



chp7：線性代數的本質：

解聯立方程式、反矩陣、 行空間、rank、零空間

陳擎文老師

線性代數的學習重點與探討主題

觀念

數學符號的意義

基礎

向量

矩陣

聯立方程式

行列式

主題

線性映射

坐標轉換

特徵向量

線性代數的學習重點

觀念

- 數學符號的意義

基礎

- 向量，張量
- 3D矩陣
- 行列式
- 聯立方程式

- 矩陣乘法
- 反矩陣
- 行空間，rank，零空間

主題

- 線性映射
- 坐標轉換
- 特徵向量，特徵值

線性代數授課的兩條線

➡ (1). 了解線性代數的本質

➡ 了解其背後的物理意義

➡ 了解關鍵重點

➡ (2). 學習如何計算

➡ 了解數學的定義，公式，定理，證明

➡ 練習計算

參考資料

➡ <https://www.youtube.com/watch?v=uQhTuR1WMxw>

探討主題

- ➡ 聯立方程式：Simultaneous equations
- ➡ 逆矩陣：Inverse Matrices
- ➡ 行空間：Column Space
- ➡ 秩：Rank
- ➡ 零空間：Null Space
- ➡ 核：kernel



聯立方程式的解法

- 計算方法：
- (1). 高斯消去法 Gaussian elimination
 - 計算速度較快
- (2). 克萊瑪法則：Cramer's rule
 - 有助於理解線性代數的物理意義
- (3). 反矩陣法



解聯立方程式的重點摘要-1

- ➡ 1. 解聯立方程式之前要先判斷是否有唯一解

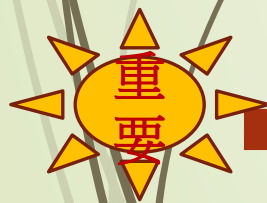
⇒ $\det(A) \neq 0$

- ➡ 因為克拉瑪法則解 $x_1, x_2, \dots$ 的公式為

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},$$

- ➡ 若是 $\det(A)=0$ ，則系統無解，或是無限多組解

- ➡ 2. 求解聯立方程式，求解反矩陣，都是要先判斷 $\det(A) \neq 0$ ，才有唯一解





解聯立方程式的重點摘要-2

- ➡ 3. 計算聯立方程式的方法有三種：
 - ➡ (1). 高斯消去法
 - ➡ (2). Cramer' s rule 克拉瑪法則
 - ➡ (3). 反矩陣法



解聯立方程式的重點摘要-3

➡ 4. 計算聯立方程式的方法有三種：

➡ (1). 高斯消去法（用擴展矩陣）

➡ (2). 反矩陣法

➡ $A^{-1} = \frac{\text{伴隨矩陣}}{\det(A)} = \frac{\text{餘因子矩陣}^T}{\det(A)}$ （餘因子矩陣要注意正負號）

➡ 解聯立方程式： $\vec{x} = A^{-1}\vec{v}$

➡ (3). Cramer's rule 克拉瑪法則

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

用高斯喬丹消去法，結果

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

反矩陣：Inverse Marices

➡ 計算方法：

➡ (1). 2x2反矩陣快速公式

➡ (2). 高斯刪去法Gaussian elimination

➡ (3). 餘因子公式

線性代數的應用一：解聯立方程式

➡ 應用矩陣解聯立方程式

➡ 條件1：多元一次方程式（線性方程式系統）

➡ 條件2：沒有多次方 x^2 , y^2 ,

➡ 條件3：沒有非線性函數 $\sin(x)$, $\exp(x)$, $\ln(x)$

➡ 條件4：變數相乘： xy

➡

$$\begin{array}{l} 6x - 3y + 2z = 7 \\ x + 2y + 5z = 0 \\ 2x - 8y - z = -2 \end{array}$$



$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & -8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

聯立方程式的物理意義(1)

➡ $6x - 3y + 2z = 7$

$x + 2y + 5z = 0$

$2x - 8y - z = -2$



$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & -8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

