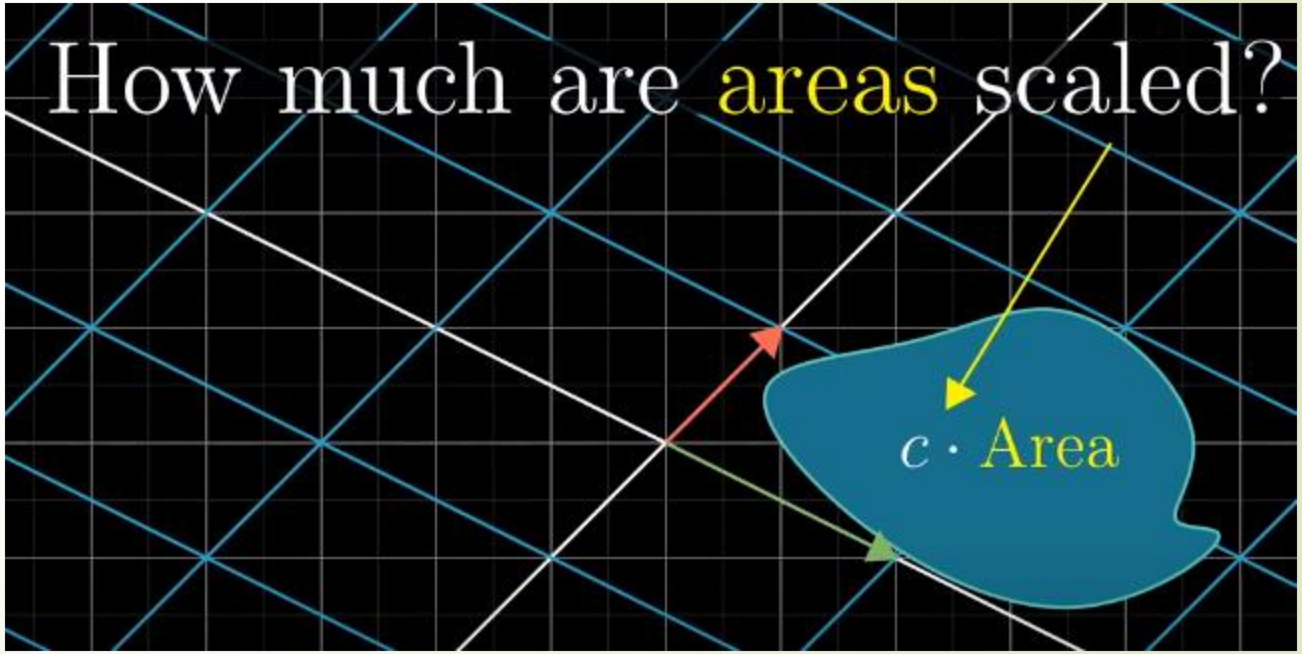
網格移動，縮放

1. 為什麼行列式值代表座標轉換後單位區域的縮放率？

如何精確地評估2D網格移動後單位區域面積的變形量

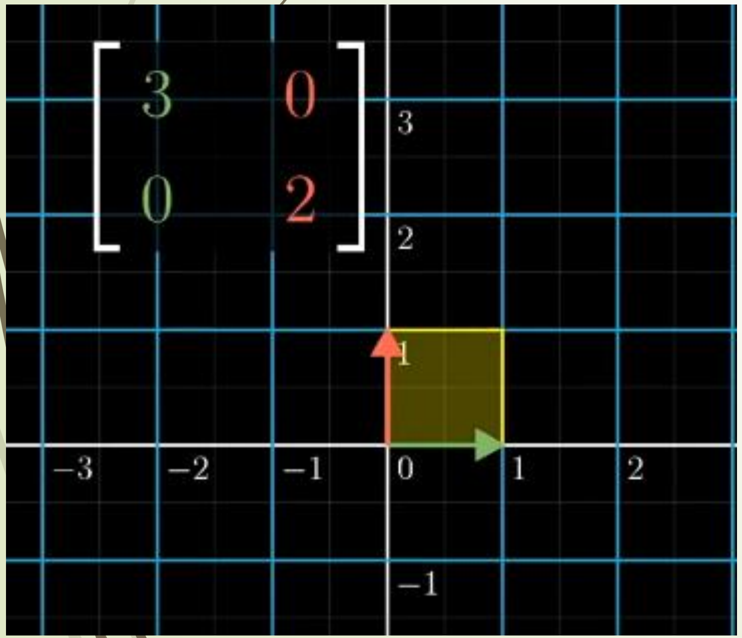
- 以2D座標為例：
- 單位區域面積Area → C・Area

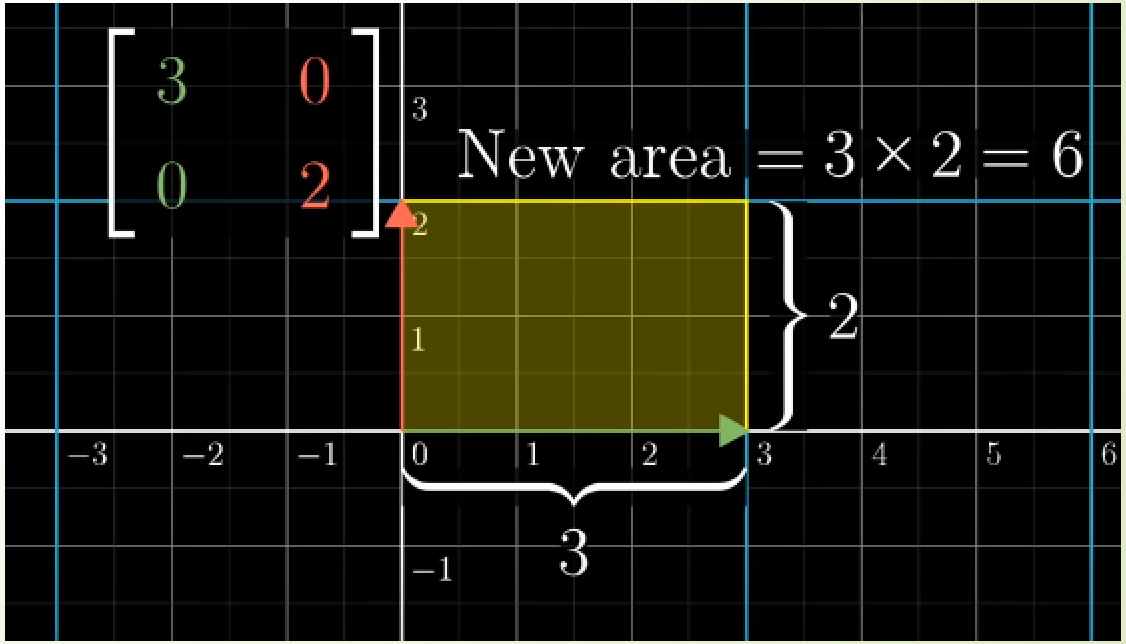




範例1：如何精確地評估2D網格移動後單位區域面積的變形量

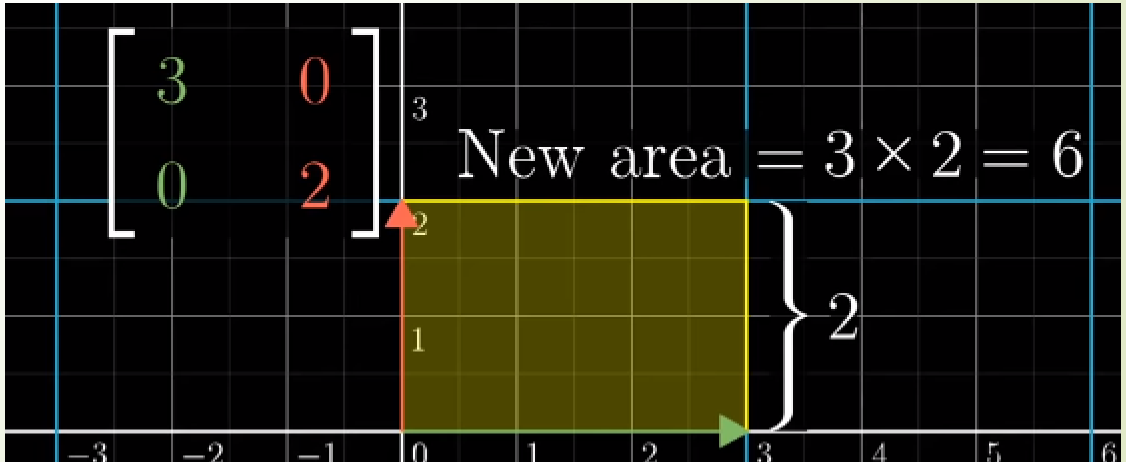
- 以2D座標為例：
- 網格變換矩陣=$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
- 單位區域面積Area → C・Area = 6・Area





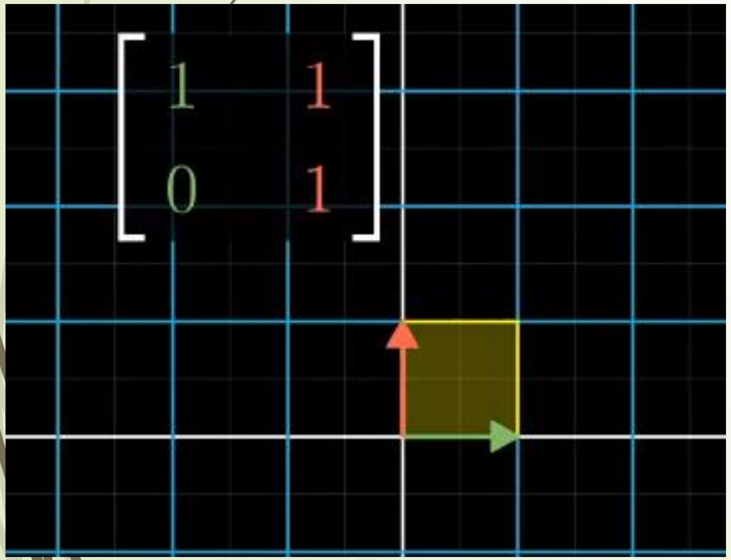
