# chp9：線性代數的本質：
## 內積、對偶

陳擎文老師

# 線性代數的學習重點與探討主題

**觀念**
- 數學符號的意義

**基礎**
- 向量
- 矩陣
- 聯立方程式
- 行列式

**主題**
- 線性映射
- 坐標轉換
- 特徵向量

# 線性代數的學習重點

## 觀念

- 數學符號的意義

## 基礎

- 向量，張量
- 3D矩陣
- 行列式
- 聯立方程式

- 矩陣乘法
- 反矩陣
- 行空間，rank，零空間
- 非方陣的矩陣轉換

- 內積

## 主題

- 線性映射
- 坐標轉換
- 特徵向量，特徵值

# 線性代數授課的兩條線

- (1). 了解線性代數的本質
  - 了解其背後的物理意義
  - 了解關鍵重點
- (2). 學習如何計算
  - 了解數學的定義，公式，定理，證明
  - 練習計算

# 參考資料

- https://www.youtube.com/watch?v=LyGKycYT2v0

# 探討主題

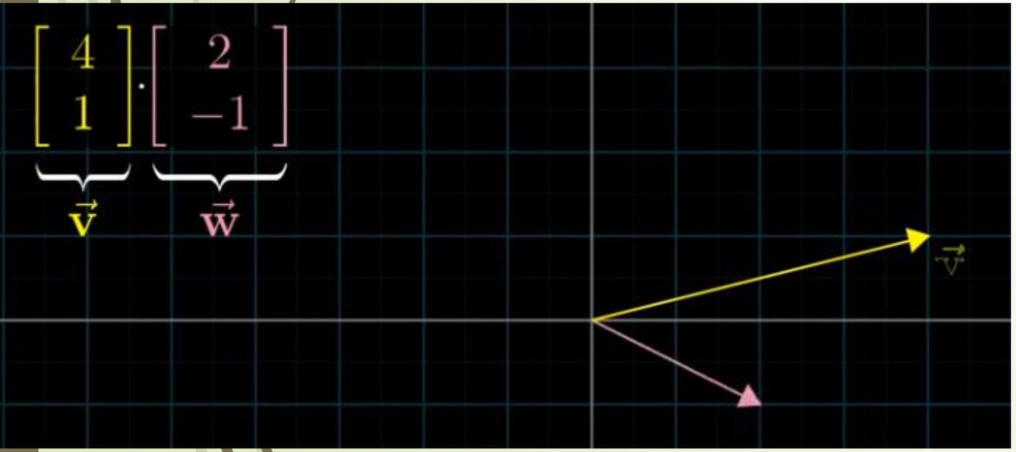
- 內積(dot product)
- 對偶(dualiy)

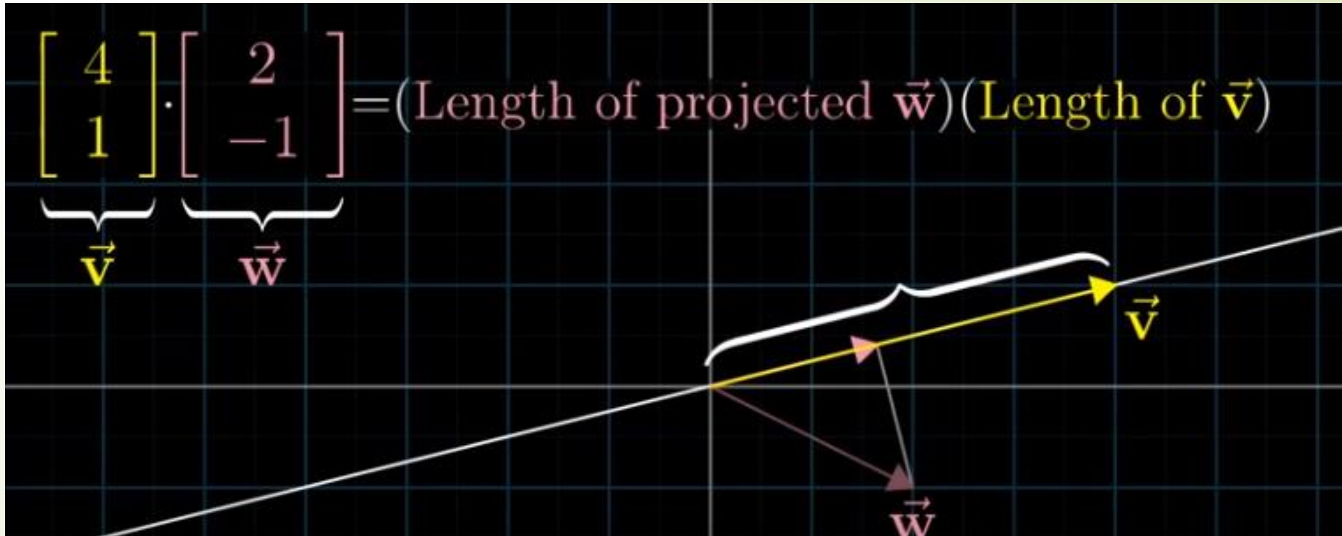
# 內積(dot product)