➡ 聯立方程式 = $A\vec{x} = \vec{v}$

➡ 聯立方程式，就是線性代數的座標轉換

➡ A就是基底轉換矩陣

➡ $\vec{x}$ =input vector，是原來向量

➡ $\vec{v}$ =output vector，是轉換後的輸出向量

範例1：二元聯立方程式

➡ 二元聯立方程式 = 2D座標：

$$\begin{array}{l} 2x + 2y = -4 \\ 1x + 3y = -1 \end{array}$$

➡ 網格變換矩陣 = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

➡ 聯立方程式，用座標轉換的線性代數矩陣表示： $A\vec{x}=\vec{v}$

➡ $\vec{x}=A^{-1}\vec{v}$

➡ A^{-1} = inverse matrices 逆矩陣

➡ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$

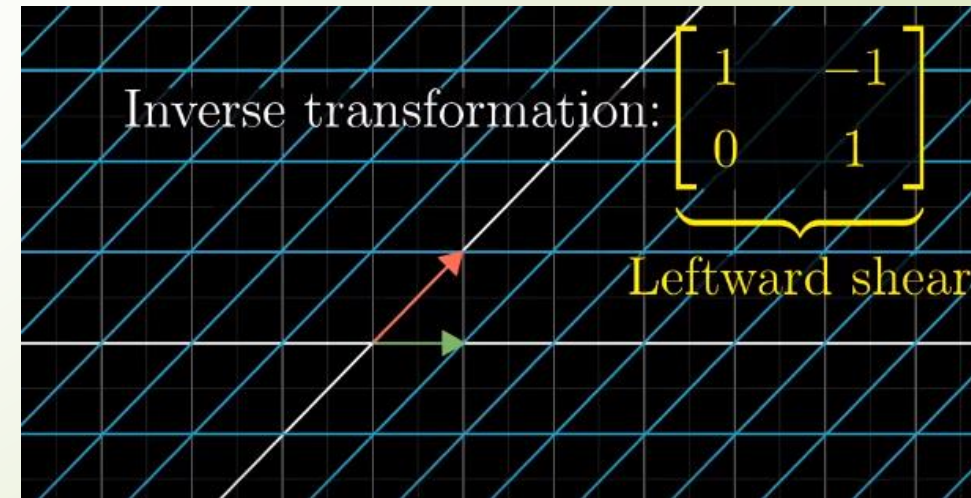
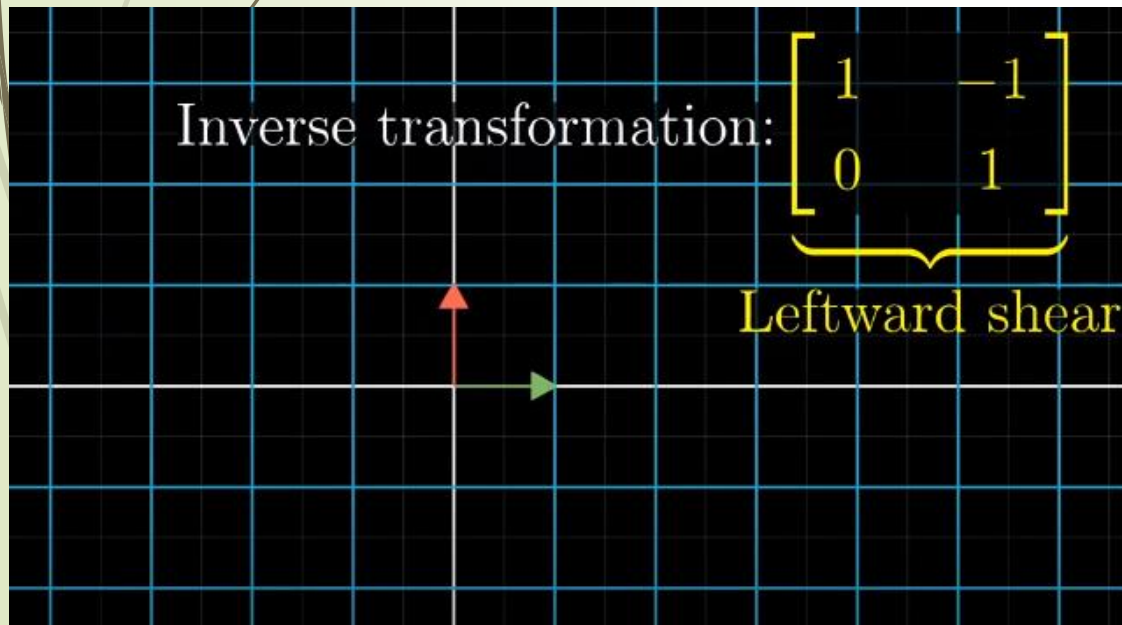
逆矩陣的物理意義，inverse matrices

