

$$\textcircled{5} \cup X = Y$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \text{任意数} = t$$

$$x_2 + 2x_3 = 4, \quad x_2 = 4 - 2t$$

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4, \quad x_1 = 4 - 4(4 - 2t) - 3t$$

$$= 4 - 16 + 8t - 3t$$

$$= -12 + 5t$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 + 5t \\ 4 - 2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \#$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 2 & 3 & -15 & 6 & +20 \\ 0 & \textcircled{1} & -3 & 15 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -26 & 10 & +6 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

$$\text{Final } A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

6. 请用 A^{-1} 法. 解联立方程式

P.53 课本.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3$$

$$x_1 + 0 + 8x_3 = 17.$$

求 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

① 原理: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$

$$A$$

$$x$$

$$= y$$

$$A^{-1} A$$

$$x =$$

$$A^{-1} y$$

$$I$$

$$x = A^{-1} \cdot y$$

$$\Rightarrow$$

$$x = A^{-1} \cdot y$$

$$1 \times 5 = 5$$

$$I - A = I - A$$

② $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ 求 A^{-1} .

行列式不为 0 $\Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ 有 A^{-1} .

③ $A \cdot A^{-1} = I$, 用高斯消元法求 A^{-1} (第 2 步)

增广矩阵: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$

最终 $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$ 故 $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\textcircled{4} \quad AX = Y$$

$$X = A^{-1} \cdot Y$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{40} & \overline{16} & \overline{9} \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{5} \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -40 \times 5 + 16 \times 3 + 9 \times 17 \\ 13 \times 5 - 5 \times 3 + (-3) \times 17 \\ 5 \times 5 - 2 \times 3 - 1 \times 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \#$$

2021/11/15 反矩陣 (2)

1. 算反矩陣有3種方法.

① 2×2 矩陣 ($A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}{\det(A)}$)

② 高斯消元法. ($A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\Rightarrow$ 增廣矩陣 = $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$

③ 餘因子法. (y.c 後補充). $= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \times & \times \\ 0 & 1 & \times & \times \end{array} \right]$

00 陣
中 矩陣

井
解 答

2. ~~LU分解~~

解线性方程组有4种方法.

① 高斯消元法.

② 克拉姆法 (行列式法)

③ 反矩阵法

④ LU分解法.

⇒ 可用各种 $n \times m$ 矩阵.

⇒ 只适用 $n \times n$ 矩阵.

⇒ 只适用 $n \times n$ 矩阵.

⇒ 只适用 $n \times n$ 矩阵.

(只值心算, 在求解时
研究的常考)

~~1/2/3/4~~

~~1/2/3/4/5/6/7/8/9~~

3 LU分解法 求解 $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$A \quad X = b$

直接心算

$$\begin{cases} 2Y_1 = 2, Y_1 = 1 \\ -3Y_1 + Y_2 = 2, Y_2 = 5 \\ 4Y_1 - 5Y_2 + 7Y_3 = 3, Y_3 = 2 \end{cases}$$

① 若已知 A 可分解成 LU

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

L
Lower
 $\bar{x} = \bar{b}$

U
upper
 $\bar{x} = \bar{b}$

for Y

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

② 令 $\bar{U} \bar{x} = \bar{b}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$L \quad Y = b$

3. LU 如何分解, 请把 $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$ 分解成 LU
~~※~~ 所有元素都是整数

① 方法 1: 课本方法, P. 67 (太复杂)

② 方法 2: 老师的暴力解法

步骤 1: 用高斯消去法 (把前零下方为 0)

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow U_{\text{per}} \text{ 上三角}$$

