

2021/12/10 第9章 基底转换 (2)

5. (接上题) R_{91} , $B = \{b_1, b_2\}$, $C = \{c_1, c_2\}$

$$b_1 = (1, 0)$$

$$c_1 = (1, 1)$$

$$b_2 = (0, 1)$$

$$c_2 = (2, 1)$$

求:

求 $(w)_C = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$, 求另一基 $(w)_B = ?$

① 2个基关系: $W_B \xrightarrow{P_{B \rightarrow C}} W_C$
 $\xleftarrow{P_{C \rightarrow B}}$

$$W_B = P_{C \rightarrow B} W_C$$

$$W_C = P_{B \rightarrow C} W_B$$

② $W_B = P_{C \rightarrow B} W_C$

$$W_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 1 & 2 \\ 0 & 1 & | & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

6. $B = \{b_1, b_2\}$, $C = \{c_1, c_2\}$, 其中 $b_1 = (1, 2)$, $c_1 = (1, 3)$
 $b_2 = (2, 3)$, $c_2 = (1, 4)$

(6-1). 已知 $W = (1, 0)$ 求 W_B , 并用 $P_{B \rightarrow C}$ 求 W_C

① 三个坐标关系:

$$W_{\text{自然}} \xrightarrow{P_{\text{自然} \rightarrow B}} W_B \xrightarrow{P_{B \rightarrow C}} W_C$$

$$W_B = P_{\text{自然} \rightarrow B} \cdot W_{\text{自然}}$$

$$W_C = P_{B \rightarrow C} \cdot W_B$$

② $W_B = P_{\text{自然} \rightarrow B} \cdot W_{\text{自然}}$

$$W_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \#$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times -1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{3} \quad W_C = P_{B \rightarrow C} \cdot W_B$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 2 \\ 3 & 4 & | & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 2 & 5 \\ 0 & 1 & | & -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

#

6-2). 已知 $W = (3, -3)$, 求 W_C , 且用 $P_{C \rightarrow B}$ 求 W_B .

① 三个坐标关系.

$$W \xrightarrow{P_{B \rightarrow C}} W_C \xrightarrow{P_{C \rightarrow B}} W_B$$

$$\underline{W_C} = P_{B \rightarrow C} \cdot W_B$$

$$W_B = P_{C \rightarrow B} W_C$$

② $\underline{W_C} = P_{B \rightarrow C} \cdot W_B$

$$W_C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -12 \end{pmatrix} \#$$

③

$$W_B = P_{C \rightarrow B} \cdot W_C.$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 9 \end{bmatrix}_A$$

7. 多項式 $P(x) = 3 - 2x + x^2 + 2x^3$,
相對標準基底的坐標為多少?

① 多項式的標準基底, $S = \{ 1, x, x^2, x^3 \}$

對照: 傳統基底 $B = \{ v_1, v_2, v_3 \}$

$$v_1 = (1, 0, 0)$$

$$v_2 = (0, 1, 0)$$

$$v_3 = (0, 0, 1)$$

② 所以 $P(x)$ 的坐標 $P_s = (3, -2, 1, 2)$

第10章 列空間, 行空間, 核空間, rank 秩數, nullity 核數

1. 用範例來定義:

用一群向量 v_1, v_2, v_3, v_4 來形成一個空間系統,

結果 = 這個空間 V 的基底 = $\{b_1, b_2, b_3\}$

原來是4個向量 $n=4$

- ① 3個基底向量, 故 rank 數 = 3
- ② 有1個向量是零 (因為降階, 因為4個向量相乘)

→ nullity 數 = 1,

維度守恒公式

$$n = \text{rank} + \text{nullity}$$
$$4 = 3 + 1$$

2. 物理意義：原本在直向選擇取出4個向量。

→ 組成空間

→ 檢查後，發現一個不合物 (線性
相依)

不合物 → 只有3個向量可以當作基底。(rank)

不合物 → 1個向量被降階 (nullity = 1)

3. 数学定义:

① 行空间 = $CS(A)$ = 由行向量组成的空间
column space 例: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

② 列空间 = $RS(A)$ = 由列向量组成的空间
row space 例: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow r_1 \\ \rightarrow r_2 \\ \rightarrow r_3 \end{matrix}$

③ 核空间 = $NS(A)$ = 线性变换造成 $AX=0$ 的空间
null space (被降阶到零空间的向量)

★ $AX=0$, X 解的空间, 就是核空间

4. P202, $V_1 = (1, -2, 0, 0, 3)$
 $V_2 = (2, -5, -3, -2, 6)$
 $V_3 = (0, 5, 15, 10, 0)$
 $V_4 = (2, 6, 18, 8, 6)$

求 V_1, V_2, V_3, V_4 张成的
 列空间的基底?

