

第14章. 像空間 images. 核空間 kernel. 值域 range

一對一轉換 one to one

映成轉換 on to

$$Y(X) = X^2 + 3X - 2$$

$$Y(5) = 5^2 + 3 \cdot 5 - 2$$

$$f: X \rightarrow Y$$

1. 觀念: 線性轉換的數值表達有3種形式

① 矩陣形式: $[A] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \Rightarrow Ax = w$

② 矩陣轉換: $x \xrightarrow{T_{x \rightarrow w}} w$
 $\xleftarrow{T_{w \rightarrow x}}$
 $\Rightarrow w = (T_{x \rightarrow w})x$

③ 映射函數: $f: X \rightarrow W$
function 輸入 輸出
mapping
 $\Rightarrow x = (T_{w \rightarrow x})w$
寫作 $T(x) = w$
T 映射 x 到 w

2. 定义: 像空间 Images, Im

① 函数: $f: X \rightarrow W$
 $T(x) = w$



② 物理意义: 将物体A的X, 通过 [投影] 到与物体B的W.

③ 像空间: 指 Input 空间 X, 可以取像 $T(x) = w \Rightarrow Ax = w \Rightarrow$ 解 X.

④ 值域 = Range
可感知的域
范围

⑤ $\text{images} = \text{Im} f$ (images function)
 $= R(T) = \text{Im}(T)$
 $= \text{Range}(T) = T(X)$ (函数写法) $= AX$ (方程)

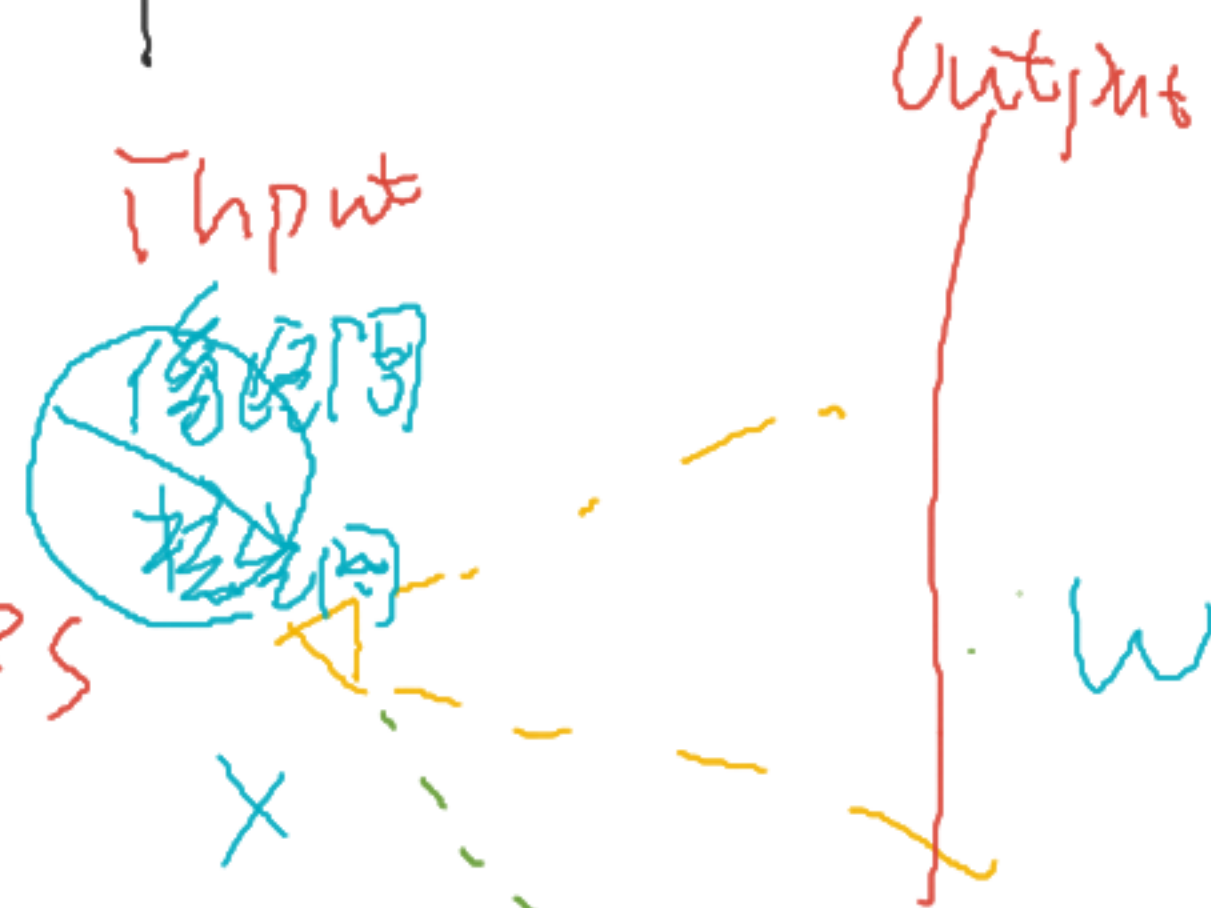
④ 值域 = Images = output.

