5. 用行列式法判别 $\begin{cases} x+y=4 \\ 3x+3y=6 \end{cases}$ 的解有 $\begin{cases} \text{唯一解} \\ \text{无解} \\ \text{无限多} \end{cases}$

① 判别公式：

$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

A. 若 $\det(A) \neq 0$，有唯一解。

B. 若 $\det(A)=0$ 且 $\det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}=0$

分母 分子

有无限多解 $=\frac{0}{0}$

C. 若 $\det(A)=0$，且 $\det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\neq 0$

分母 分子

有无解 $=\frac{9}{0}$

②

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 3 - 3 = 0$，所以可能是 无解 / 无限多

②

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{0} = \frac{12}{0} \Rightarrow$$ 不可能，所以是无解

#

6 4×4以上的行列式如何計算 — 餘因子法

計算 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ (用餘因子法)

[illegible]

① 任意找一列或一行 (我用第3列) 來 降維

② $5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$ ⇒ 降成2維

③ 注意：正負号 $\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$

$= 5\times 3 - 4\times 9 - 2(-10) = 15 - 36 + 20$

$= -1$ #

7. 特殊行列式.

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\3&1&2&2\\1&0&-2&1\\2&0&0&1\end{bmatrix}$$ 計算 det(A)

① 4x4，只能用餘因子法降維

② 小技巧：找0最多的那一列或行 ⇒ 第2行有3個0

③ 注意正負号：

④ $+1\cdot\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&-2&1\\2&0&1\end{vmatrix}+0+0+0$

⑤ 用第2行來降維（2個0）$=-2\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}=-2\cdot3=-6$ #

8. 特殊行列式：三角矩阵：$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

求 $\det(A)$

① 找0多的列 $= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 = 5$

② 三角矩阵的行列式 = 对角线相乘

③ 上三角、下三角、对角线矩阵

9. 用克拉默法 求方程、

$$\begin{aligned} x_1 + \quad\quad + 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

$-60-32 \quad -92\times2$

$= -184$

① 行列式公式

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{6\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 30 & 4 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \cdot 2} = \frac{144-184}{24+20}$$

$$= \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}$$

#

② $x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}}{44} = \dfrac{72}{44} = \dfrac{18}{11}$ #

③ $x_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix}}{44} = \dfrac{152}{44} = \dfrac{38}{11}$ #

2021|10|22 第5章 行列式(五)

课本 P.110

1. 用克拉玛法解

$$\begin{cases} x+2y-3z=-4 \\ 4x-y+2z=8 \\ 2x+2y-3z=-3 \end{cases}$$

① 先算 det(A) 判别是否有解

$$\det(A) = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{matrix} = 3+8+(-24)-(+6)-4-(-24)$$

$$= 1$$

因为 $\boxed{\det(A) \neq 0}$，所以有唯一解。

② $x = \dfrac{\begin{vmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 8 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix}\begin{matrix} -4 & 2 \\ 8 & -1 \\ -3 & 2 \end{matrix}}{1}$ $= -12 - 12 - 48 - (-9) - (-16) - (-48)$

$= -72 + 9 + 16 + 48$

$= -72 + 73 = 1$ #

③ $y = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -4 \\ 4 & 8 \\ 2 & -3 \end{matrix}$ $= -24 - 16 + 36 - (-48) - (-6) - (48)$

$= -4 + 48 + 6 - 48$

$= 2$ #

④ $z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{matrix}$ $= 3 + 32 - 32 - 8 - 16 + 24 = 3$ #

2. 線性轉換的物理意义：

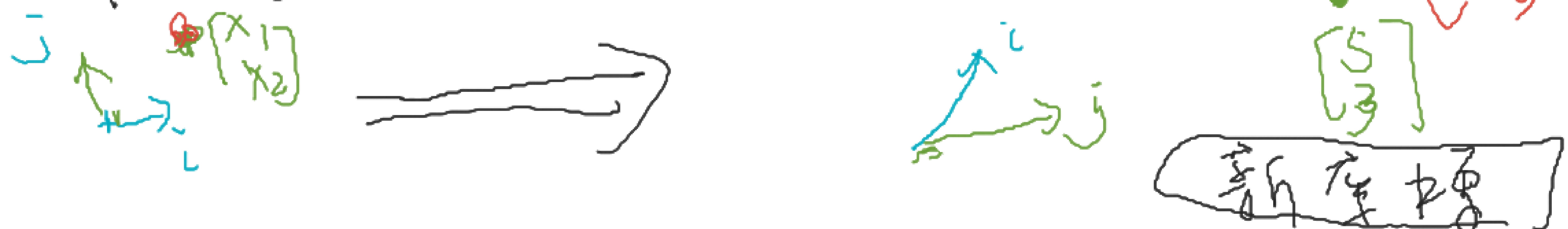
① 轉換 transformation = 代表2個座標的轉換

例如： $x_1 + 2x_2 = 5$

$2x_1 + x_2 = 3$ $\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

物理意义 = 在原有座標上面的一點 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ → 轉換到另外一個座標，變成 $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

原有座標



③ 線性 Linear：有3個要求

(1). 2個座標的轉換，原點要保持固定

(2). 2個座標系統，其網格必須是直線（不可彎曲）

(3). 2個座標系統，其網格必須（平行 等距）

3、行列式的物理意義：

① 例如. $\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

② $\det(A) = \begin{vmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{vmatrix} = 6$ 代表座標轉換後 面積 放大6倍