範例1：如何精確地評估網格移動後單位面積的變形量：行列式值determinant

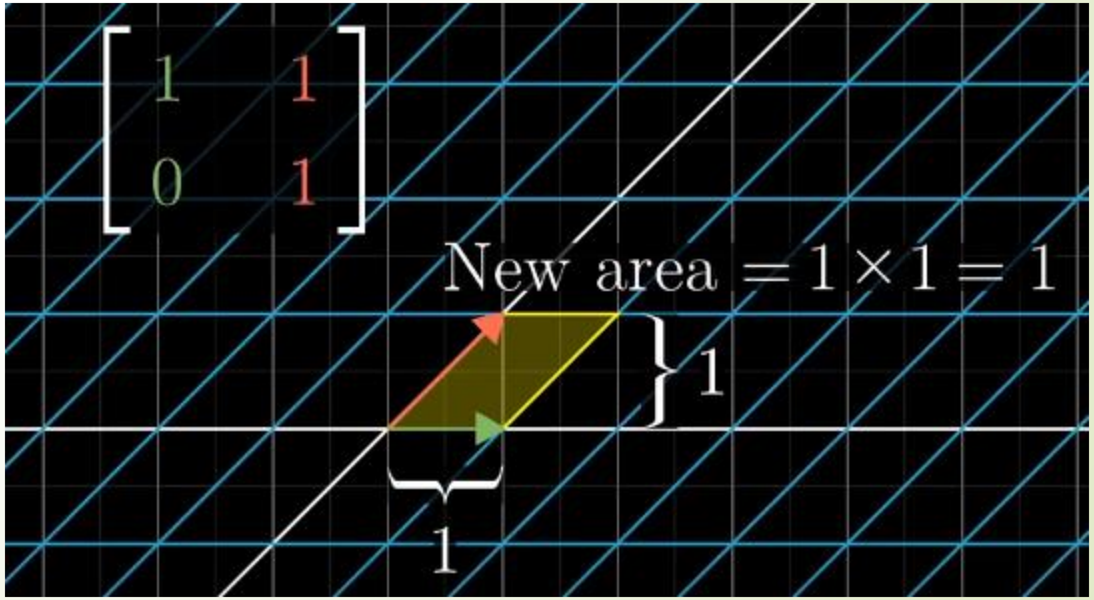
- 以2D座標為例：
- 網格變換矩陣= $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
- 單位區域面積Area → C・Area = **6**・Area
- 轉換的行列式值 =變形係數 C = **det**($\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$)=6



範例2：如何精確地評估網格移動後單位面積的變形量

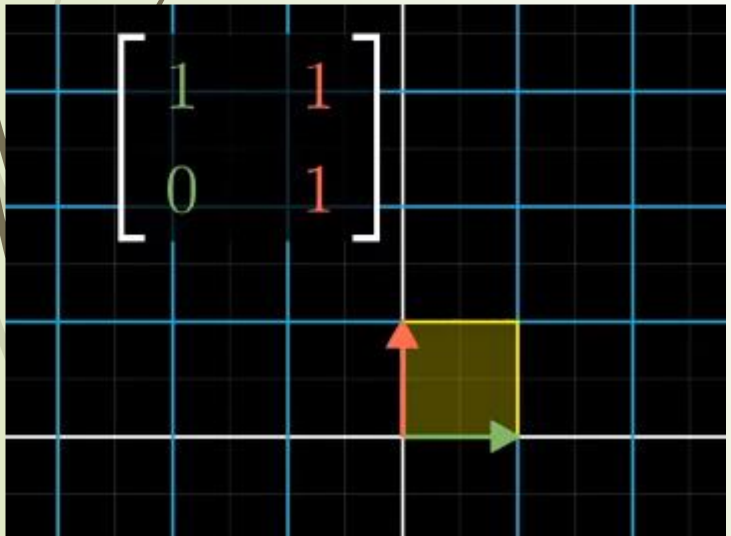
- 以2D座標為例：
- 剪力shear網格變換矩陣=$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 單位區域面積Area → C・Area = 1・Area