3. 定义: 核空间.

① 映射函数的结果有2种.

$f = x \xrightarrow{T} W \rightarrow \text{核空间 Images}$

$\searrow K \rightarrow \{0\} \text{ 零空间} \Rightarrow \text{核空间}$



压缩
降维
{0}

② 物理意义:

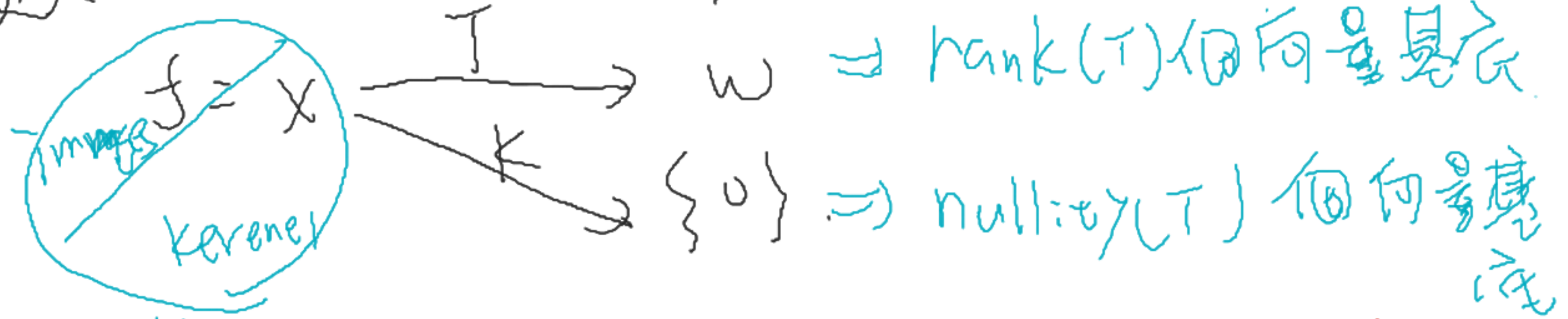
核空间 就是找到那些映射后结果为 0 的解

③ 符号: 核空间

= kernel = kernel space.