- $\begin{bmatrix}2\\7\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}8\\2\\8\end{bmatrix} = 2*8 + 7*2 + 1*8 = 16+14+8 = 38$
- $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = 1*3 + 2*4 = 3+8 = 11$

# 內積(dot product)的物理意義(1)

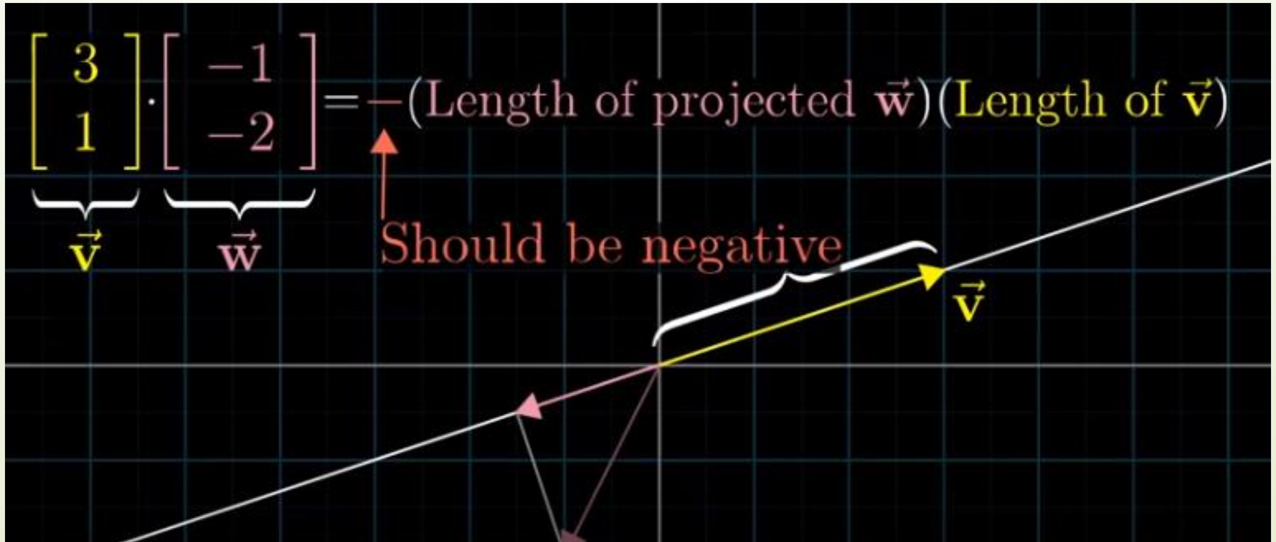
- $\vec{v}\cdot\vec{w}$ =$\vec{v}$內積$\vec{w}$
- 代表：**$\vec{w}$投影到$\vec{v}$**的長度乘積
- $\vec{v}\cdot\vec{w}$ =(**$\vec{w}$投影到$\vec{v}$ 的長度**)*($\vec{v}$ 的長度)



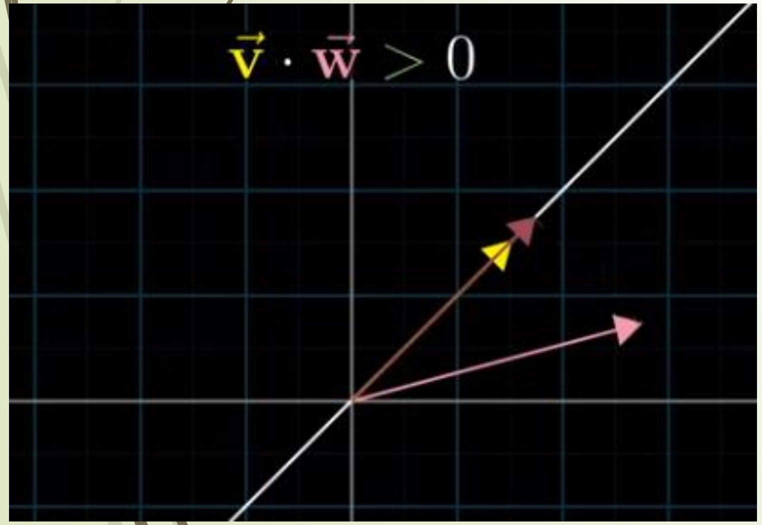
# 內積(dot product)為負值的物理意義(1)

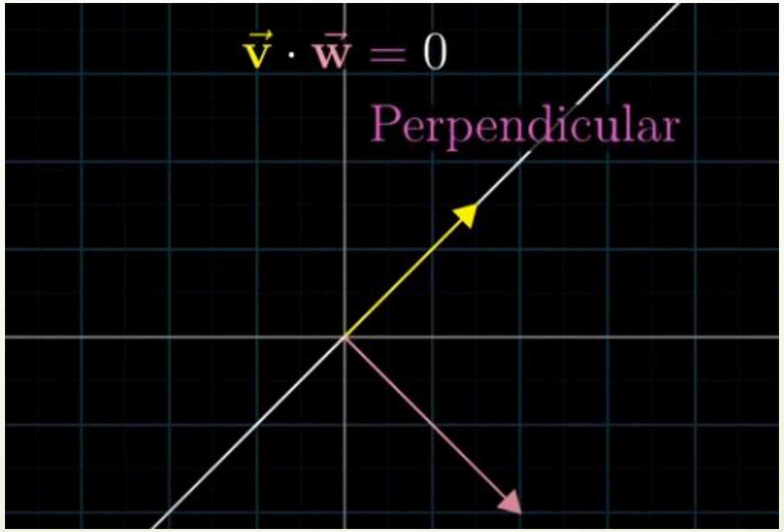
- $\vec{v}\cdot\vec{w}$ =$\vec{v}$內積$\vec{w}$
- $\vec{v}\cdot\vec{w}$ =($\vec{w}$投影到$\vec{v}$ 的長度)*($\vec{v}$ 的長度)
- $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$=-3-2=-5
- 代表意義：$\overrightarrow{vw}$ 兩個向量的方向相反

