

第11章 特徵向量 特徵值 特徵空間 矩陣對角化 A^{50} (1)

1. 定義 ① 向量 x 經過矩陣 A 坐標轉換成 y 向量

$$Ax = y$$

會發現, 在某些情況下, x, y 的方向相同。

但只是大小不同 (縮放)



$\Rightarrow (v_1, v_2 \text{ 同方向})$
(但有縮放)

② $v, v_1 \Rightarrow$ 就是特徵向量 Eigen Vectors $v_2 = \lambda v_1$
 $\lambda \Rightarrow$ 就是特徵值 Eigen Value

2. 計算特徵值的公式:

① 已知 $AX = \lambda X$

$$AX = \lambda I X$$

$$(A - \lambda I) X = 0$$

$$M X = 0$$

$\Downarrow$
X 被壓縮到零空間

$\Downarrow$
降階, nullity $\neq 0$

$\Downarrow$
 $\det(M) = 0$. 才會降階

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

求特徵值公式

① I 是單位矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

② 為什麼 $\lambda = \lambda I$

(觀念) = 常數 2 $\rightarrow$ 就是
線性代數

(證明) $2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

3. P265. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$. 求特征数值
get the eigenvalue of A

① 求特征数值公式 = $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$-1 \cdot (3-\lambda) \cdot (1+\lambda) = 0$$

$$\lambda = 3, \text{ 或 } \lambda = -1 \quad \#$$

4. P268. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 5 & -8 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ 求特徵值.

① 求特徵值公式 $= \det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} - \lambda & 0 \\ 5 & -8 & \frac{1}{4} - \lambda \end{vmatrix} = (\frac{1}{2} - \lambda)(\frac{2}{3} - \lambda)(\frac{1}{4} - \lambda) = 0$$

所以 $\lambda = \frac{1}{2}$, 或 $\frac{2}{3}$, 或 $\frac{1}{4}$.

② 注意: A 是三角矩陣

③ 結論: 三角矩陣的特徵值, 就是對角線的元素

2022/1/17 第11章 特徵向量

1. P268. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ 求特徵空間的基底 basis

① 特徵空間定義: λ 特徵向量為基底的空間

Ex. $S = \{v_1, v_2\}$, v_1, v_2 為 特徵向量

② 步驟 1 = 先算特徵值 $AV = \lambda V$

$$(A - \lambda I)V = 0 \leftarrow \text{核空間}$$

公式: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\det = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -(1+\lambda) \end{vmatrix} = -(3-\lambda)(\lambda+1) = 0$$

$$\lambda = 3 \text{ or } \lambda = -1$$

↓
β₁ β₂
↓

$$\det() = 0$$

③ 步骤2: 由特征值 $\rightarrow$ 特征向量

④ 将 $\lambda = 3$ $(A - \lambda I) V = 0$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} V = 0$

求 $V \rightarrow$ 就是特征向量.

$\rightarrow$ 用高斯消元法求 V , $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
增广矩阵

$V_1 = \frac{1}{2} V_2$

令 $V_2 = t$, $V_1 = \frac{t}{2}$

$\leftarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t}{2} \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

所以
特征向量 $= t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

$$(5) \text{ 當 } \lambda = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3+1 & 0 \\ 8 & -1+1 \end{bmatrix} v = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} v = 0$$

用高斯消元法求解 v ，
增廣矩陣 $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
 v_1 v_2

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = t \text{ (任意數)}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{所以特征向量} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \#$$

⑥ A 的特征空间 基底^{basis} $S = \{w_1, w_2\}$
 $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ~~#~~

⑦ A 的特征 空间^{space} = $\text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
 Eigen structure ^{生成空间}

⑧ A 的特征 子空间^{structure} = $\left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t, s \in \mathbb{R} \right\}$

2. P211. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求A的特征与结构.

① 思路: 特征值 $\rightarrow$ 特征向量 $\rightarrow$ 特征与结构

② $\det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda-2)^3 = 0$
 $\Rightarrow \lambda = 2, 2, 2$

③ 当 $\lambda = 2$, $\begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} V = 0$.