= $\ker f$ (函数) = $\ker(T) = \text{kernel}(T)$

4. 秩: $n = \text{rank} + \text{nullity}$



全部 W 個向量是 $\Rightarrow \text{rank}(T)$, 线性独立才能构成
 $\Rightarrow \text{nullity}(T)$, 因为线性相关

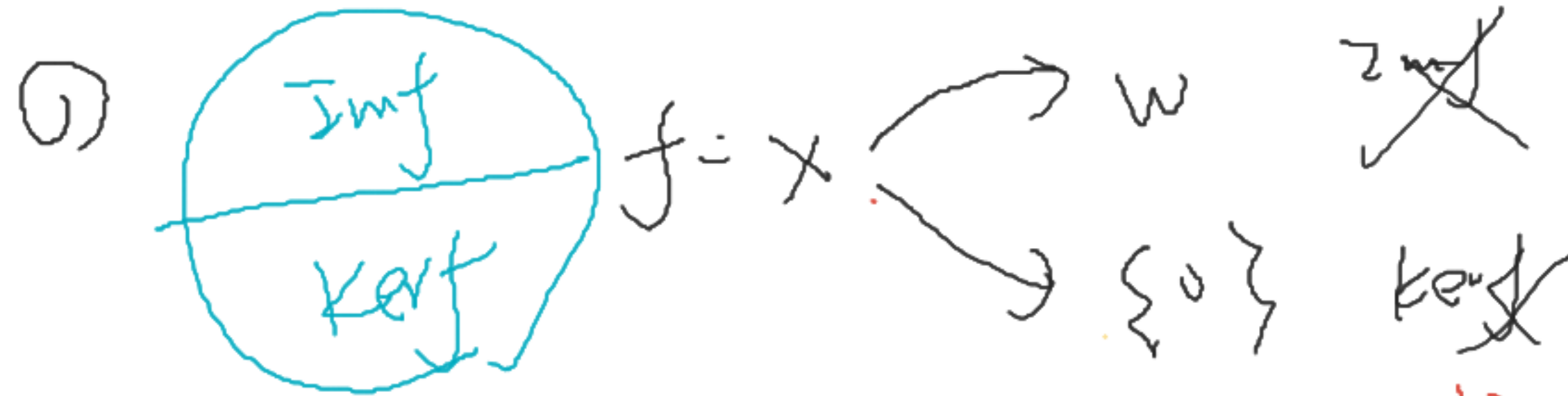
$$n = \text{rank}(T) + \text{nullity}(T)$$

$$= \dim: \text{Im}f + \dim: \text{ker}f$$

$$= \dim: R(T) + \dim: \text{ker}(T)$$

ps. $\dim = \dim \{ \vec{x} \} = \text{dimension}$

5. 数列 = 若映射是由 $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 决定, 求 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 变换的 $\text{Im} f$ $\text{ker} f$



② 变换矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{output}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$
 $\xrightarrow{\text{input}} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$
 记 $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 为 A
 $\dim: \text{input} = 2$
 $\dim: \text{output} = 2$
 $\Rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$AX = w$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ 4
 $\uparrow$ 4
 input

② 求 Imf $\rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ 解 x $\rightarrow$ 只有 线性独立 的基底, 才能生成空间

 才能生成像

Chp 8

Chp 13

重点

$\rightarrow$ 找可生成新的解空间
 $\rightarrow$ 就是找 线性独立 可生成空间的解

方法

$\rightarrow$ 就是找 行空间 的基底 (行空间 = 像空间)
 $\rightarrow$ 就是简化行梯形式 列向量 的数目
 的对应向量

行简化列矩阵 $\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(A) 又有 1 个前导零 $\Rightarrow \text{rank} = 1 \Rightarrow$ 像空间 基底

(B) $\text{nullity} = n - \text{rank} = 2 - 1 = 1$ 又有 1 个

(C) Im 的基底 = 前导零的对应向量 $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(D) Im 有 2 种回答方式

① $\text{Im} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

② $\text{Im} = \left\{ t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

④ 求 $\ker f$ 核空间 $\Rightarrow \boxed{Ax=0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(A) 高斯消元 $\rightarrow$ 简化列梯形 $\rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行交换}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
 $x_1 \quad x_2$

$\begin{cases} x_1 = -2t \\ \text{令 } x_2 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(B) 核空间 有 2 种回答法

① $\ker f = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

② $\ker f = \left\{ t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

⑤ 求 $\text{Im}f$ $\ker f$ 的 口诀:

$\text{Im}f \Rightarrow$ 找前等量
 $\ker f \Rightarrow Ax=0$, 解 x

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ 是否为一对一映射?
 映成双射?