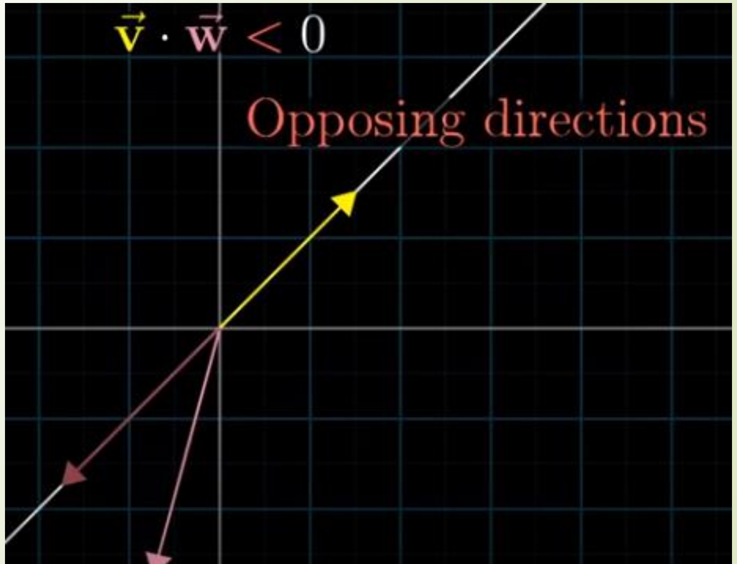


# 內積(dot product)為正為負為0的物理意義

- $\vec{v}\cdot\vec{w}$ =$\vec{v}$內積$\vec{w}$
- $\vec{v}\cdot\vec{w}$ =($\vec{w}$投影到$\vec{v}$ 的長度)*($\vec{v}$ 的長度)
- (1)內積為正：代表：$\overrightarrow{vw}$ 兩個向量方向相同
- (1)內積為0 ：代表：$\overrightarrow{vw}$ 兩個向量方向垂直
- (1)內積為負：代表：$\overrightarrow{vw}$ 兩個向量方向相反