➡ 座標轉換： $A\vec{x}=\vec{v}$

$$\begin{array}{rcl} 2x + 2y & = & -4 \\ 1x + 3y & = & -1 \end{array}$$

➡ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ = 原本座標網格被轉換後的轉換矩陣

➡ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$ = 反轉換回到原本位置的轉換矩陣



AA^{-1} 正逆矩陣相乘的物理意義

➡ AA^{-1} 正逆矩陣相乘的物理意義

➡ 回到原來位置 = identity transformation

➡ $AA^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ = 對角線矩陣

➡ 座標轉換： $A\vec{x}=\vec{v}$

➡ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ = 原本座標網格被轉換後的轉換矩陣

➡ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$ = 反轉換回到原本位置的轉換矩陣

解聯立方程式的物理意義(2)

➡ $6x - 3y + 2z = 7$

$x + 2y + 5z = 0$

$2x - 8y - z = -2$



$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & -8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

➡ 聯立方程式 = $A\vec{x} = \vec{v}$

➡ 解聯立方程式 = $\vec{x} = A^{-1}\vec{v}$

➡ 代表意義1：由output vector反推回input vector

➡ 代表意義2：由轉換後的向量，反推回原本位置

聯立方程式有唯一解的前提條件

➡ $6x - 3y + 2z = 7$

$x + 2y + 5z = 0$

$2x - 8y - z = -2$



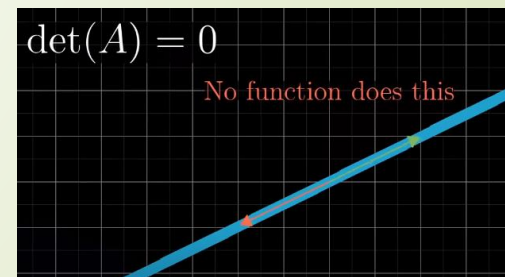
$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & -8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

➡ 聯立方程式 = $A\vec{x} = \vec{v}$

➡ (1). $\det(A) \neq 0$ ，代表轉換後的空間沒有被壓縮極致到降階緯度（線，點），則 $\vec{x}$ 有唯一解

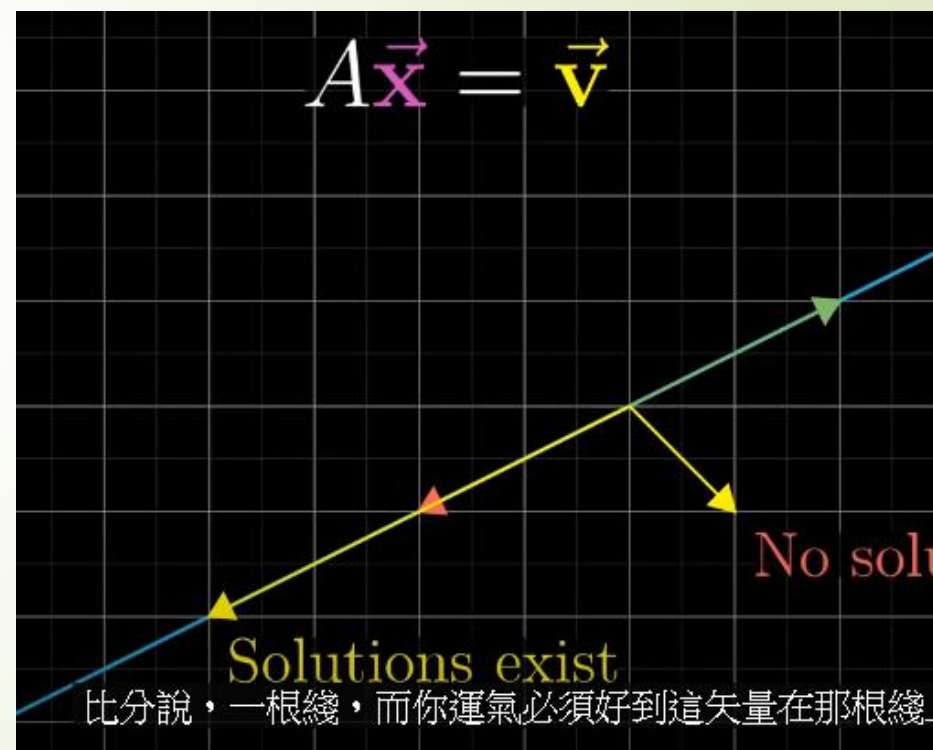
➡ (2). $\det(A) = 0$ ，代表轉換後的空間被壓縮極致到降階緯度（線，點），則 $\vec{x}$ 有無解

➡ (3). $\det(A) = 0$ ，且 $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，則 $\vec{x}$ 有無限多組解