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} V = 0$
 v_1, v_2, v_3

$v_2 = 0, v_1 = t, v_3 = s.$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
 ④ A的特征与结构
 $\left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t, s \in \mathbb{R} \right\}$

3, 例题: 请把 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 对角化

① 方法: 用 $P^{-1}AP$, 就可以把 A 对角化

$$\text{公式: } P^{-1}AP = D$$

A 是矩阵
 P 是特征基组成的矩阵 $[v_1, v_2, v_3]$ 特征向量

P^{-1} 是 P 的逆矩阵.

D 是对角化矩阵 $= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$, λ 是特征值

② 步骤1: 先求特征值

$$\det \begin{bmatrix} 0-\lambda & -2 \\ 1 & 2-\lambda \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} v = 0$$

$$\Rightarrow -(\lambda-2) \cdot (\lambda-2) (\lambda-1) = 0$$

$\lambda = 2, 2, 1$

② 当 $\lambda = 2$ 时 $\begin{bmatrix} 0-2 & -2 \\ 1 & 2-2 \\ 1 & 0 & 3-2 \end{bmatrix} v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v = 0$

高斯消元解 $v \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $v_1 = -v_3$
 令 $v_3 = t, v_2 = s$
 $v_1 = -t$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ s \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \# \text{ 特征向量}$$

④ 当 $\lambda = 1$
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} v = 0$$

高斯消元法解 v , $\rightarrow$ 行变换后得到
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} v_1 = -2v_3 \\ v_2 = v_3 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
 特征向量

$$\Rightarrow \begin{matrix} v_3 = t \\ v_1 = -2t \\ v_2 = t \end{matrix}$$

⑤ 求完全分解特征值问题
$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(6) 求 $P^{-1} \Rightarrow A \cdot A^T = I \quad \Leftrightarrow \quad 2 - \frac{1}{2} = 1$
 $A \cdot x = I$

$P \cdot P^{-1} = I$
 $\downarrow$

解 $\rightarrow$ 高斯消元 $\rightarrow$ 增广矩阵 $[A | I]$

$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$

把 I_2 乘 5 加到 I_3 上

$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{array} \right]$

$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{array} \right]$

故 $P^{-1} =$

$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \end{array} \right]$

4. P282 求 A^{13} . $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

① 公式 $A^{13} = P \cdot D^{13} \cdot P^{-1}$

$\begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 213 & 213 & 0 \\ 0 & 0 & 213 \end{bmatrix}^{13}$

② 步骤 1: 先求特征值

$\det(A - \lambda I) = 0$

$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$-(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-1) = 0$

$\lambda = 2, 2, 1$

③ 步骤 2: 再求特征向量

④ 当 $\lambda = 2$, $\begin{bmatrix} 0-2 & 0 & -2 \\ 1 & 2-2 & 1 \\ 1 & 0 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

④ 當 $\lambda = 1$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} v = 0$, 求解 $v \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