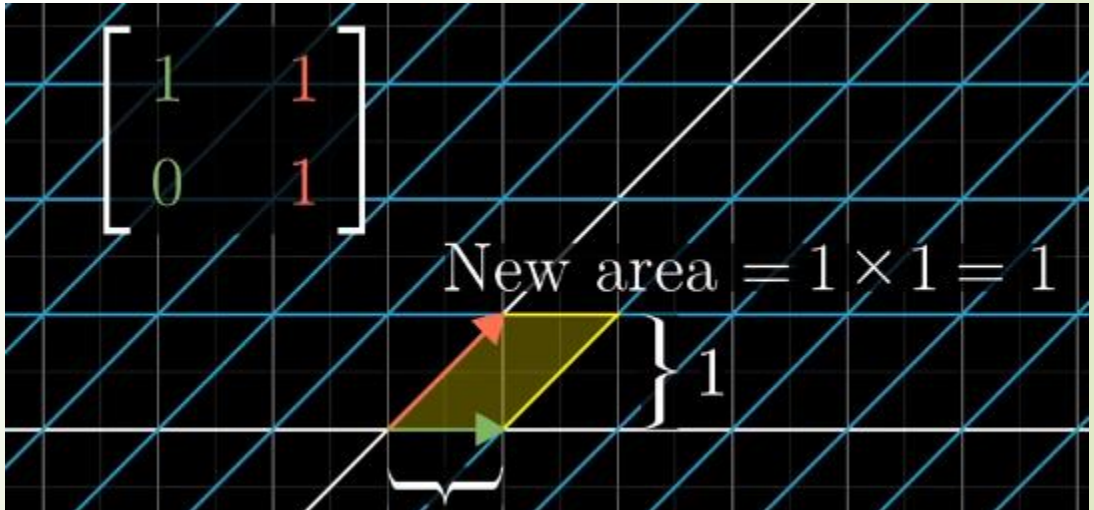




範例2：如何精確地評估網格移動後單位面積的變形量：行列式值determinant

- 剪力shear網格變換矩陣=$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 單位區域面積Area → C・Area = 1・Area
- 轉換的行列式值 =變形係數 C = det($\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$)=1





2.行列式值=0代表什麼物理意義？

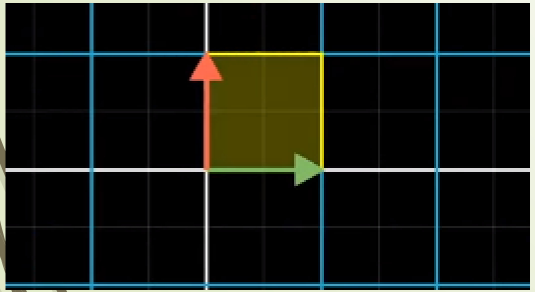
A. 網格被壓縮到面積為0

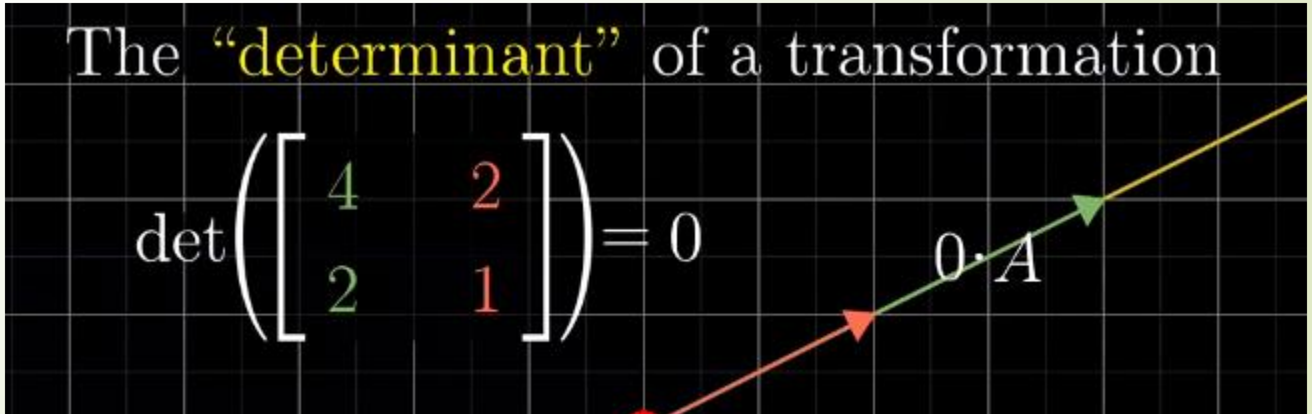
B. 被壓縮到降階（面→線，線→點）

C. 無限多解，或是無解

範例3：行列式值determinant=0代表的物理意義

- 網格變換矩陣=$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
- 單位區域面積Area → C・Area = 0・Area
- 轉換的行列式值 =變形係數 C = det($\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$)=0
- <u>代表物理意義</u>：網格變形後的區域**不是面積**，而是**直線**，或是**一點**（所以沒有面積）
- <u>代表物理意義</u>：**網格變形後，被擠壓到極致**（線，點）