聯立方程式 $\det(A)=0$ 有唯一解的特例

- ➡ 聯立方程式 = $A\vec{x}=\vec{v}$
- ➡ 解聯立方程式 = $\vec{x}=A^{-1}\vec{v}$
- ➡ (2). $\det(A) = 0$ ，代表轉換後的空間被壓縮極致到降階緯度（線，點）
- ➡ 若 $\vec{x}$, $\vec{v}$ 都在轉換後被壓縮的那條線上，就會有解



行列式值= $\det(A)=0$ 的數學說法：rank秩

➡ 聯立方程式 = $A\vec{x}=\vec{v}$

➡ 解聯立方程式 = $\vec{x}=A^{-1}\vec{v}$

➡ (1). $\det(A) = 0$ ，若轉換後被壓縮成線

➡ Rank = 1 (1緯)

➡ (2). $\det(A) = 0$ ，若轉換後被壓縮成平面

➡ Rank = 2 (2緯)

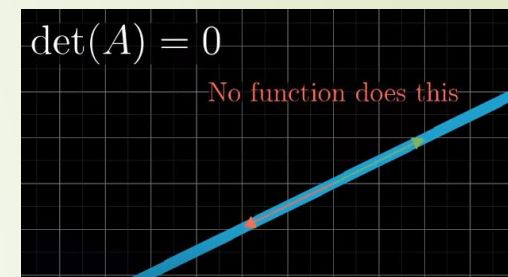
➡ (3). Rank秩=代表網格轉換壓縮後的空間維度

➡ 壓縮成3D空間→ $\text{rank}(A) = 3$

➡ 壓縮成平面→ $\text{rank}(A) = 2$

➡ 壓縮成線→ $\text{rank}(A) = 1$

➡ 壓縮成點→ $\text{rank}(A) = 0$



“Rank” ↔ Number of dimensions in the output

座標轉換後的空間

=行空間, column space

➡ $A\vec{x}=\vec{v}$ 座標轉換後輸出Output $\vec{v}$

➡ 所有轉換後的空間集合

➡ =行空間, column space

➡ =column space of A outputs

Set of all possible
outputs $A\vec{v}$ $\longleftrightarrow$ “Column space” of A

為什麼座標轉換後的空間叫做column space

➡ $A\vec{x}=\vec{v}$ 座標轉換後輸出Output $\vec{v}$

➡ $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

➡ 其轉換的基底分別為三個column vector： $\begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix} k$

➡ 所以整個 $A\vec{x}$ 轉換後的空間集合

= the span of columns = column space 行空間

➡ rank秩的定義2：column space的維度

Full rank，全秩

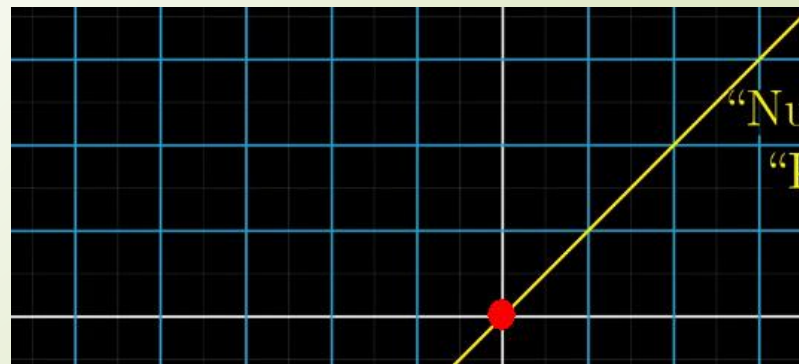
- ➡ 聯立方程式=座標轉換= $A\vec{x}=\vec{v}$
- ➡ (1). Rank秩=代表網格轉換壓縮後的空間維度
- ➡ (2). Rank秩=代表column space的維度
 - ➡ 壓縮成3D空間→ $\text{rank}(A) = 3$
 - ➡ 壓縮成平面→ $\text{rank}(A) = 2$
 - ➡ 壓縮成線→ $\text{rank}(A) = 1$
 - ➡ 壓縮成點→ $\text{rank}(A) = 0$
- ➡ (3). 若是轉換後的rank是maximum = full rank=全秩

轉換後的 $(0, 0)$ 向量

- ➡ (1). 若是轉換後的rank是maximum = full rank=全秩
 - ➡ 轉換後，只有1個 $(0, 0)$ 存在
- ➡ (2). 若是轉換後的rank有降階 ($3 \rightarrow 2$, $3 \rightarrow 1$, $3 \rightarrow 0$)
 - ➡ 轉換後，有很多向量變成 $(0, 0)$
 - ➡ 因為降階，面變成線，所以會有很多不同z層的值疊加