⑤ 合成特徵向量 $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

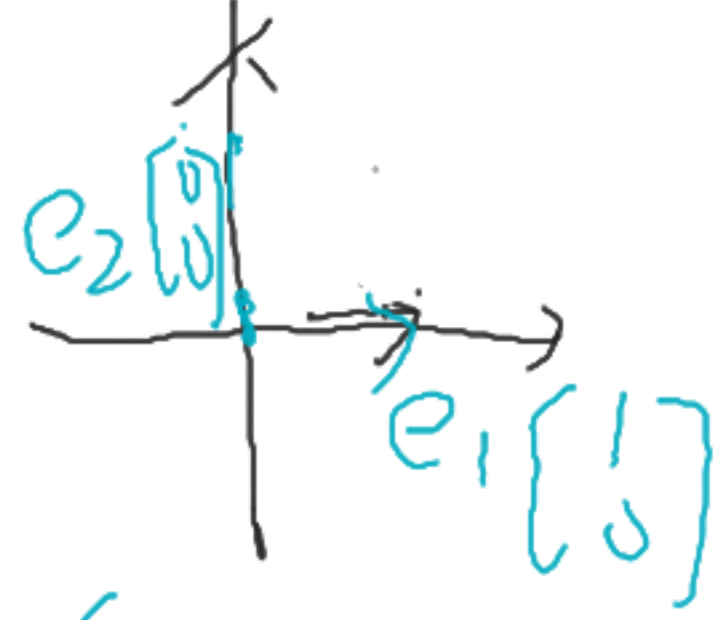
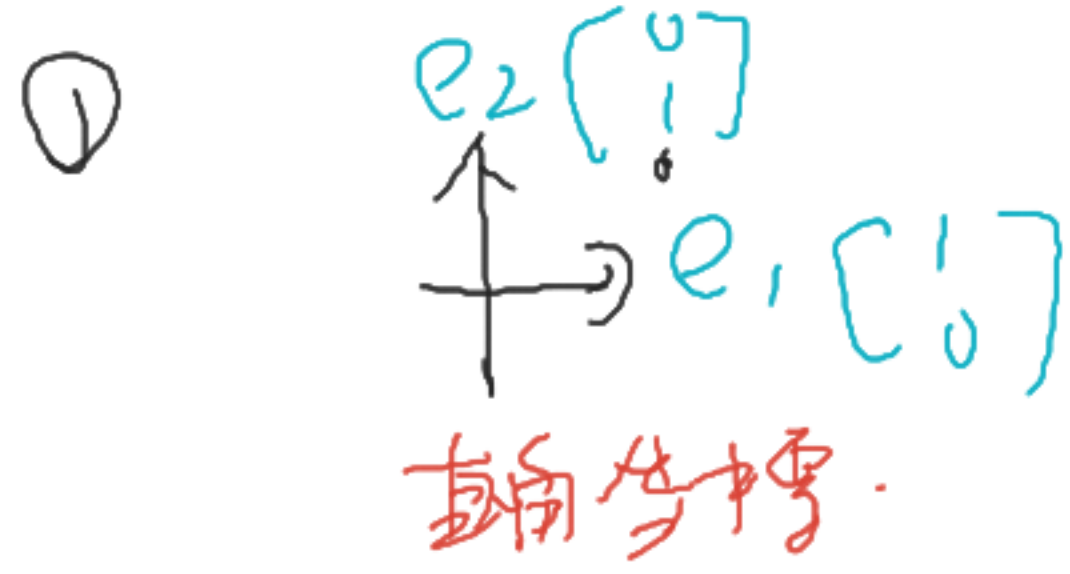
⑥ 計算 $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

⑦ 計算 $D \Rightarrow D = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

⑧ 計算 $A^3 \Rightarrow A^3 = P D^3 P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} -8 & 19 & 0 & 0 \\ 8 & 19 & 0 & 0 \\ 8 & 19 & 0 & 0 \\ 16 & 38 & 3 & 0 \end{bmatrix} \#$

第12章 线性代数

1. 求点 $[-3]$ 对 x 轴的正交投影.