例题 2: $A = LU$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

直接计算:

$$\begin{aligned} 2 &= a + 0 + 0, & a &= 2 \\ -3 &= b + 0 + 0, & b &= -3 \\ 4 &= c + 0 + 0, & c &= 4 \\ -8 &= 3b + d + 0, & d &= 1 \\ 9 &= 3c + e + 0, & e &= -3 \\ 2 &= c + 3e + f, & f &= 11 \end{aligned}$$

for L : $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

特型3

$$A = L \cup$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \#$$

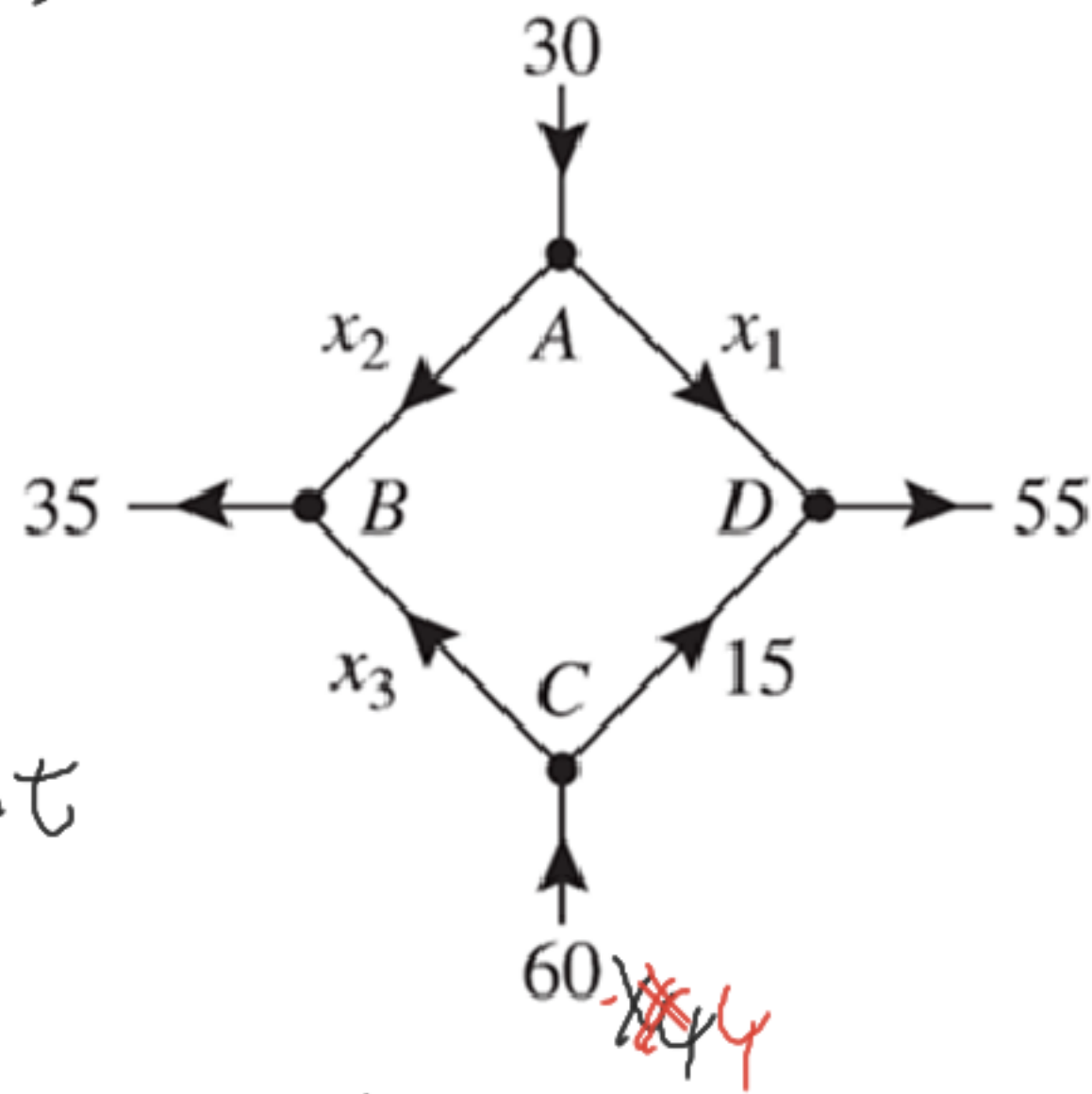
第7章 线性系统的应用 (1)