轉換後的null space零空間=kernel核

- 三元聯立方程式=座標轉換= $A\vec{x}=\vec{v}$
- (1). 壓縮成3D空間 $\rightarrow \text{rank}(A) = 3 \rightarrow$ null space 只有1點
- (2). 壓縮成平面 $\rightarrow \text{rank}(A) = 2 \rightarrow$ 有一條線的input會變成(0, 0)
- (3). 壓縮成線 $\rightarrow \text{rank}(A) = 1 \rightarrow$ 有一個面的input會變成(0, 0)
- (4). 壓縮成點 $\rightarrow \text{rank}(A) = 0 \rightarrow$ 有一個3D空間的input會變成(0, 0)
- 只要轉換矩陣不是full rank，轉換後，就會有很多向量會變成(0, 0)
- 這些會變成的(0, 0)所有input向量集合
 - = null space零空間
 - = kernel核
 - = 變成(0, 0)的全部向量集合



轉換後的null space零空間=kernel核

- ➡ 若是轉換後的rank有降階 ($3 \rightarrow 2$, $3 \rightarrow 1$, $3 \rightarrow 0$)
- ➡ 只要不是轉換矩陣不是full rank
 - ➡ 轉換後，就會有很多向量疊加變成 $(0, 0)$
 - ➡ 轉換後的空間column space，其變成 $(0, 0)$ 原點的全部集合
 - = null space零空間
 - = kernel核



聯立方程式 $A\vec{x}=0$ 的物理意義(1)

➡ 聯立方程式 $A\vec{x}=0$ 的物理意義

➡ 物理意義：就是在求解那些經過轉換後形成null space零空間的所有input vector $\vec{x}$

➡
$$\begin{aligned} 6x-3y+2z &= 0 \\ x+2y+5z &= 0 \\ 2x-8y-z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & -8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

➡ 聯立方程式 = $A\vec{x}=0$

= 求解，哪些 $\vec{x}$ 會座標轉變成(0, 0)

= 求解矩陣A的零空間解(null space)

= 求解矩陣A的核解(kernel)

聯立方程式 $A\vec{x}=0$ 的物理意義(2)

聯立方程式 $A\vec{x}=0$ 的物理意義

➡ 物理意義：就是在求解那些經過轉換後形成null space 零空間的所有input vector $\vec{x}$

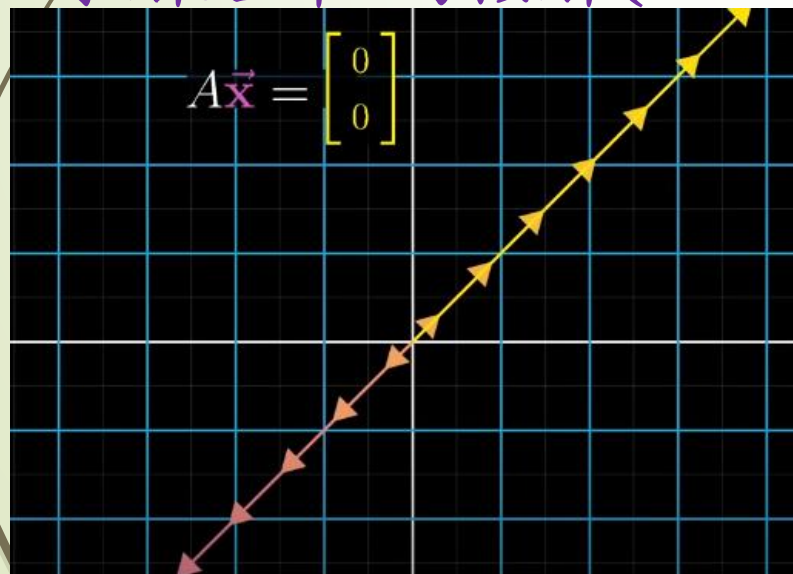
➡ 聯立方程式 = $A\vec{x}=0$

= 求解，哪些 $\vec{x}$ 會座標轉變成(0, 0)

= 求解矩陣A的零空間解(null space)