① 一对一映射的判别要诀: 只要没有降秩

$$f: X \rightarrow W$$

$$n=2 \rightarrow \text{rank}=2$$

$$\text{nullity}=0$$

$$\text{nullity}=0$$

$$n = \text{rank} \quad \text{一对一}$$

② 如何计算 rank $\rightarrow$ 看前导零的数目

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{简化}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$n=3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$n=3$$

$$\text{rank}=1$$

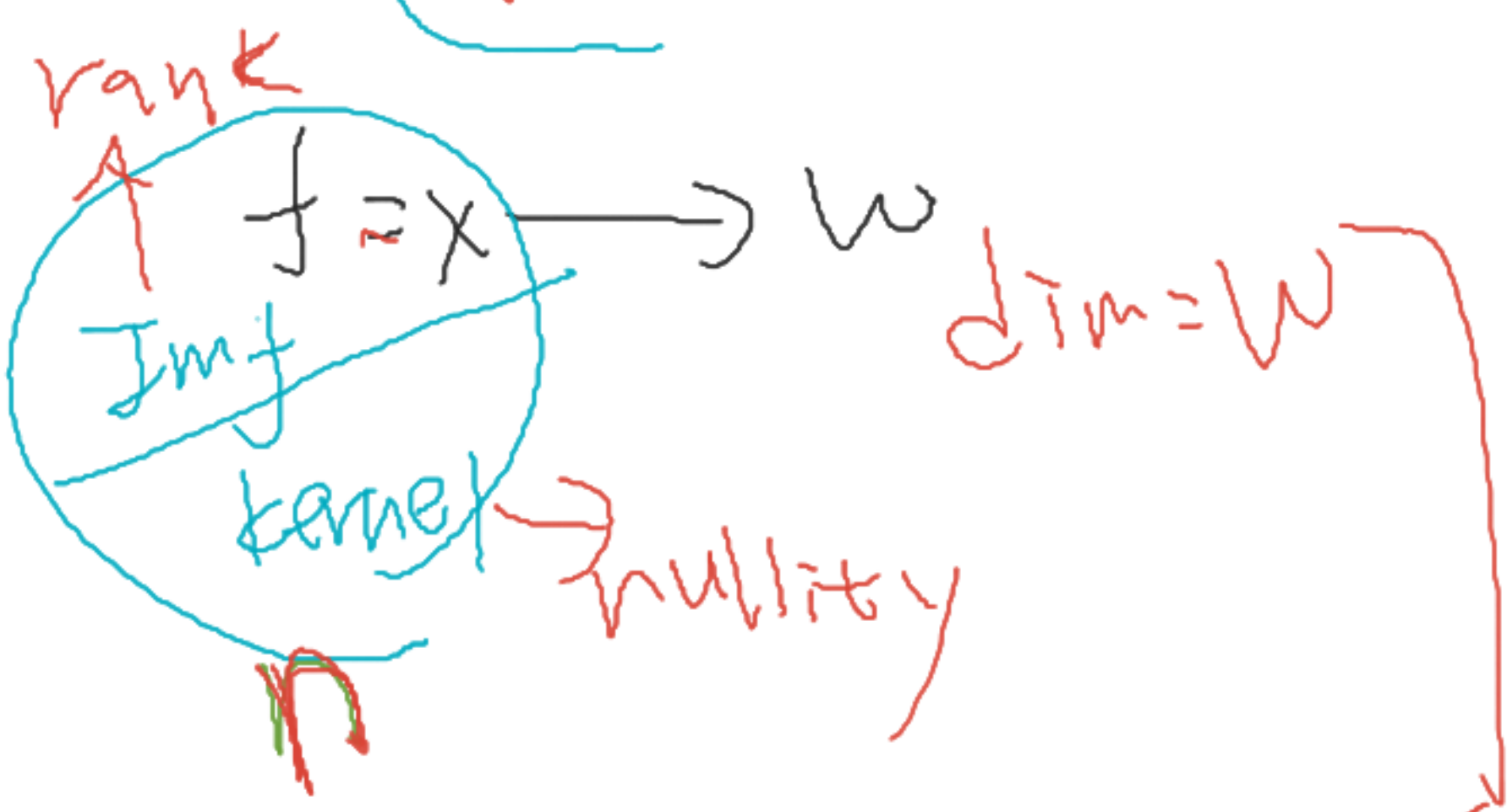
$$\text{nullity}=2 \neq 0$$

一对一映射
 一对一
 是不是

不

③ 映成单射的判别要诀 = 像空间维度 = W 空间维度

$\Downarrow$
 $\text{rank} = \dim = W$



$\Rightarrow \text{rank} = n \Rightarrow 1 \text{ 对 } 1$

$\text{rank} = \dim = W \Rightarrow \text{映成}$
 onto



④ $\dim = w \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{output}}$

$\xleftarrow{\text{input}}$

$\downarrow$

输出(可数) $= \dim = w = 2$

(B) $\text{rank} \Rightarrow$ 线性无关数 $\Rightarrow \text{rank} = 1$

$\because \text{rank} \neq \dim = w$

$\therefore$ 也不是映成变换

⑥ 求 $P^{-1} \Rightarrow A \cdot A^T = I \quad \Leftrightarrow \quad 2 - \frac{1}{2} = 1$

$P \cdot P^{-1} = I$
 $\downarrow$

$A \cdot X = I$

解 $\rightarrow$ 高斯消元 $\rightarrow$ 增广矩阵 $[A | I]$

$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$

把 I_2 变成分块 $\rightarrow$ 增广矩阵 $\rightarrow$ 高斯消元

$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$

结论 $P^{-1} =$

$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{array} \right]$

4. P282 求 A^{13} . $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

① 公式 $A^{13} = P \cdot D^{13} \cdot P^{-1}$

$\begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 213 & 213 & 0 \\ 0 & 0 & 213 \end{bmatrix}^{13}$

② 步骤 1: 先求特征值

$\det(A - \lambda I) = 0$

$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$-(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-1) = 0$

$\lambda = 2, 2, 1$

③ 步骤 2: 再求特征向量

④ 当 $\lambda = 2$, $\begin{bmatrix} 0-2 & 0 & -2 \\ 1 & 2-2 & 1 \\ 1 & 0 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

④ 當 $\lambda = 1$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} v = 0$, 求解 $v \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