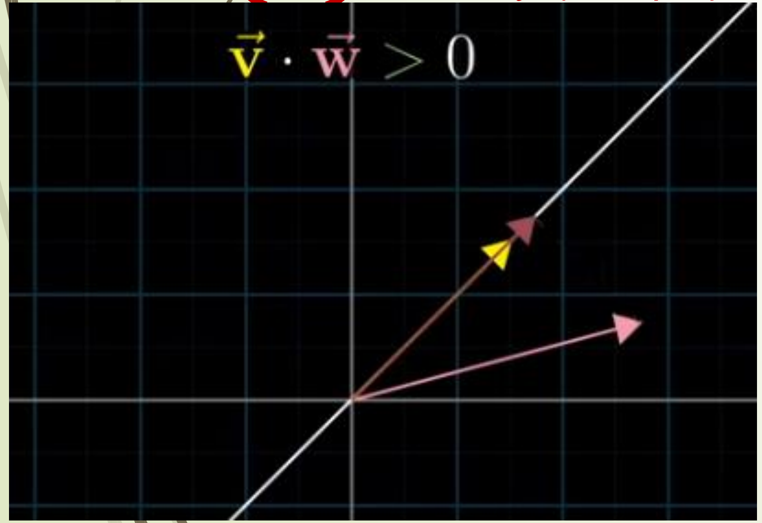


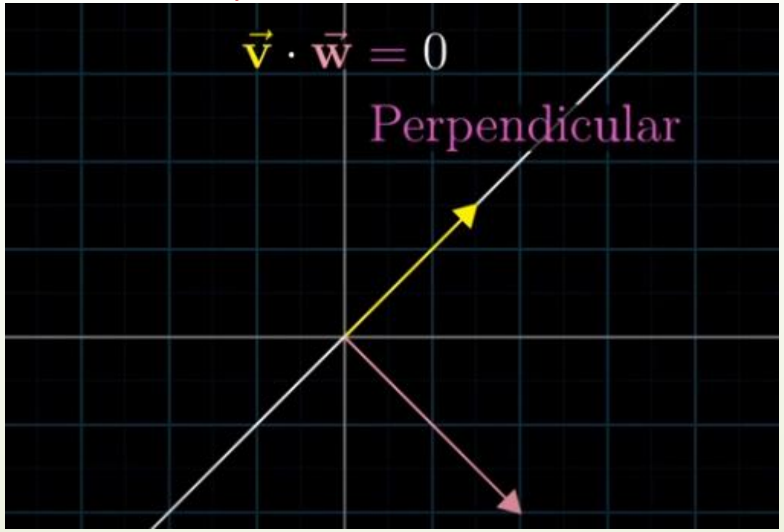



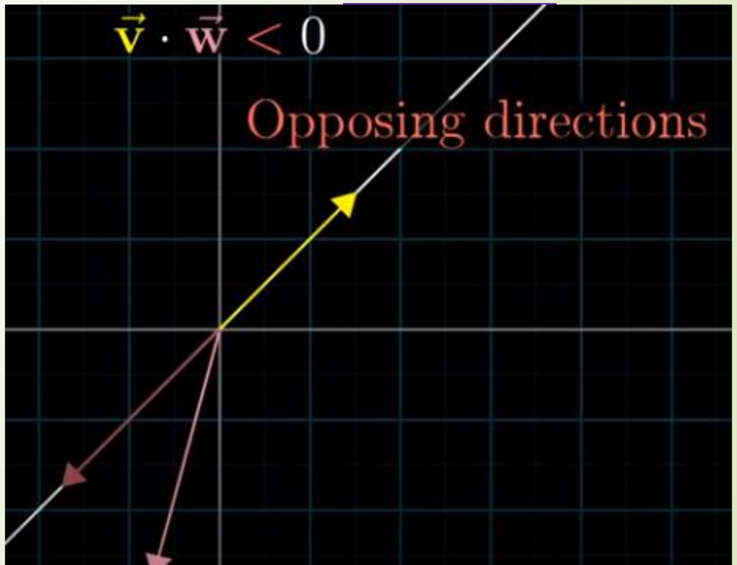



# 內積(dot product)最重要的應用

- 可以判別$\overrightarrow{vw}$兩個向量的方向是否相同或相反
- (1)內積為正：代表：$\overrightarrow{vw}$兩個向量方向相同
- (1)內積為0：代表：$\overrightarrow{vw}$兩個向量方向垂直
- (1)內積為負：代表：$\overrightarrow{vw}$兩個向量方向相反



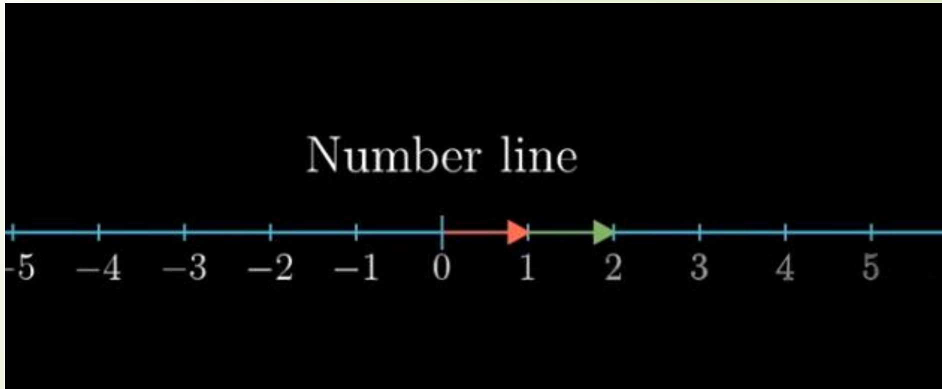
# 內積計算乘積方法的物理意義(2)

- **為什麼內積**乘積的公式是 $=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$=-3-2=-5
- (1).$\vec{v}\cdot\vec{w}$代表物理意義：
  - $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{-2}\end{bmatrix}$**被座標轉換矩陣A映射到1D直線的值**=-5
  - = **-1放大3倍 + -2放大1倍**
  - 座標轉換矩陣A=[3　1]（input維度=2， output維度=1）
- (2).通式：

$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{bmatrix}$經過**座標轉換矩陣A映射到1D直線的值=ax+by**