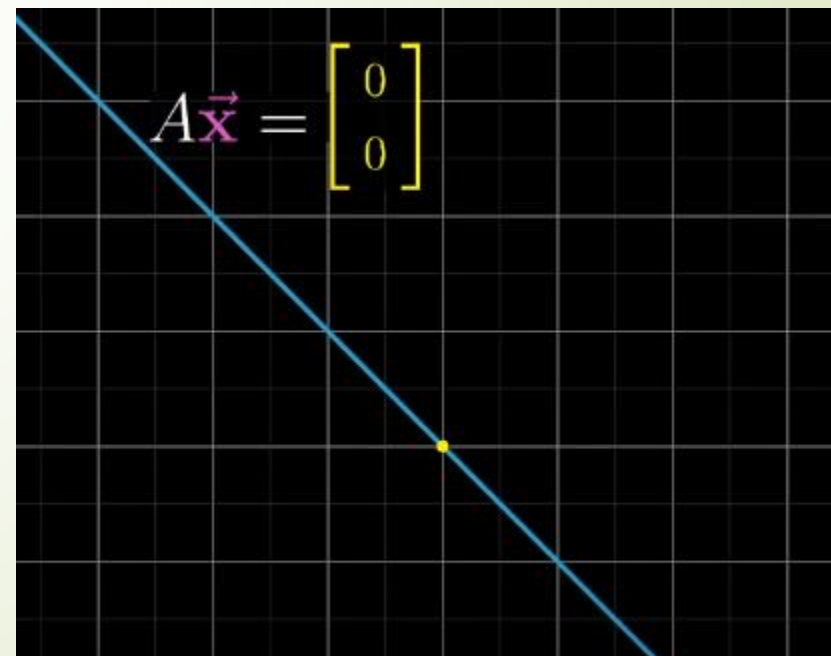
= 求解矩陣A的核解(kernel)

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & -8 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



直線集合→變成(0,0)

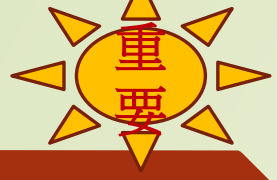
求出解=直線方程式





解聯立方程式的重點摘要

- ➡ 1. 計算聯立方程式的方法有三種：
 - ➡ (1). 高斯消去法
 - ➡ (2). Cramer' s rule 克拉瑪法則
 - ➡ (3). 餘因子方法（有點麻煩，不切實際）



反矩陣，逆矩陣的重點摘要-1

- ➡ 1. 2x2矩陣的反矩陣算法，有特殊公式(常用)

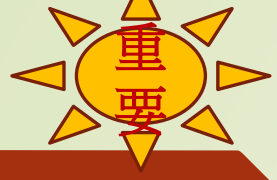
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- ➡ 2. 算反矩陣之前，要先驗證『有沒有反矩陣存在』，這個很重要
- ➡ 3. 驗證有沒有反矩陣的方法= $\det(A)$ =算行列式值
 - ➡ 只要 $\det(A) \neq 0$ ，就會有反矩陣存在

$$\det(A) = ad - bc$$

- ➡ 4. 計算反矩陣的方法有三種：



反矩陣，逆矩陣的重點摘要-2

- 4. 計算反矩陣的方法有三種：
 - (1). 2×2 矩陣的反矩陣算法，有特殊公式(常用)
 - (2). 高斯消去法 (擴展矩陣)
 - (3). 餘因子方法



結論：算反矩陣重點摘要

➡ 4. 計算反矩陣的方法有三種：

➡ (1). 2x2矩陣的反矩陣算法，有特殊公式(常用)

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

➡ (2). 高斯消去法

➡ 擴展矩陣

用高斯喬丹消去法，結果

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

➡ (3). 餘因子法

➡ 公式：
$$A^{-1} = \frac{\text{伴隨矩陣}}{\det(A)} = \frac{\text{餘因子矩陣}^T}{\det(A)} = \frac{\text{餘因子矩陣的轉置矩陣}}{\det(A)}$$



反矩陣，逆矩陣的重點摘要-4

➡ 5. 反矩陣的用途有二種：

➡ (1). 解聯立方程式

➡ 聯立方程式： $A\vec{x}=\vec{v}$

➡ 解聯立方程式： $\vec{x}=A^{-1}\vec{v}$

➡ (2). 座標轉換（逆轉換矩陣）

➡ $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ = 原本座標網格被轉換後的轉換矩陣

➡ $A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ = 逆轉回到原位置的轉換矩陣

2x2矩陣的反矩陣算法公式

定理 1.4.5(page. 41)

► 對於可逆矩陣

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

► 若且唯若 $ad - bc \neq 0$ ，則其反矩陣公式為

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (2)$$