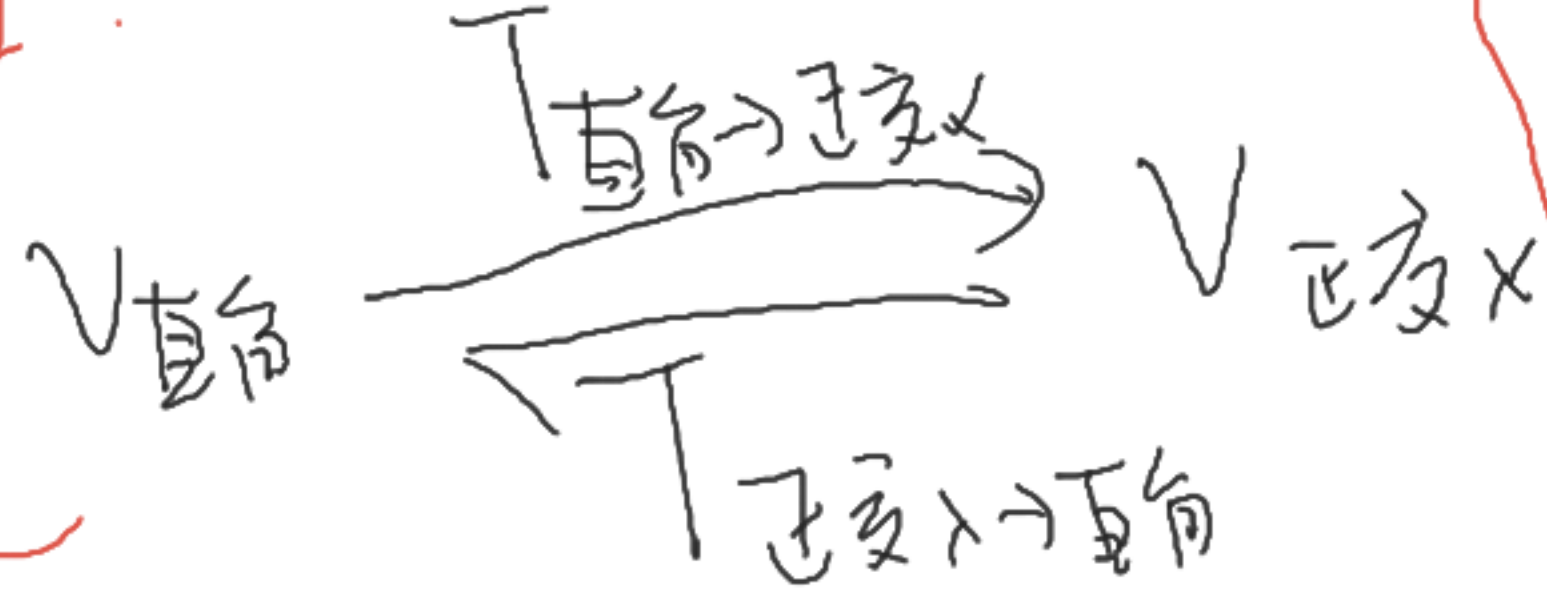
正交投影的步骤

②

投影矩阵 $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

新形式

2个基向量关系图



$V_{\text{标准}} = T_{\text{正交} \rightarrow \text{标准}} V_{\text{正交}}$

$V_{\text{正交}} = T_{\text{标准} \rightarrow \text{正交}} V_{\text{标准}}$

③ $V_{\text{世界}} = T_{\text{自} \rightarrow \text{世界}} V_{\text{自}}$

$$\begin{aligned}
 & \text{移动物体} \rightarrow \text{相机坐标系} \\
 & \text{相机坐标系} \\
 & = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} \#
 \end{aligned}$$

相机坐标系 $\Rightarrow$ 相对坐标
 相机坐标系 $\Rightarrow$ 移动物体

2. 求 $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 进行 x_1 轴点为中心, 逆时针旋转 30°
 之后的新坐标 (象 $\Rightarrow$ 又新象 $\Rightarrow$ 每移动物体, 1
 4个单位)

①

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

4个单位

$$T_{\text{旋转}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$T_{\text{旋转}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

②

$$\textcircled{V_{\text{旋转}}} = T_{\text{直} \rightarrow \text{旋转}} \textcircled{V_{\text{直}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \text{H}$$

2. P208. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ find rank, nullity

① 方法1 $\rightarrow$ 由 nullity / $\lambda \vec{v} \rightarrow A\vec{x} = 0$ ^算 $\rightarrow$ 求零向量的基底

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_6 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} v_2 \\ \vdots \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} v_3 \\ \vdots \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} v_4 \end{bmatrix},$$

so nullity = 4 #

因此 $\Rightarrow \text{rank} = n - \text{nullity} = 6 - 4 = 2$ #

② 方法2 $\rightarrow$ 找 rank $\times$ 手 $\rightarrow$ 看简化列梯形的前导零数.

增广矩阵 $\Rightarrow$
$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 12 & 16 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2个前导零 $\Rightarrow$ $\text{rank} = 2$ #

$$\Rightarrow \text{nullity} = n - \text{rank}$$

$$= 6 - 2$$

$$= 4 \#$$

③ 结论

(A) 如果 $\text{nullity} \neq 0$

代表该空间被压缩 (降阶).

(B) 如果 $\text{nullity} = 0$, $n = \text{rank} \Rightarrow$ Full rank

缩
展
不
有
没
↑