

線性方程式 不包含 = 平方 $x + 3y^2 = 4$

根號 $\sqrt{x} + 2x_2 + x_3 = 1$

三角函數 $\sin x + y = 0$

變數乘積 $3x + zy - xy = 5$

ex: 一解 $\rightarrow$ 交一點

$$x - y = 1$$

$$2x + y = 6$$

$$x = \frac{7}{3}$$

$$y = \frac{4}{3}$$

ex: 無解 $\rightarrow$ 平行

$$x + y = 4$$

$$3x + 3y = 6$$

) m 相等

$$0 \neq -6$$

ex: 無限多解 $\rightarrow$ 重疊

$$4x - 2y = 1$$

$$16x - 8y = 4$$

) 縮放

$$0 = 0$$

2021/9/24 Ch p2 解聯立方程式(1)

1. 解

$$x + y + 2z = 9$$

$$2x + 4y - 3z = 1$$

$$3x + 6y - 5z = 0$$

① 增廣矩陣:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

② 把前導壹下面都變成0:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

③ 找出第2列的前導壹:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

④ ② again:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

⑤ 找出第3列的前導壹:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

⑥ 把前導壹上面都變成 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2021/10/11 第2章

1. 解增广矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

① 把第一列变成列向量

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -17/5 & -29/5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -17/5 & -29/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & -2/5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -17/5 & -29/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -17/5 & -29/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

$$\begin{aligned} x_5 &= 2 \\ x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 &= 12 \\ x_1 &= 12 - 2x_2 - 3x_4 \end{aligned}$$

是无限多组解

2. 解

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0$$

$$2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1$$

$$5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5$$

$$2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6$$

① 增广矩阵

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 & \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

ref

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_6 = \frac{1}{3}$$

$$x_3 = -2x_4$$

$$x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5$$

641 < 2 無限多解

2021.10.8. 第2章

1. 解

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

① 增广矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

② 第1列前消元

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ -1 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

③ 第2列, 第3列消元

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 7/2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 7/2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

-2 -7 -12

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 7/2 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{bmatrix}$$

④ 各行乘以 1/5

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 7/2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

-7 -12

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$x_3 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_1 = 1$

1. 已知 A, B 相乘

1. 已知 A, B 相乘

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

$$[[12 \ 27 \ 30 \ 13]$$

$$[\ 8 \ -4 \ 26 \ 12]]$$

$$6+6$$

$$8+12$$

$$5+2$$

$$2-6$$

$$1-2+28$$

$$4+6+28$$

$$3+2+18$$

~~1.2~~ 5. ~~1.2~~ $\{ \vec{v} \}$ = determinant = $\det(A)$

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

~~1.2~~ $\det(A) = ?$

① $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$

$$= (3 \times -2) - (4 \times 1)$$

$$= -6 - 4 = -10$$

$$2. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{Find } \det(A).$$

$$\textcircled{1} \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= (5 \times 9 + 12 \times 7 + 12 \times 8) - 15 \times 7 - 48 + 8 \times 9$$

$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 + 72$$

$$= 240$$

2021/10/15, 第5章, 行列式

1. 綱要:

① 解:
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

② 題型: (A) 求未知數解

(B) 問

唯一解
無解
無限多解

(第2章)
① 高斯消元法

② 克拉瑪法 (行列式)
(第5章) 公式解

③ 反矩陣求解 (第6章)

④ 高斯消元法

⑤ 行列式判定

2. 用高斯消元法求解

$$x - y = 1$$

$$2x + y = 6$$

① 增广矩阵 = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

② 第1列找主元

③ 前导主元下方为0

④ 找出第2列主元

⑤ 前导主元上方为0

⑥ 最终形式：简化行阶梯形

① $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/3 \\ 0 & 1 & 4/3 \end{bmatrix}$

↑ 主元

$$x = 7/3$$

$$y = 4/3$$

#

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4/3 \\ 0 & 1 & 4/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/3 \\ 0 & 1 & 4/3 \end{bmatrix}$$

↑ ref

3. 用克拉姆法解

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

无解

① 克拉姆法 = 行列式公式法

②

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}} = \frac{1 - (-2)}{1 - (-2)} = \frac{3}{3} = 1$$

$\det(A) = 0$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}} = \frac{6 - 2}{1 - (-2)} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

4. 用高斯-约当法判断

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$$
 的解为 $\begin{cases} \text{唯一解} \\ \text{无穷} \\ \text{无解} \end{cases}$

① 增广系数阵 = $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{array} \right]$

② 找出第1列前导元

③ 前导元下方为0

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{array} \right] \Rightarrow 0x + 0y = -6$

④ 同以列标为0

⑤ 1/2 的最后一列
的列号格式

$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$
 解 本已本不可解
 无解
 唯一解

3. 用公式法求通解
 $x + y = 4$
 $3x + 3y = 6$

0/3 - 1/3
 1/3 - 1/3
 1/3 - 1/3

① 判别公式

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

A. 若 $\det(A) \neq 0$, 有唯一解,

B. 若 $\det(A) = 0$ 且 $\det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = 0$

为无限解 $= \frac{0}{0}$

C. 若 $\det(A) = 0$, 且 $\det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \neq 0$

为无解 $= \frac{a}{0}$

$$\textcircled{1} \quad A: \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 3 - 3 = 0, \text{ 所以可能无解或有无穷多解}$$

$$\textcircled{2} \quad X = \frac{1431}{0} = \frac{12}{0} \Rightarrow \text{不可能, 所以无解}$$

无解

6 4×4 以上的行列式如何计算 = 余因子法

= 计算

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

(用余因子法)

原式

① 任意找一行或一列 (我用第3列) **降维**

② $5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \Rightarrow$ 降成2组

③ 注意 = 正负号

+	-	+	-
-	+	-	+
+	-	+	-
-	+	-	+

= $5 \cdot 3 - 4 \times 9 - 2(-10) = 15 - 36 + 20 = -1$

7. 特殊行列式

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

計算 $\det(A)$

① 4×4 , 只能用餘子法降維

② 小技巧: 找 0 最多的那一列或行 $\Rightarrow$ 第 2 行
有 3 個 0

③ 記憶順序:

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} + & 1 & & & & & & \\ & & - & 0 & & - & 1 & \\ & & & & + & 0 & + & 0 & + & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 \end{array}$$

④ 用第 2 行降維 (2 個 0) $= -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 = -6$ #

8. 特征行列式 = 三角矩阵 =

求 $\det(A)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

① 找 0 最多的列 =

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 2 & 1 & 0 & 1 \\ & 3 & 1 & 1 & 1 \\ & 4 & 1 & 3 & 1 \end{array}$$



$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 2 & 1 & 0 & 1 \\ & 3 & 1 & 1 & 1 \\ & 4 & 1 & 3 & 1 \end{array}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 = 5$$

② 三角矩阵的特征行列式 = 对角线相乘

③ 上三角、下三角、对角线先归一

9. 用克拉姆法则

求解

$$x_1 + \quad + 2x_3 = 6$$

$$-3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30$$

$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8$$

$$\begin{aligned} & -60 - 32 - 92 \times 2 \\ & = -184 \end{aligned}$$

② 行列式公式

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}} =$$

$$\frac{\begin{vmatrix} 6 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 12 \\ 8 & -2 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 12 \\ 8 & -2 & 18 \end{vmatrix}} = \frac{144 - 184}{24 + 20}$$

$$= \frac{-40}{44} = -\frac{10}{11} \quad \text{II}$$