1. 解流量系统的 x_1, x_2, x_3 P.70

① 定律1: 总流量 in = 总流量 out

$$30 + 60 = 35 + 55$$

② 定律2: 节点流量 in = 节点流量 out



$$\left[\begin{array}{l} \text{A点: } 30 = x_1 + x_2 \\ \text{B点: } x_2 + x_3 = 35 \\ \text{C点: } 60 = x_3 + 15 \\ \text{D点: } x_1 + 15 = 55 \end{array} \right]$$

联立方程

$$\left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 + 0 = 30 \\ 0 + x_2 + x_3 = 35 \\ 0 + 0 + x_3 = 45 \\ x_1 + 0 + 0 = 40 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{c}
 \text{ii} \\
 \left[\begin{array}{ccc|c}
 1 & 1 & 0 & 30 \\
 0 & 1 & 1 & 35 \\
 0 & 0 & 1 & 45 \\
 1 & 0 & 0 & 40
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

A b

$\Rightarrow A$ 是 4×3 矩陣
 能用高斯消元法
 去法解

$$\begin{cases}
 x_1 + x_2 + 0 = 30 \\
 0 + x_2 + x_3 = 35 \\
 0 + 0 + x_3 = 45 \\
 x_1 + 0 + 0 = 40
 \end{cases}$$

3個↑
變數

$$\left[\begin{array}{ccc|c}
 1 & 0 & 0 & 20 \\
 0 & 1 & 0 & -10 \\
 0 & 0 & 1 & 45 \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right]$$