**= x放大a倍 + y放大b倍**

- (3).**結論：2D向量的內積的物理意義**：
  - 代表：**<u>2D向量經過轉換矩陣轉成1D直線</u>**

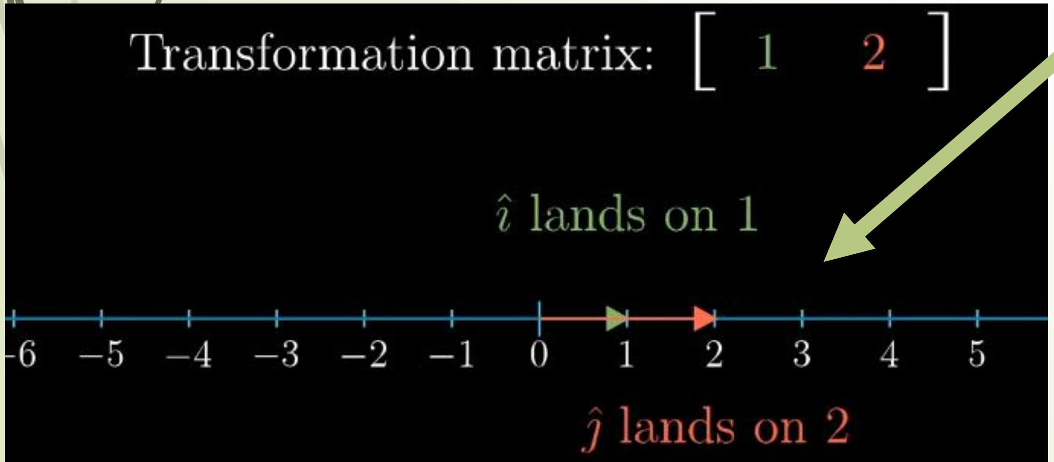


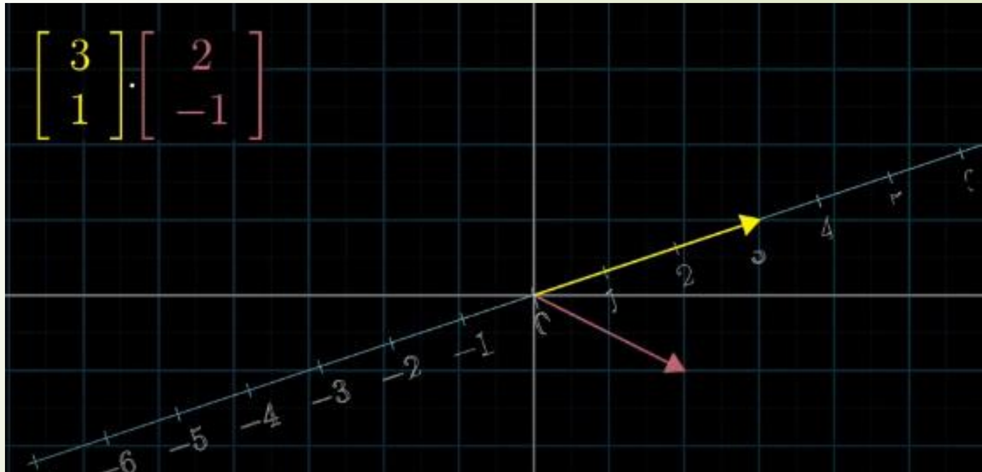
# 二維向量內積的物理意義(2)：2D轉換到1D

- 向量內積(dot product)的物理意義
- $[1 \quad 2]\begin{bmatrix}x1\\x2\end{bmatrix}=[v1]$
- 轉換矩陣A=[1　2]=2D轉換到1D
- 代表意義：向量(x1,x2)經過座標轉換到另外一條直線(i軸)向量的映射值
- 向量$\begin{bmatrix}x1\\x2\end{bmatrix}$轉換到1D直線(i軸)上（i1係數*x1 + i2係數*x2）
- = x1放大1倍＋x2放大2倍