⑤ 合成特徵向量 $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

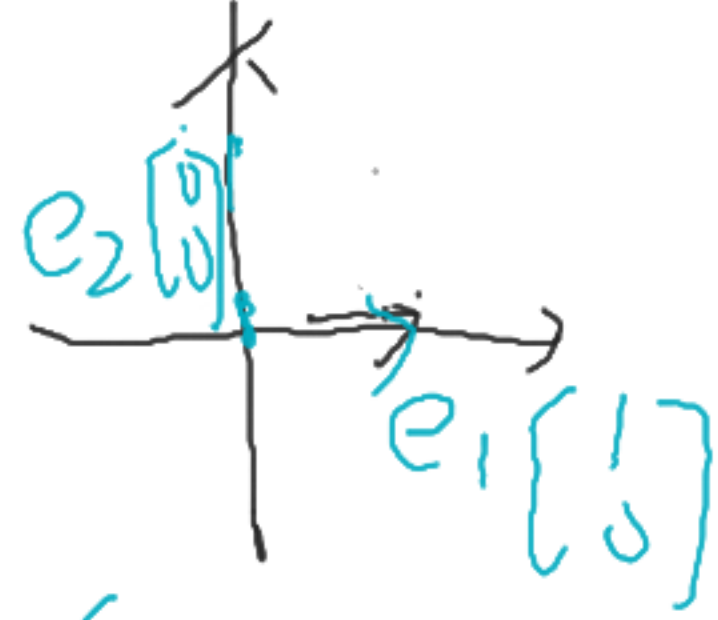
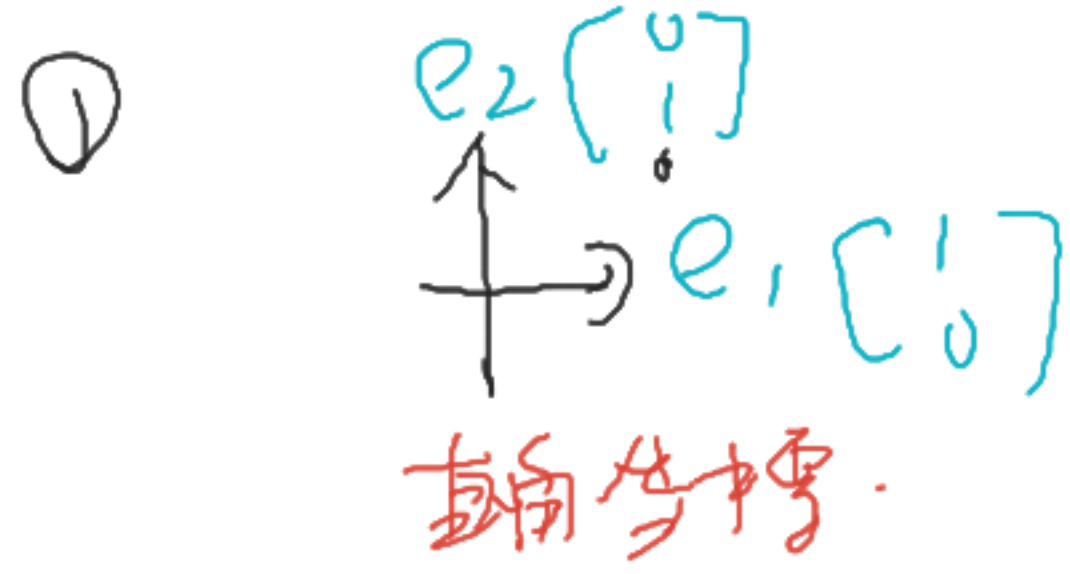
⑥ 計算 $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

⑦ 計算 $D \Rightarrow D = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

⑧ 計算 $A^3 \Rightarrow A^3 = P D^3 P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} -8 & 1 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 6 & 3 & 8 \\ 8 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & 8 \end{bmatrix} \#$

第12章 线性代数

1. 求点 $[-3]$ 对 x 轴的正交投影.