2. 行列式值=負，代表什麼意義？

網格被壓縮到翻面

原本(i, j, k)右手定則=i食指, j中指

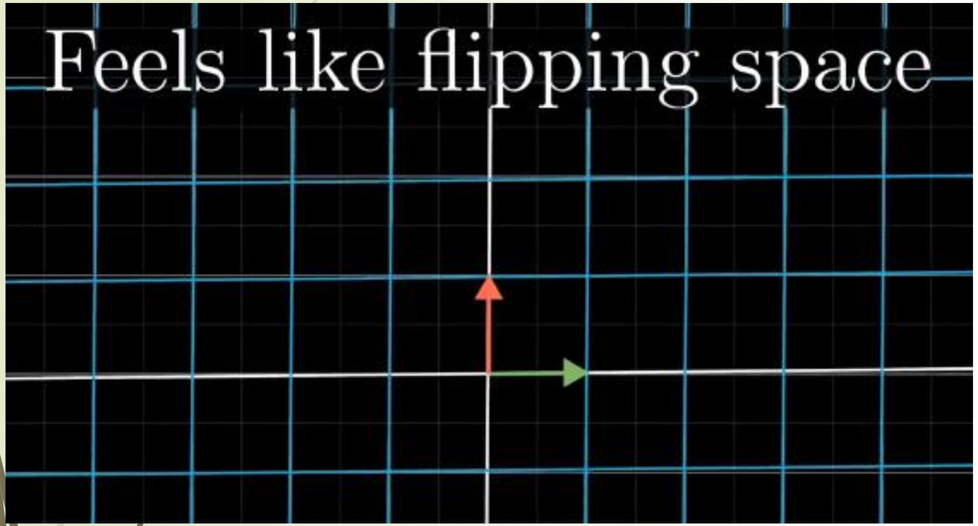
轉轉座標後，左手定則=i食指, j中指

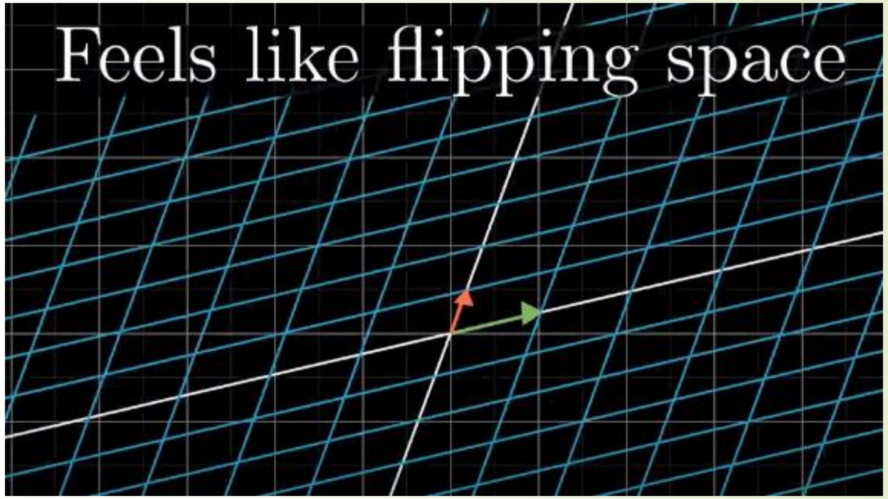
範例4：行列式值determinant=負值代表的意義

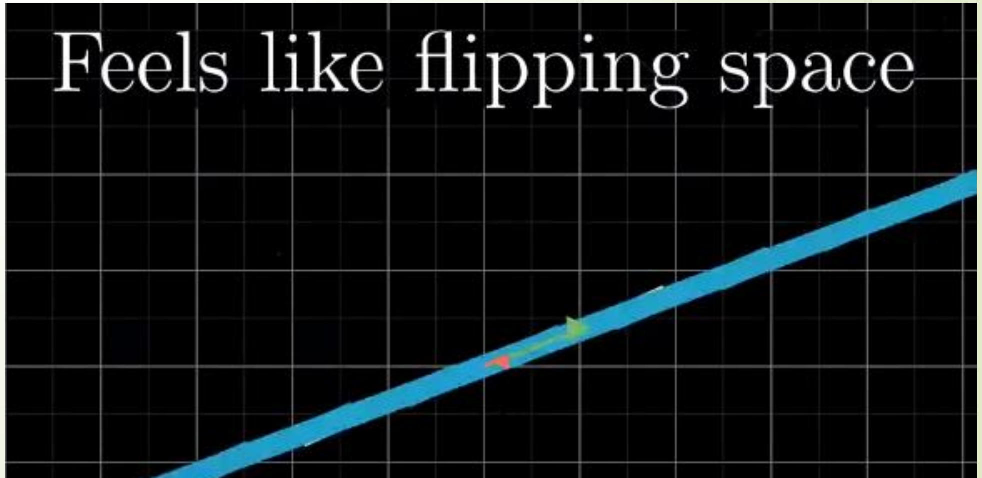
- 網格變換矩陣=$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
- 單位區域面積Area → C・Area = −2・Area
- 轉換的行列式值 =變形係數 C = **det**$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right)$=−2
- **代表物理意義**：網格變形後，**座標整個翻轉（翻面flipping**，反面）
- **類似：翻頁**

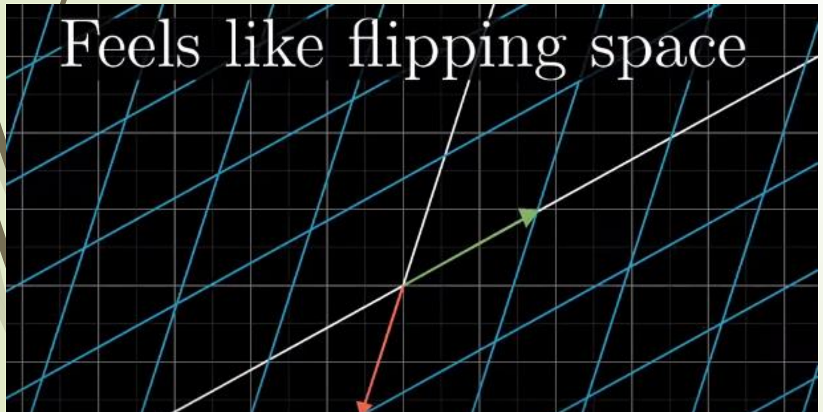
範例4：行列式值determinant=負值代表的意義

- 代表：座標整個翻轉（翻面flipping，反面）
- 類似：翻頁









範例4：行列式值determinant=負值代表的意義

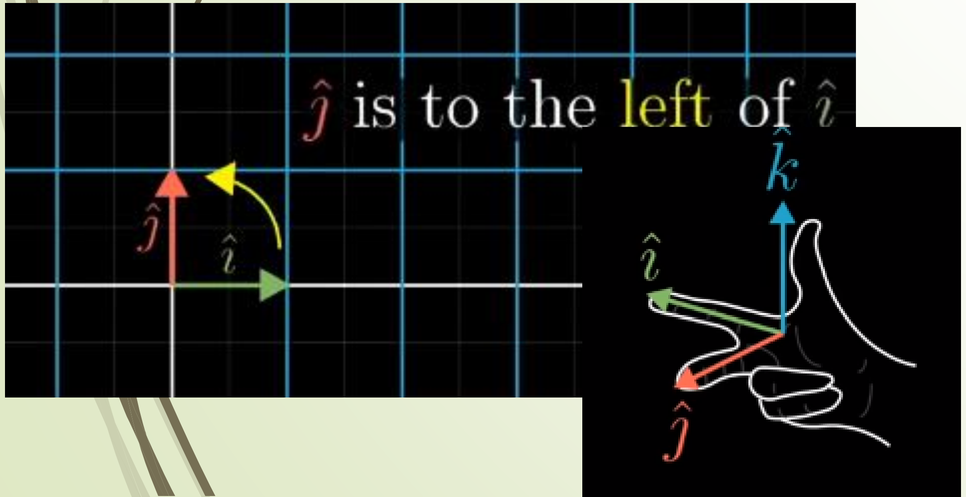
- 代表意義：原本座標i在j軸的右方，但是若是整個翻面，則j在i軸的右方
- $\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$=-負值