x_1 x_2 x_3

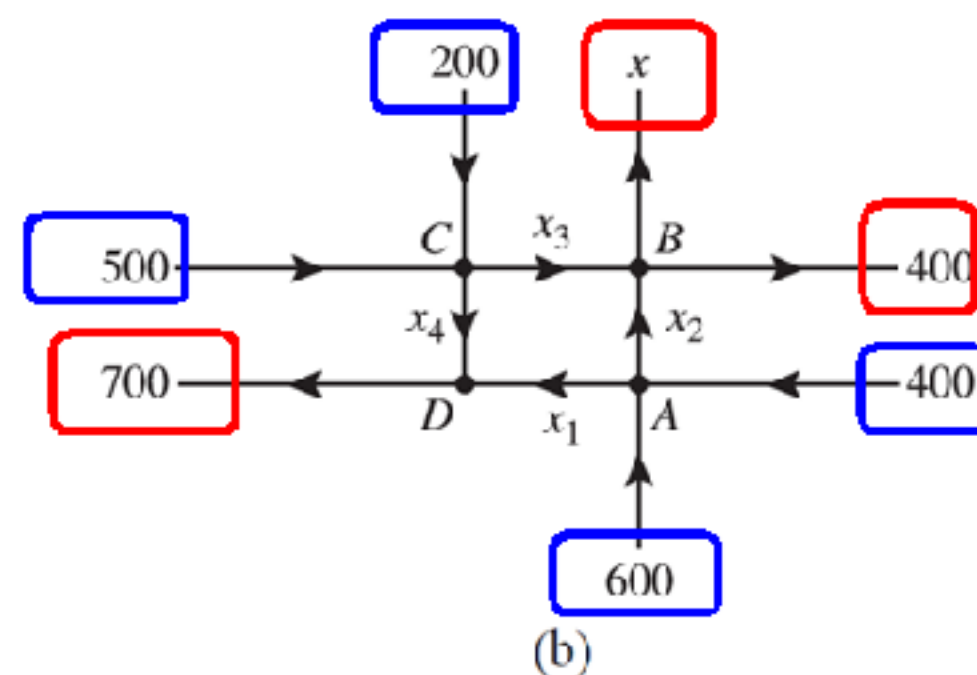
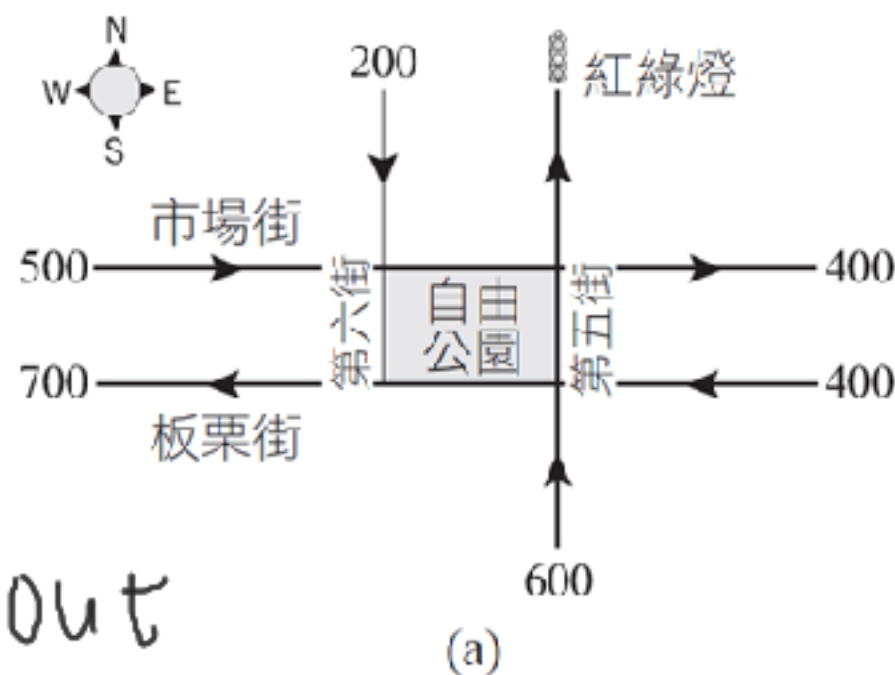
注意：本題解不是無限多解
 原因：題中變數只有3個，只須3條方程式即可。
 多出來的是多餘的

只看3列 (3條方程式)

$\downarrow x_1 = 20, \quad x_2 = -10, \quad x_3 = 45$

2. 交通流量, P. 71.

求 x, x_1, x_2, x_3, x_4



① 定律 1: 總流 in = 總流 out

$$500 + 200 + 400 + 600 = x + 400 + 700$$

$$x = 600$$

② 定律 2: 節點 in = 節點 out

A 點: $400 + 600 = x_1 + x_2$

B 點: $x_2 + x_3 = 600 + 400$

C 點: $500 + 200 = x_3 + x_4$

D 點: $x_1 + x_4 = 700$

$$x_1 + x_2 + 0 + 0 = 1000$$

$$0 + x_2 + x_3 + 0 = 1000$$

$$0 + 0 + x_3 + x_4 = 700$$

$$x_1 + 0 + 0 + x_4 = 700$$

③ 增廣矩陣

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1000 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1000 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1700 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 700 \end{array} \right]$$

高斯消去法

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 3000 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1700 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

$x_3 + x_4 = 700$

令 $x_4 = t$
 $(x_3 = 700 - t)$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 700 \\ x_1 = 700 - t \end{cases}$$

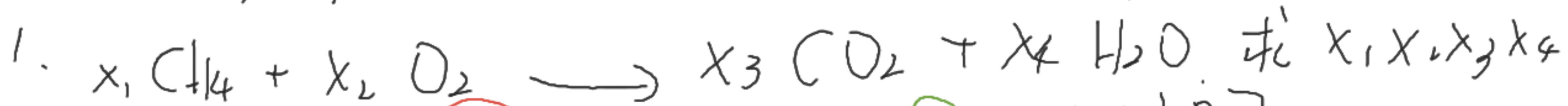
$$\begin{cases} x_2 - x_4 = 300 \\ x_2 = 300 + t \end{cases}$$

④ Ans:

$$\begin{cases} x_1 = 700 - t \\ x_2 = 300 + t \\ x_3 = 700 - t \\ x_4 = t \end{cases}$$

注意：無限多解
 一定是個關係式。

2021/11/12. 第1張 线性系统应用(2)



① 解法: 每个原子左 = 右.