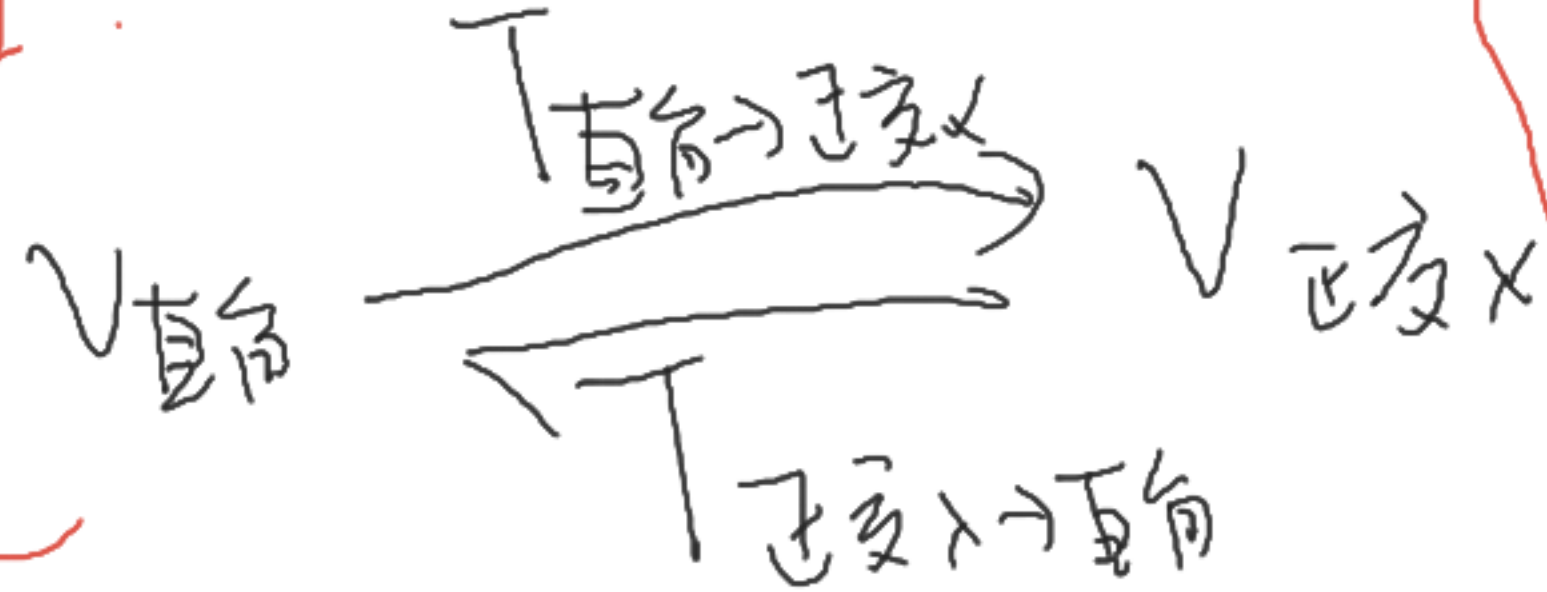
正交投影的步骤

②

$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 投影

新形式

2个基向量关系图



$V_{\text{orth}} = T_{\text{ortho} \rightarrow \text{orth}} V_{\text{ortho}}$

$V_{\text{ortho}} = T_{\text{orth} \rightarrow \text{ortho}} V_{\text{orth}}$

2. 求 $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 进行 x_1 轴点为中心, 逆时针旋转 30°
 之后的新坐标 (象 $\Rightarrow$ 又新象 $\Rightarrow$ 每移动物体, 1
 4个单位)

①

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

4个单位

$$T_{\text{旋转}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

$$T_{\text{旋转}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

②

$$V_{\text{旋转}}$$

$=$

$$T_{\text{直} \rightarrow \text{旋转}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$V_{\text{直}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

2. P208. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ find rank, nullity

① 方法1 $\rightarrow$ 由 nullity / $\lambda \vec{v} \rightarrow A\vec{x} = 0$ ^算 $\rightarrow$ 求零向量的基底

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_6 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} v_2 \\ \vdots \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} v_3 \\ \vdots \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} v_4 \\ \vdots \end{bmatrix},$$

因此 $\Rightarrow \text{rank} = n - \text{nullity} = 6 - 4 = 2$ #

所以 nullity = 4 #

② 方法2 $\rightarrow$ 找 rank $\times$ 手 $\rightarrow$ 看简化列梯形的前导零数.

增广矩阵 $\Rightarrow$
$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 12 & 16 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2个前导零 $\Rightarrow$ $\text{rank} = 2$ #

$$\Rightarrow \text{nullity} = n - \text{rank}$$

$$= 6 - 2$$

$$= 4 \#$$

③ 总结

(A) 如果 $\text{nullity} \neq 0$

代表该空间被压缩 (降阶).

(B) 如果 $\text{nullity} = 0$, $n = \text{rank} \Rightarrow$ Full rank

缩
展
不
有
没
↑