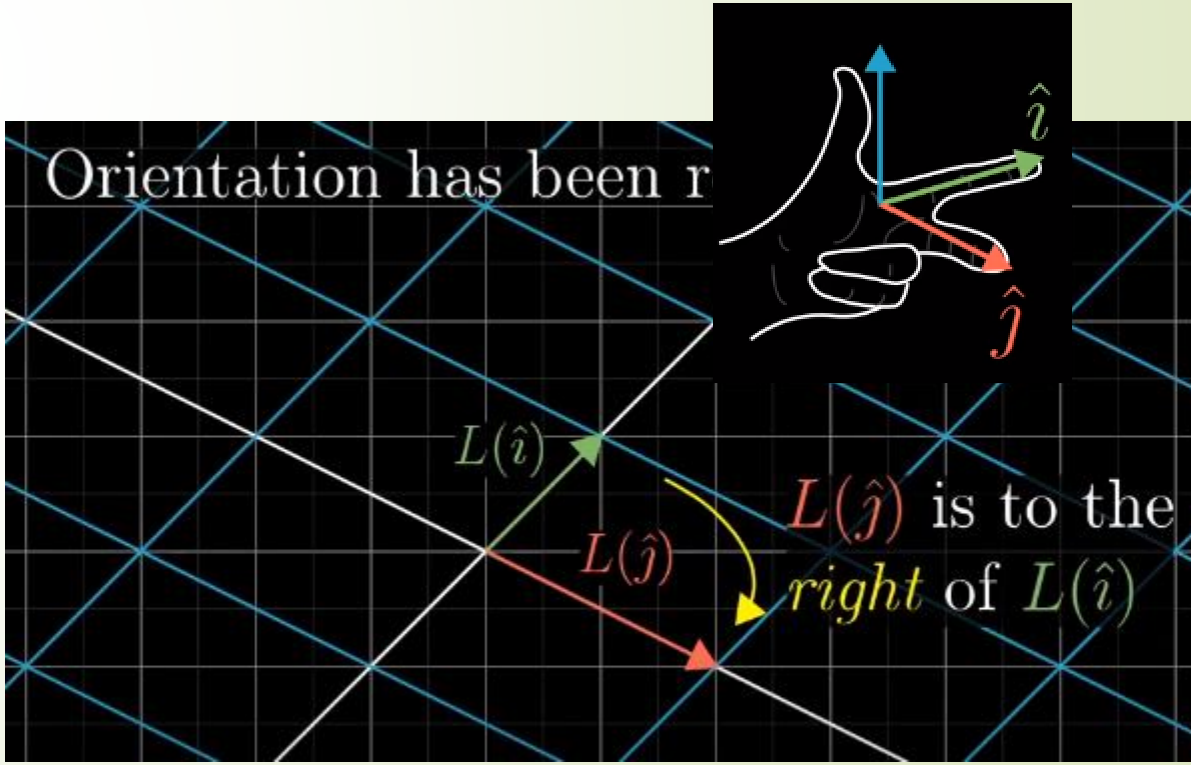
= 座標平面翻面flipping

= j在i軸的右方

原本(i, j, k)右手定則=i食指, j中指

轉轉座標後，左手定則=i食指, j中指

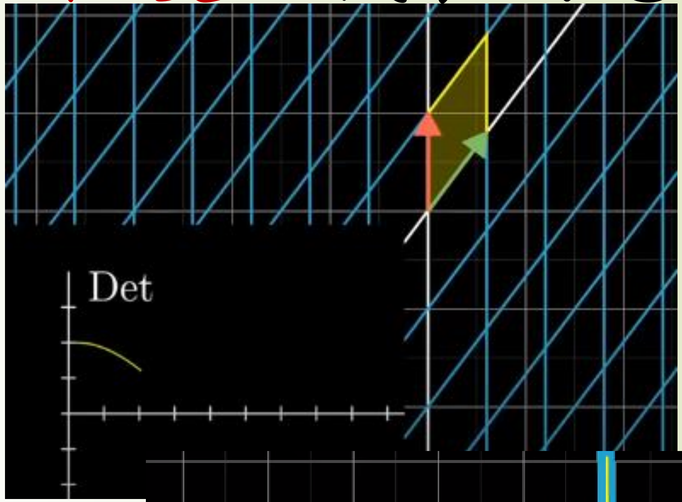




範例5：追踪行列式值determinant值變化代表的意義

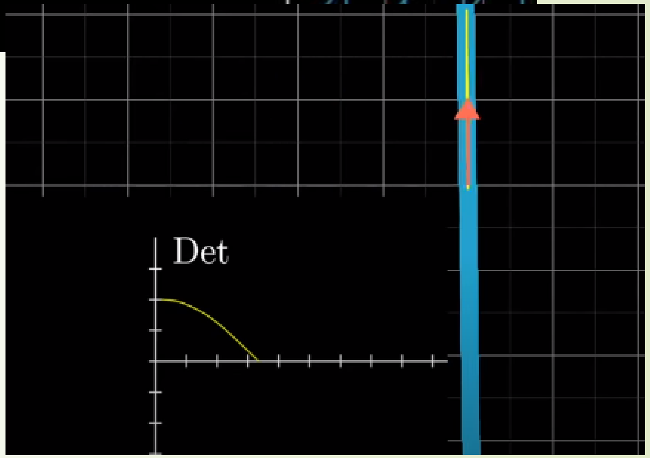
- 翻轉座標平面:
- $\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$=正值

det() >1， 被放大
det() <1， 被壓縮



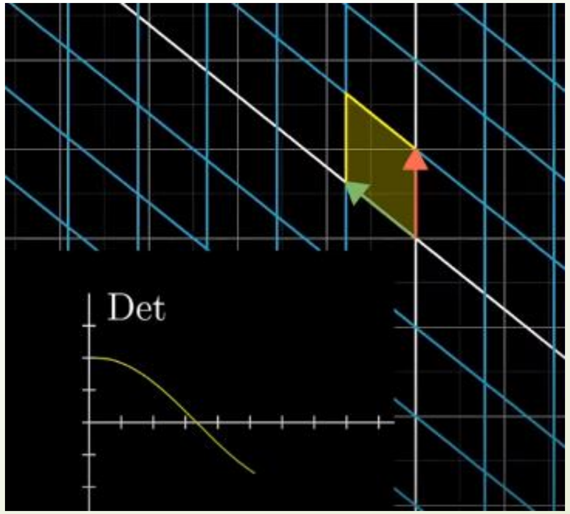
- $\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=0$

det() = 0
被壓縮成一條線，



- $\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$=負值

det() < 0
被翻面

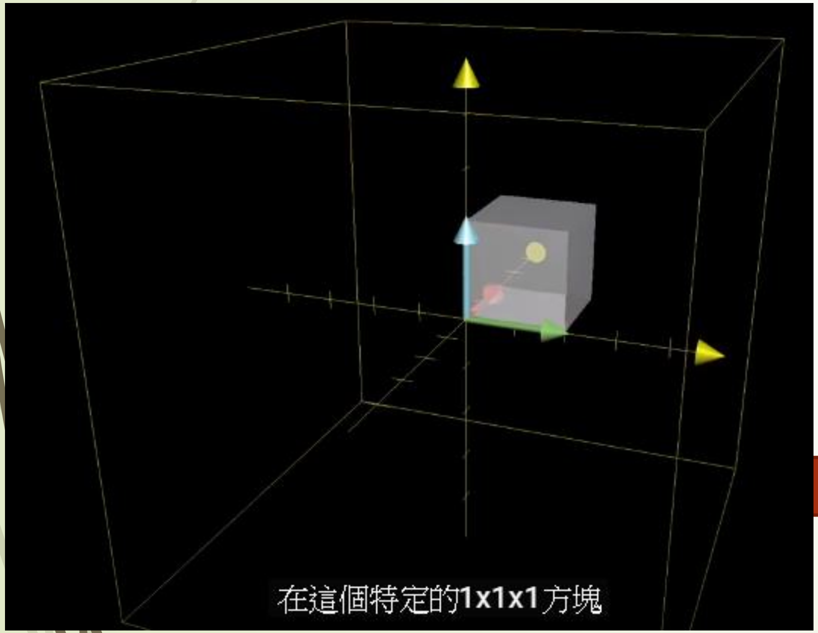


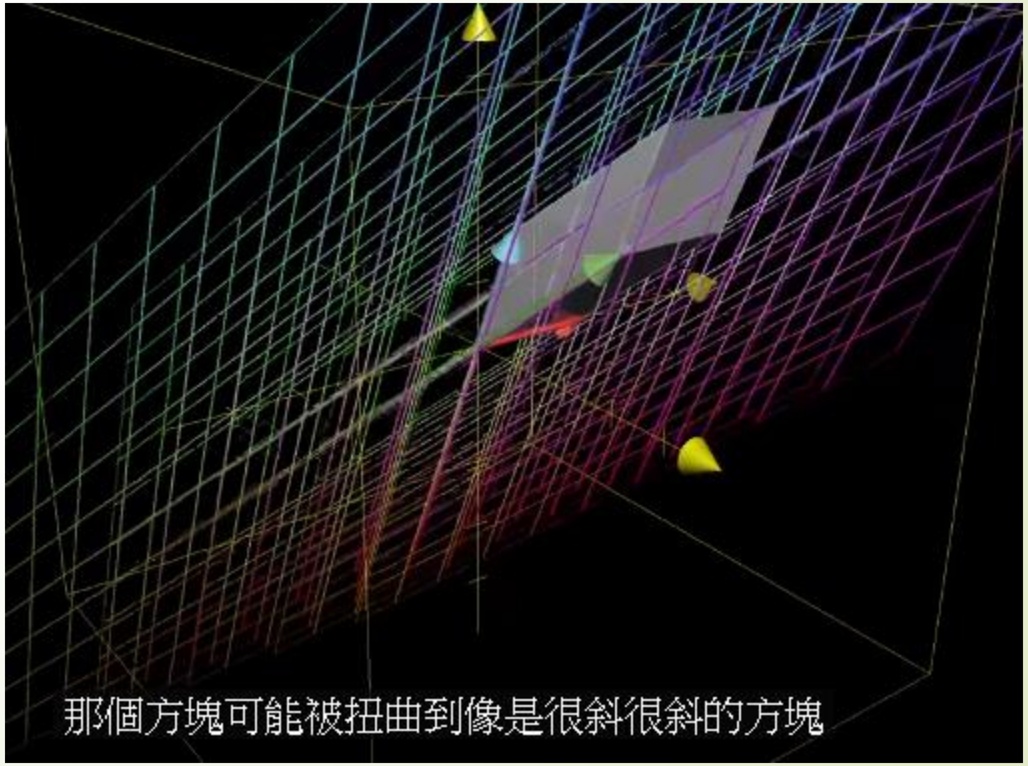
3.3x3行列式值，代表什麼意義？

單位區域體積的變形率

如何精確地評估3D網格移動後單位區域體積的變形量

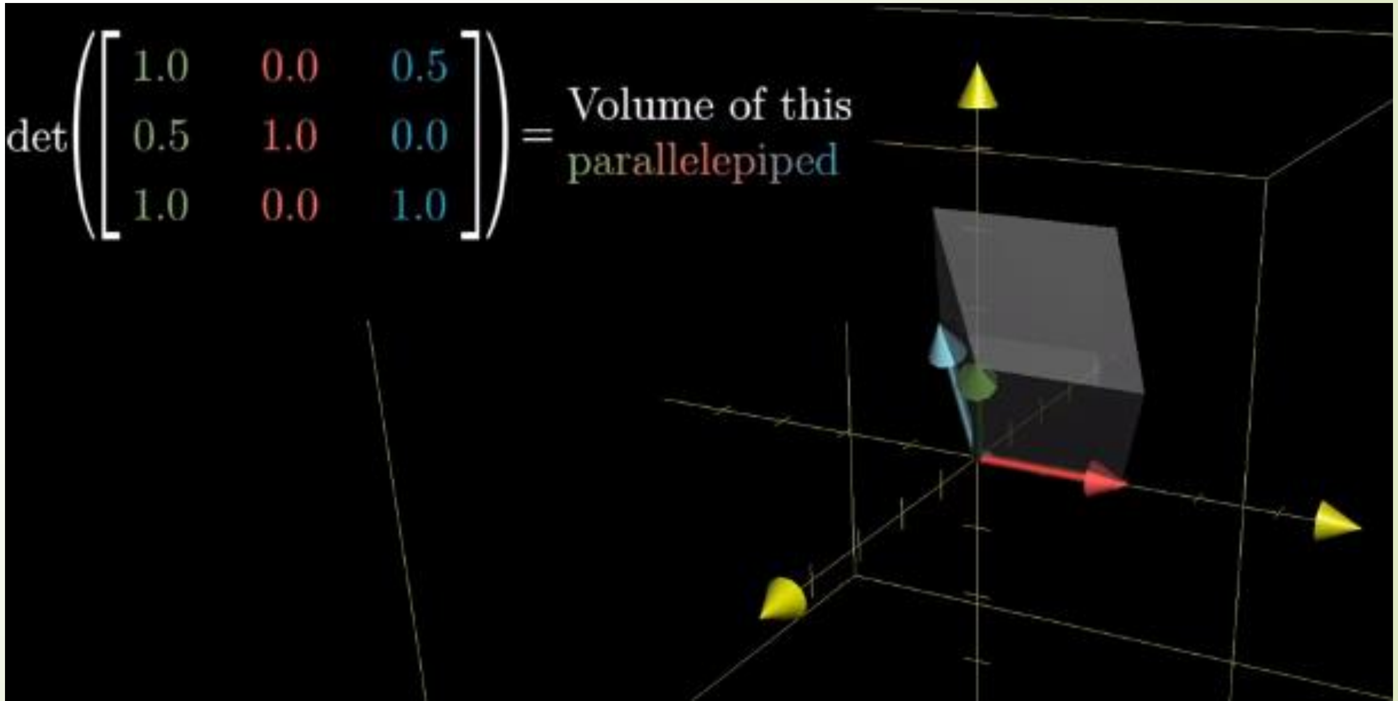
- 以3D座標為例：
- 單位區域體積Volumn → C・Volumn



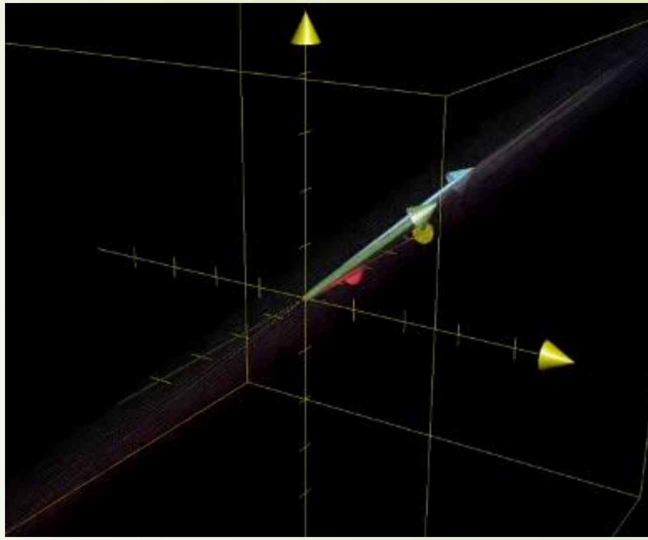


範例6：如何精確地評估3D網格移動後單位區域體積的變形量

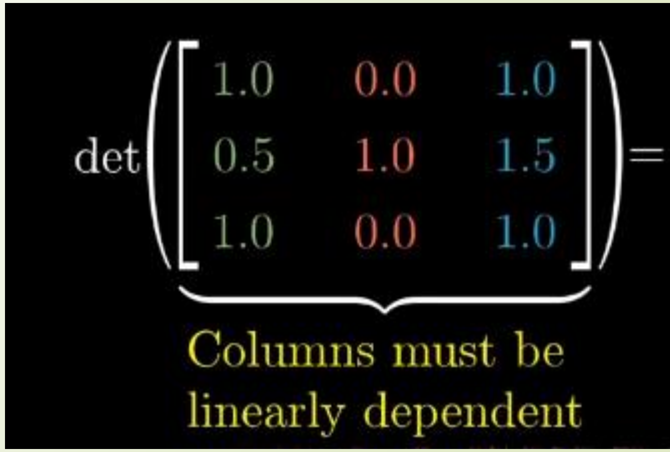
- 網格變換矩陣$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 單位區域面積Area → C・Area
- 行列式值
- =變形係數C
- $=\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)=$



範例7：3D行列式值determinant=0代表的物理意義



- det$\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right)=0$
- 代表意義1：網格被壓縮成為『平面，線，點』