① 列空间矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}$

② 检查列空间基底的方法
 ① 先简化列变换
 ② 有前导零的列就是
 冗余列

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
 $\begin{matrix} \rightarrow r_1 \\ \rightarrow r_2 \\ \rightarrow r_3 \\ \rightarrow \text{冗余列} \end{matrix}$
 rank = 3

③ 列空间的基底 $S = \{V_1, V_2, V_3\}$, $V_1 = (1, -2, 0, 0, 3)$, $V_2 = (2, -5, -3, -2, 6)$, $V_3 = (0, 5, 15, 10, 0)$

2021/12/17 第10章 列空間 (2)

1. 求這些向量生成行空間的基底

$$\begin{cases} V_1 = (1, -2, 0, 0, 3) \\ V_2 = (2, -5, -3, -2, 6) \\ V_3 = (0, 5, 15, 10, 0) \\ V_4 = (2, 6, 18, 8, 6) \end{cases}$$

P203.

① 行空間矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 15 & 18 \\ 0 & -2 & 10 & 8 \end{bmatrix}$

② 檢查 $\Rightarrow$ 看前導元有幾個 $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

③ 行空間基底 $S = \{u_1, u_2, u_3\}$

其中 $u_1 = (1, -2, 0, 0, 3)$
 $u_2 = (2, -5, -3, -2, 6)$
 $u_3 = (2, 6, 18, 8, 6)$

2. P198. 求矩阵A的核空间基底. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 3 & 0 & 8 & 2 & 18 \end{bmatrix}$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$

① 核空间 $\Rightarrow$ 解 $AX=0$

无限多解

$$\begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

增广矩阵 = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 8 & 2 & 18 & 0 \end{bmatrix}$

② 高斯消元法 $\rightarrow$ 简化到行阶梯 $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$

③ 解 $X \Rightarrow$

$$x_6 = 0$$

$$x_3 + 2x_4 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_4 + 2x_5 = 0$$

$$\text{令 } x_4 = s \Rightarrow x_3 = -2s$$

$$\text{令 } x_5 = t$$

$$\text{令 } x_2 = r \Rightarrow x_1 = -3r - 4s - 2t$$

④ 通解的向量表示式:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3r - 4s - 2t \\ r \\ -2s \\ s \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

⑤ 核空間基 $S = \{v_1, v_2, v_3\}$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \#$$

3. 线性系统的通解 = 特解 + 齐次解



$Ax=b$ 的



$Ax=b$ 解



general
solution

完整解

particular
solution

常数项
 x_0

homogeneous
solution

核空间解
 x_h

null
space
solution

$= x_0 + (Ax=0 \text{ 解})$

$= \text{常数} +$

$S = \{v_1, v_2, v_3\}$

物理意义

4. P15
P17
P17

求 $Ax=b$ 的解

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

① 通解 = 完整解 = $Ax=b$

高斯消元: 有 $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix} x_0 + r \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

x_0 x_h

② 齊次解 = $x_h =$ 核空間解

$Ax=0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

③ 結論:

- (A). $Ax=b$, $Ax=0$, 解的結構 (基) 是一樣的.
- (B). $Ax=b$, 會多出一個常數項 (空間點)
- (C). $Ax=b$, 完整解 = $x_0 + x_h$ (齊次解, 核空間解)

2021/12/24 第10章 rank nullity - 行空間 核空間

1. A 為 4×6 矩陣, $Ax=0$ 的 rank = 3. 求 nullity? (2)

① 維度守恒公式 $n = \text{rank} + \text{nullity}$

3. 法:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行變換}} 4 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = 0$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
6

A
 $\downarrow$
行數為 6

$x = 0$
 $\downarrow$
6個變數

$6 \text{ rank } n = 6$ (行數)

$$\text{nullity} = 6 - \text{rank} = 6 - 3 = 3 \neq$$

2. 方法2: ① $\text{rank}(A)$ $\Rightarrow$ 就是求核空間的基底數

$\Downarrow$
0

數目
 $\downarrow$
幾何基底

$\downarrow$
0

零空間

$\downarrow$
 $AX=0$ 解的空間基底數
 $\left[A \mid \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} \mid \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right]$ 無限多

② 求 $AX=0$ 的解

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3r - 4s - 2t \\ r \\ -2s \\ s \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

③ $AX=0$ 的零空間基底數 $= 3 = \text{nullity}$ ✱
零空間

2. P208. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ find rank, nullity

① 方法1 $\rightarrow$ 由 nullity / $\lambda \vec{v} \rightarrow A\vec{x} = 0$ ^算 $\rightarrow$ 求零向量的基底

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_6 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} v_2 \\ \vdots \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} v_3 \\ \vdots \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} v_4 \end{bmatrix},$$

因此 $\Rightarrow \text{rank} = n - \text{nullity} = 6 - 4 = 2$ #

所以 nullity = 4 #

② 方法2 $\rightarrow$ 找 rank $\times$ 手 $\rightarrow$ 看简化列梯形的前导零数.

增广矩阵 $\Rightarrow$
$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 12 & 16 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2个前导零 $\Rightarrow$ $\text{rank} = 2$ #

$$\Rightarrow \text{nullity} = n - \text{rank}$$

$$= 6 - 2$$

$$= 4 \#$$

③ 总结

(A) 如果 $\text{nullity} \neq 0$

代表该空间被压缩 (降阶).

(B) 如果 $\text{nullity} = 0$, $n = \text{rank} \Rightarrow$ Full rank

缩
展
不
有
没
↑