[1　2]代表意義：
=[1　2]是i軸上的2個分量係數

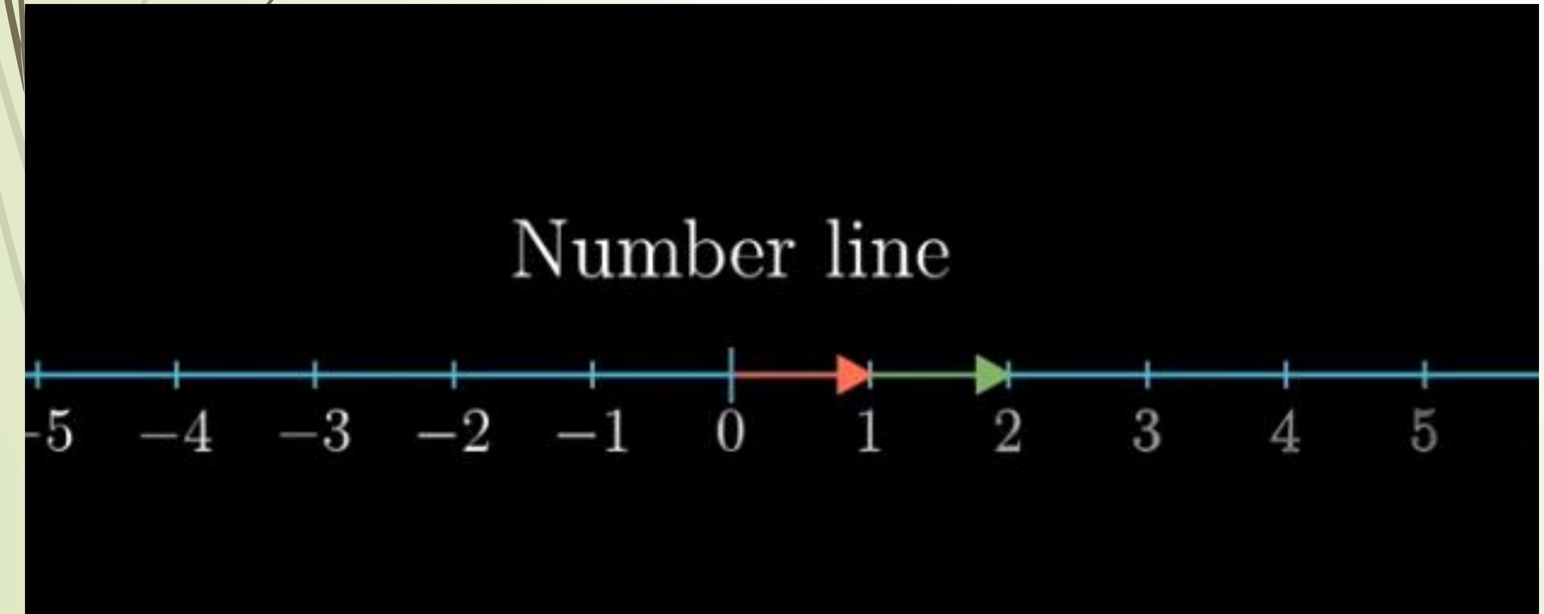
i1, i2縮放係數

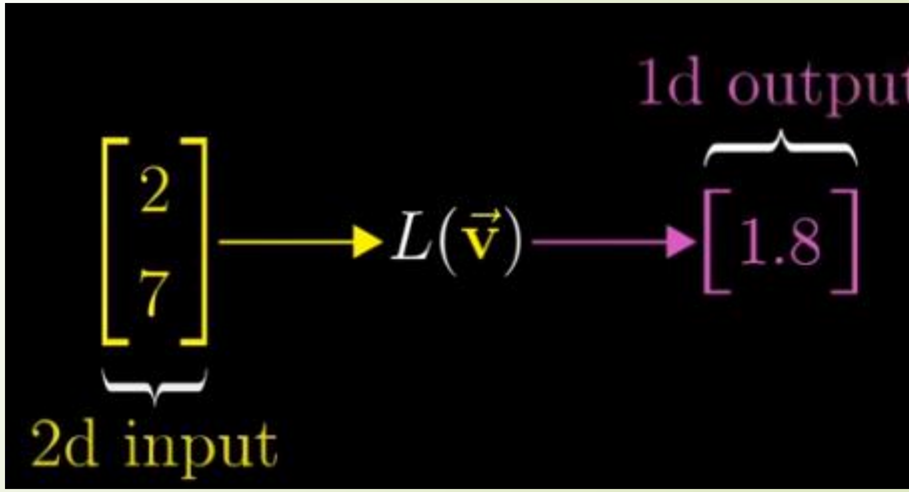


# 二維向量內積的物理意義(2)：2D轉換到1D

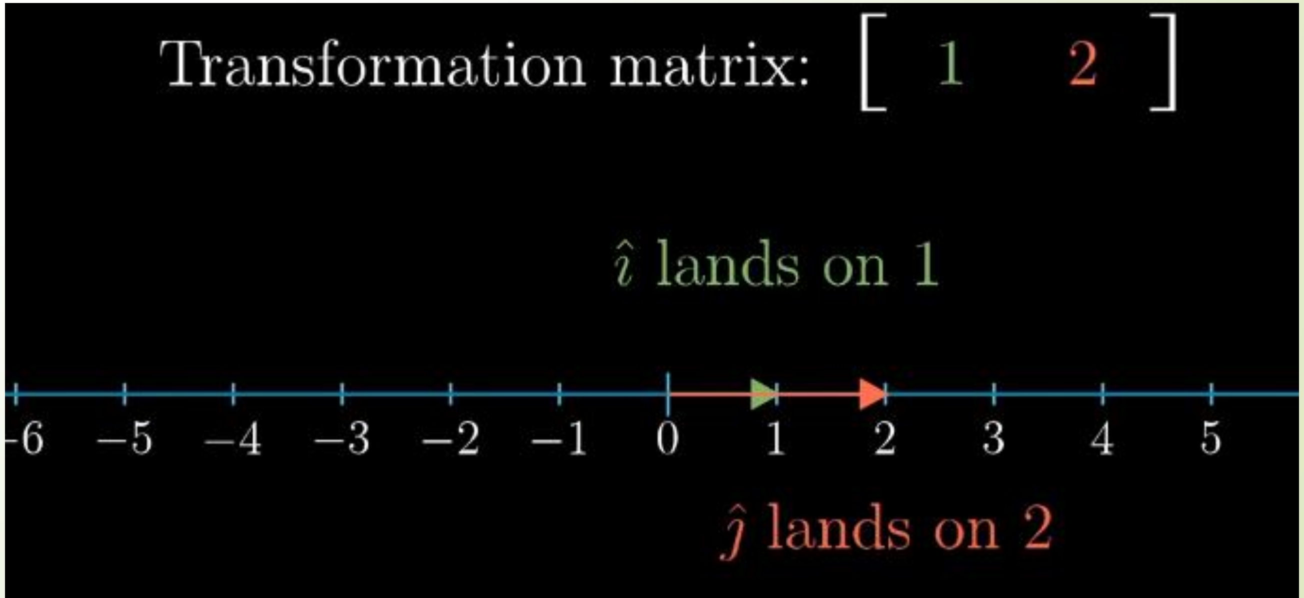
- 向量內積(dot product)的物理意義
- $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x1\\x2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x1\\x2\end{bmatrix}=[v1]$
- 轉換矩陣A=[1　2]=2D轉換到1D
- 代表意義：向量(x1,x2)經過座標轉換到另外一條直線(i軸)向量的映射值