- 代表意義2：$\begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix}$是線性相關的linear dependent



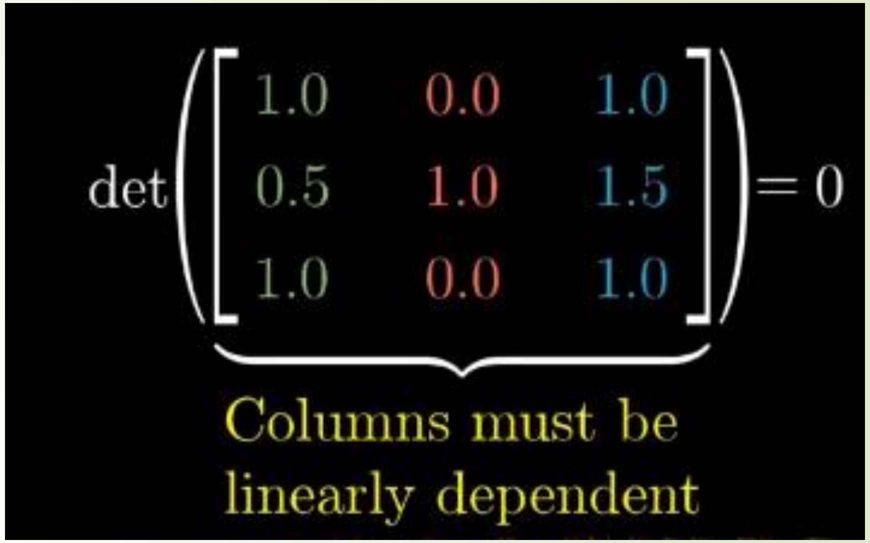
4. 3x3行列式值=0，代表什麼意義？

A. 壓扁

B. 降階（體→面→線→點）

C. 無限多解，或是無解

範例8：3D行列式值determinant=0代表的物理意義



- $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1.5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)=0$
- 代表意義1：網格被壓縮成為『平面，線，點』
- 代表意義2：$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 1 \end{bmatrix}$是線性相關的linear dependent

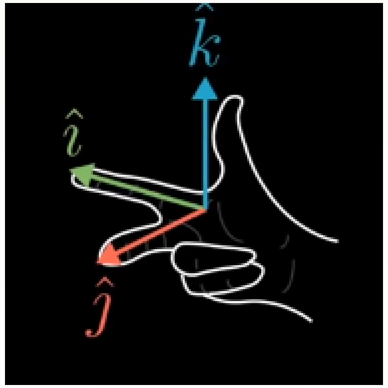
5. 3x3行列式值=負，代表什麼意義？

翻面

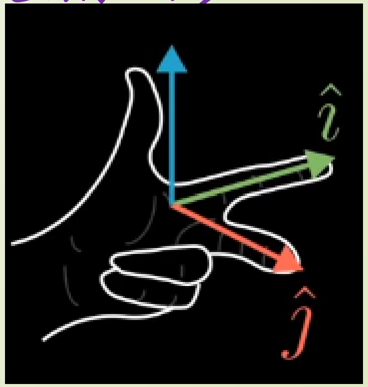
右手定則→左手定則

範例8：3D行列式值determinant<0代表的物理意義

- 使用右手定則：
  - 食指：i軸方向
  - 中指：j軸方向
  - 拇指：k軸方向



- (1).若變形後，ijk符合右手三指方向，det(M)=正值
- (2).若變形後，ijk符合左手三指方向，det(M)=負值(被翻面)
- (3).若變形後，被壓縮成點線面，det(M)=0

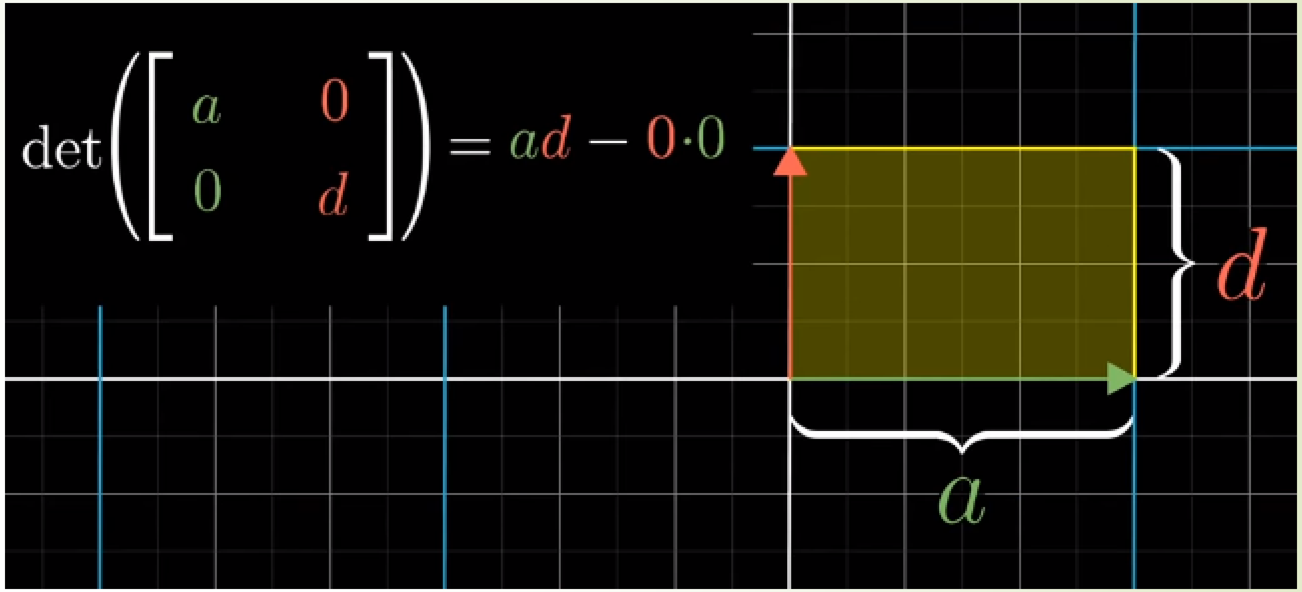


2D行列式值determinant的計算方法

- 2D行列式值determinant的計算方法
- $\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad-bc$

範例9：對角線行列式所代表的物理意義

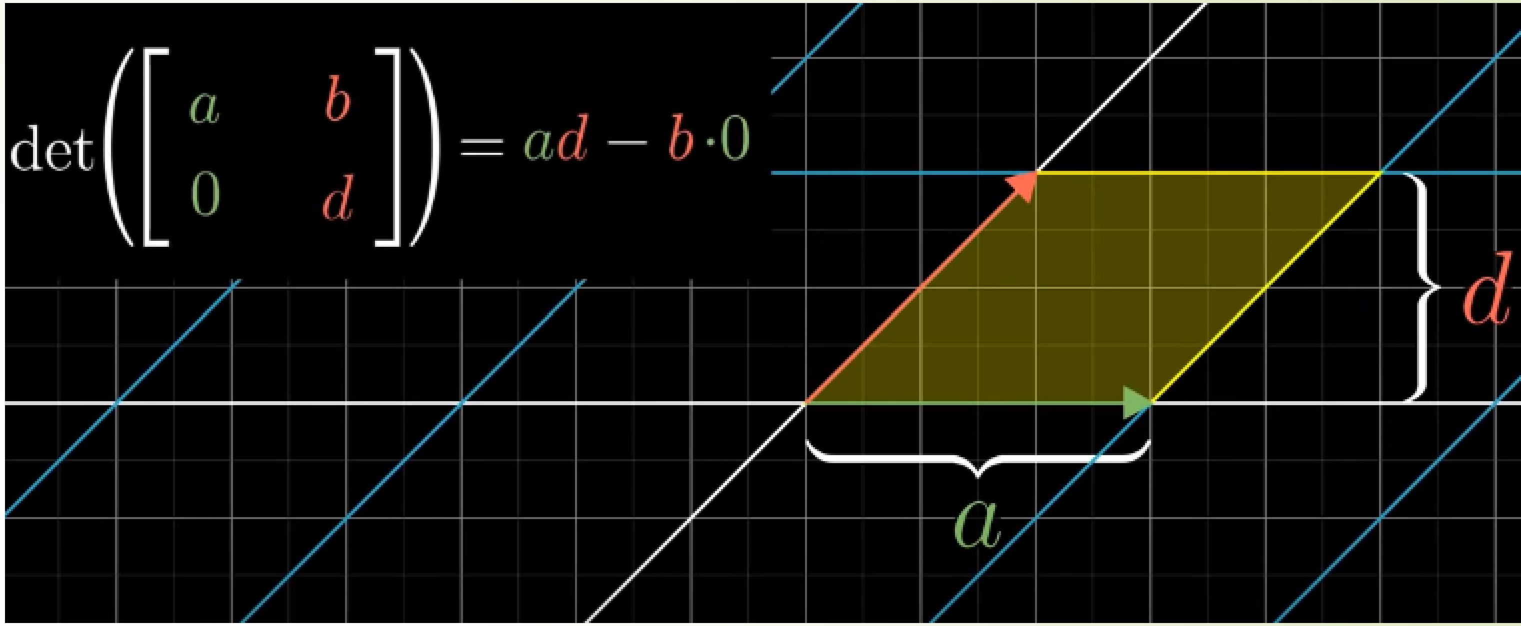
- 2D行列式值
- $\det\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\right) = ad$



- 代表意義1：網格變換後i軸變成a倍， j軸變成b倍
- 代表意義2：網格變換後，單位區域變成長方形

範例10：行列式有一個為0所代表的物理意義

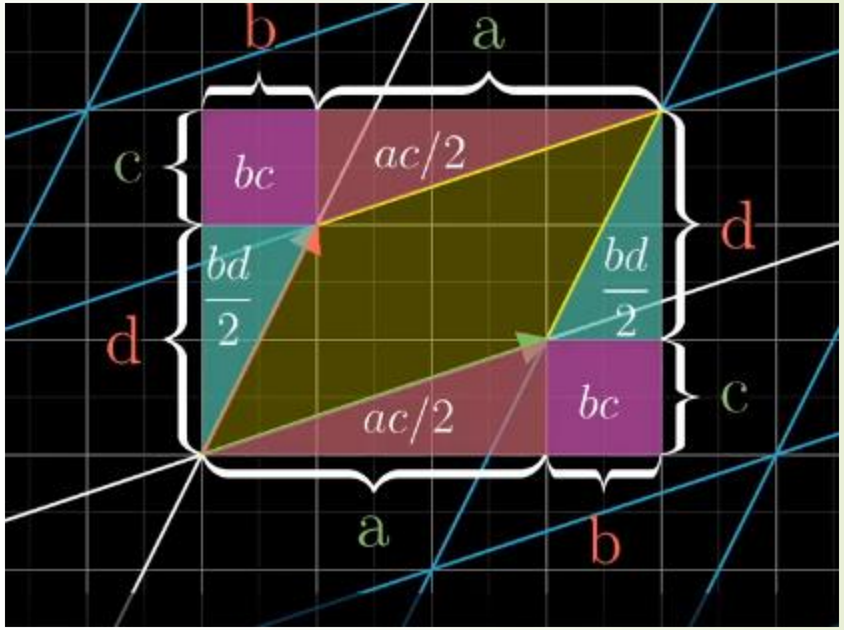
- 2D行列式值
- $\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}\right) = ad$



- 代表意義1：網格變換後i軸變成a倍， j軸變成b倍
- 代表意義2：網格變換後，單位區域變成平行四邊形

範例11：2D行列式abcd所代表的物理意義

- 2D行列式
- $\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad-bc$



- 代表意義1：網格變換後，單位區域變成平行四邊形的擠壓程度

3D行列式值determinant的計算方法

- 3D行列式值determinant的計算方法
- $\det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right)$
- $= a \det\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i} \end{bmatrix}\right)$

$-b \det\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{i} \end{bmatrix}\right)$

$+c \det\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} \end{bmatrix}\right)$

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right) = a \det\left(\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix}\right) - b \det\left(\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix}\right) + c \det\left(\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}\right)$$