② C: $x_1 = x_3$

H: $4x_1 = 2x_4$

O: $2x_2 = 2x_3 + x_4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & | & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & | & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

③ 联立方程式

$$x_1 + 0 - x_3 + 0 = 0$$

$$4x_1 + 0 + 0 - 2x_4 = 0$$

$$0 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$$

1. 3×4 矩阵
2. 高斯消元法

$$x_3 = \frac{x_4}{2}$$

$$2x_4 = t$$

$$x_3 = t/2$$

$$x_2 = t$$

$$x_1 = t/2$$

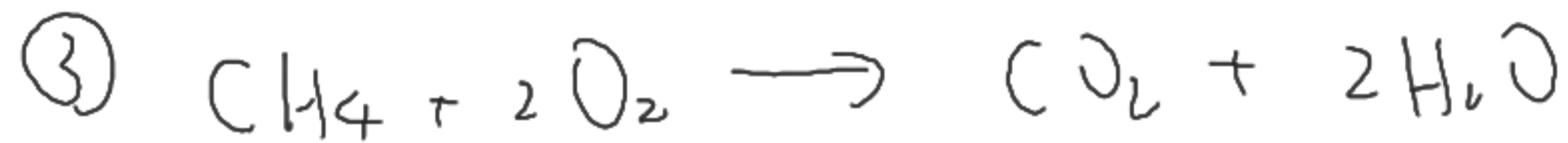
4个变数要有4个方程
→ 无解
→ 所有方程都满足

④ 增广矩阵 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}$

② 化学式系数必须是最小整数

$$\text{所以 } t = 2 \Rightarrow x_3 = \frac{t}{2} = 1$$

$$\Rightarrow x_4 = 2, x_5 = 1, x_6 = 2$$



2. 考前複習, 習題 55 (D&E 131)

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

① 公式 1: $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$

$\rightarrow \mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$

② 公式 2: $A \cdot A^{-1} = I$

A^{-1} , 用高斯消元法. 增廣矩陣: $[A | I]$

$$\text{所以 } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

③ $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -12 & -11 & -10 & -9 \\ 24 & 12 & 10 & 8 \\ -23 & -20 & -17 & -14 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

3. 複習. 習題 37

用行列式解

$$x + 2y - 3z = -4$$

$$37. 4x - y + 2z = 8$$

$$2x + 2y - 3z = -3$$

① 公式: $x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{\det(A)}$, $y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 4 & 8 & -3 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix}}{\det(A)}$

② 先判別 $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 1$, 有唯一解

③ $x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-1}{1} = -1$

$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 4 & 8 & -3 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{2}{1} = 2$

$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{3}{1} = 3$

④ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

4. 練習問題 62
LU分解.

$$62. \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

① $A = LU$, 先計算上三角 U
方法: 高斯消去法 (向下為 0)

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

前兩行
向下為 0

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow U$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & d & f \\ c & e & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1 &= a, & 2 &= c \\ -1 &= b, & -1 &= 4b+d, & d &= 3 \end{aligned}$$

$$9 = 4c + e, \quad e = 1$$

$$8 = 3c + 2e,$$

f 可以是任意數.

$$\textcircled{2} L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{課本 0.4}$$

$$\textcircled{4} \frac{A}{LU} x = b$$

$$L y = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 4 \\ y_1 + 3y_2 &= 8, & y_2 &= \frac{12}{3} = 4 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 &= 12, & y_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$