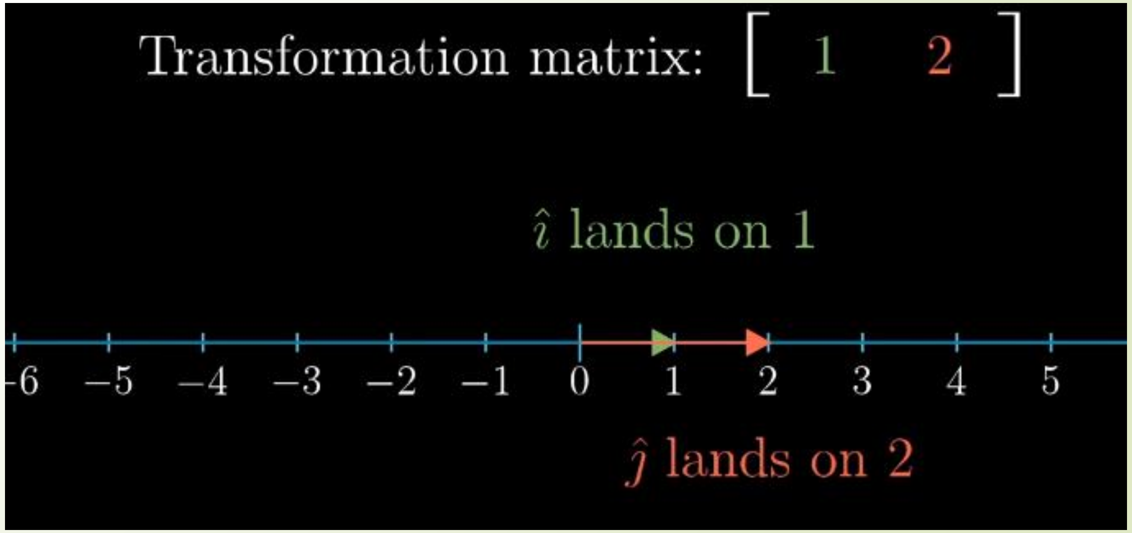
# [1　2]代表物理意義

- [1　2]代表物理意義：
  - [1　2]是：i軸上的2個分量係數
  - 注意：[1　2]不是2D向量，而是1D數據，
  - 是指i軸直線上的兩個縮放參數[i1 i2]in i軸
  - i1, i2是縮放係數



# [3　5　2]代表物理意義

- [3　5　2]代表物理意義：
  - [3　5　2]是：i軸上的3個分量係數
  - 注意：[3　5　2]不是3D向量，而是1D數據，
  - 是指i軸直線上的三個縮放參數[i1 i2　i3]in i軸
  - i1,　i2, i3是縮放係數

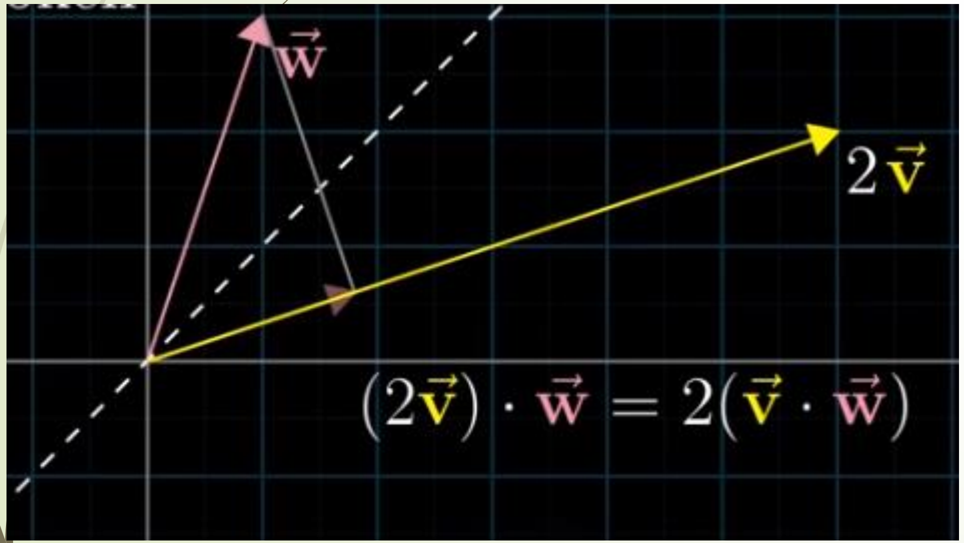


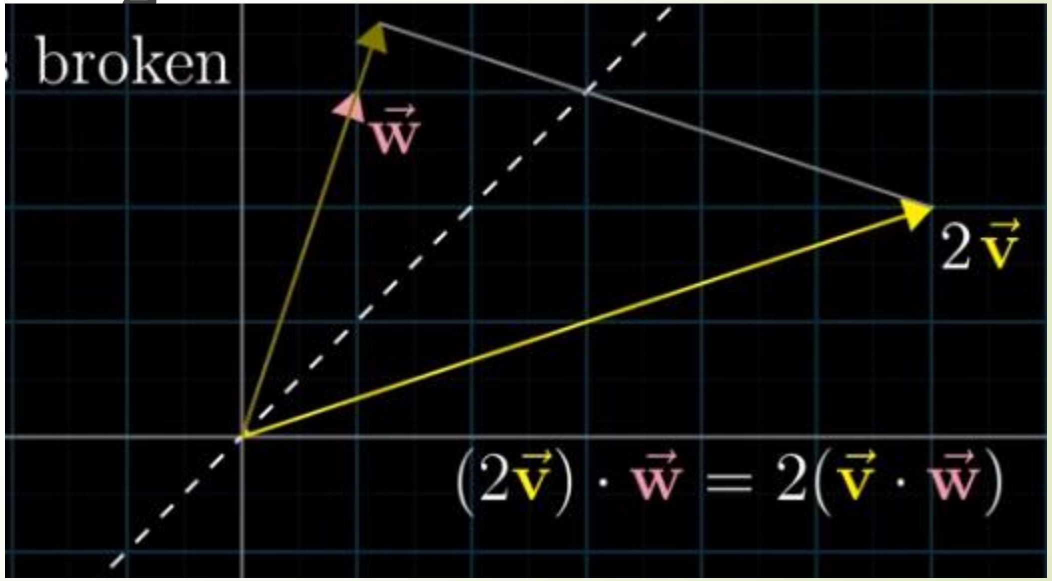
# $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}$代表物理意義

- $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}$
- $=[3 \quad 1 \quad 4]\boldsymbol{in\ i}$**軸** $\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}+[1 \quad 5 \quad 9]\boldsymbol{in\ j}$**軸** $\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}$**轉換到i軸直線上**$+\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}$**轉換到j軸直線上**
- i軸的合成縮放值+ j軸的合成縮放值
- $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} =$ **是個2D向量**=（**ai,bj**）

# 內積次序對調，值相同

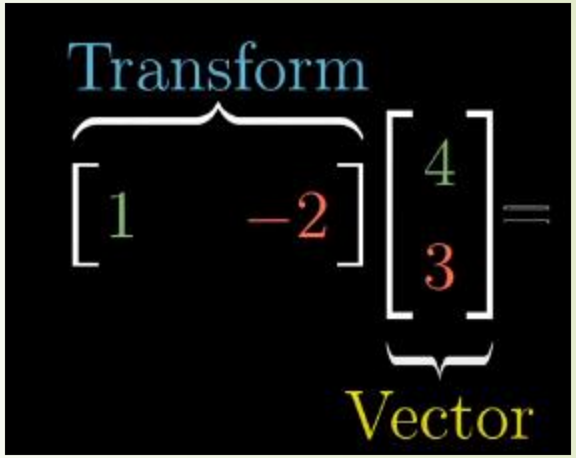
- $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x1 & x2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = x1 + 2x2$

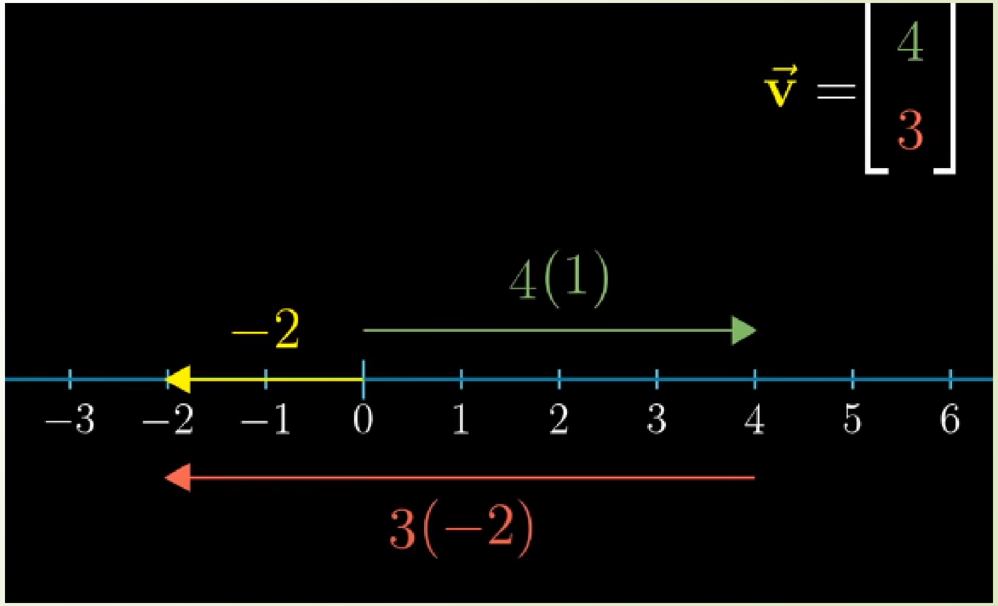


# 範例1：計算 $\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = 4-6 = -2$
- 代表物理意義：
  - 代表 $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$ **轉換到i軸直線上**
  - **（i軸上的2個縮放係數：1，-2）**
  - = 4-6 = -2



# Dualiy(對偶性，雙重性)

- 對偶(dualiy)=雙重性
  - 在數學上，很多看似無關的兩個數學公式，竟然互相呼應，表示同一件事情

Duality ⇔ Natural-but-surprising correspondence

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = u_x \cdot x + u_y \cdot y$$

Matrix-vector product

⇕

Dot product

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = u_x \cdot x + u_y \cdot y$$