③ 所以 二維行列式，就是單位面積，轉換後的 縮放率

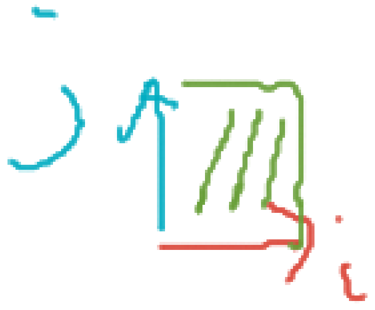
4. $\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}$ 的物理意義、

① $\det(A)=\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1$

② 直角 ⟶ 新座標

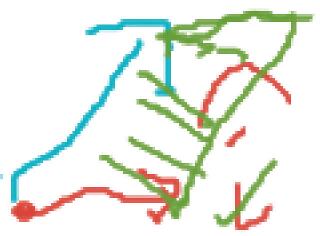
$\begin{array}{cc} \hat{i} & \hat{j} \\ \end{array}$
$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$

$\hat{j}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$



面積=1

代表物理意義



$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 變小

面積=1

③ $\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}$ 代表座標轉換後，面積不變，空間沒有變大

5. $\begin{vmatrix}4&2\\2&1\end{vmatrix}$ 的物理意義.

① $\det(A)=\begin{vmatrix}4&2\\2&1\end{vmatrix}=4-4=0$

② 直角 $\longrightarrow$ 新座標 $\begin{bmatrix}4&2\\2&1\end{bmatrix}$

③ $\begin{vmatrix}4&2\\2&1\end{vmatrix}=0$

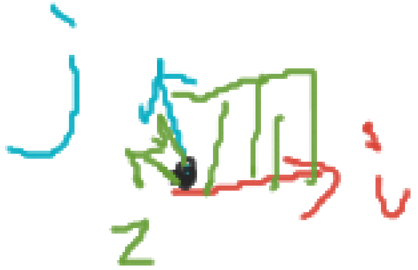
(1) 代表轉換後，從面變成線，重疊沒有面積
線→點

(2) 代表：空間降階（體積->面，面-->線）

(3) 代表網格被壓扁

6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ 的物理意義 ① $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$

② 向量 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow$ 新基底



③ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$ 代表轉換後 (i, j) 軸被翻面，但面積變大 2倍

④ 結論：(1) 行列式 > 1，空間膨脹
(2) 行列式 = 1，空間不大不小
(3) 行列式 < 1，空間被壓縮
(4) 行列式 = 0，空間被壓縮降維（體→面→線→點）
(5) 行列式 < 0，空間被翻轉，翻面

7 $\underbrace{\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}}_{\text{轉換矩陣}}\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}_{\text{直角}}=\underbrace{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}}_{\text{新坐標}}$ 的物理意義

① $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ 代表空間 (i, j) 軸轉換變形率

② $\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}_{\text{直角}}$ 代表直角坐標上的一點 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

③ $\underbrace{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}}_{\text{新坐標}}$ 代表 $\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}_{\text{直角}}$ 被轉到新坐標成 $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}_{\text{新}}$

2021/10/29 第6章 反矩陣 inverse (1)

singular

1. 定義: 反矩陣 identity

$AA^{-1} = I$ (單位矩陣, 例如: $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

① 矩陣A 不一定有 A^{-1}.

例如: $A=\begin{bmatrix}1&4&0\\2&5&0\\3&6&0\end{bmatrix} \Rightarrow A \cdot A^{-1} = I$

$a \cdot x = 1$ ← 1×1 矩陣

$A \cdot A^{-1} = I$ ← $n\times n$ 矩陣

都是零, 相乘結果不會是 I

結論 計算反矩陣 A^{-1} 前, 要先判斷 $det(A) \neq 0$ 才有 A^{-1}

② $det(A) \neq 0$, ⇒ A是可逆的 invertible ⇒ A有 A^{-1}

$det(A) = 0$ ⇒ A是不可逆, ⇒ A沒有 A^{-1} ⇒ A稱為奇異矩陣

2. $A=\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$，求 A^{-1}.

① 先判别有否 A^{-1}，

$\det(A) = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 12-5 = 7 \neq 0$，有反矩陣.

② 2×2矩陣的 A^{-1} 公式 $= \dfrac{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}}{\det(A)} = \dfrac{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}}{7}$

正向斜线对调
逆向斜线负号

$= \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{-5}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$ #

3. $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$，求 A^{-1}

① 先判别有否 A^{-1}.

$\det(A) = 6-6 = 0$

所以没有 A^{-1}.

4. $A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & -4\end{bmatrix}$，用高斯消去法，求 A^{-1}。 (P. 49)

① 先判别有无 A^{-1} ⇒ $\det(A)=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & -4\end{vmatrix}=4-3=1$，有 A^{-1}

② 原理：$A\cdot A^{-1}=I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (第6章)

$A\cdot x=Y$ (第2章)

高斯消去 ⇒ 增广矩阵 $=\left[\begin{array}{c|c}A & Y\end{array}\right]$

第2章 → 例如 $A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & -4\end{bmatrix}$，$Y=\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$ ⇒ 增广矩阵 $=\left[\begin{array}{cc|c}-1 & 3 & 2\\ 1 & -4 & 3\end{array}\right]$

③ $A\cdot X=I$

第6章 → 增广矩阵 $=\left[\begin{array}{cc|cc}-1 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 0 & 1\end{array}\right]$

倒数

1×1: $3\cdot\frac{1}{3}=1$

$n\times n$: $A\cdot A^{-1}=I$

反矩阵

④ $\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$

找第1列前导壹

$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ -1 & +3 & 1 & 0 \end{array}\right]$

前导壹下方变0

$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

找出第2列前导壹

$\begin{array}{cc|cc} & 3 & -3 & -3 \end{array}$

$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$

前导壹上方变0

$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$

所以 $A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ #